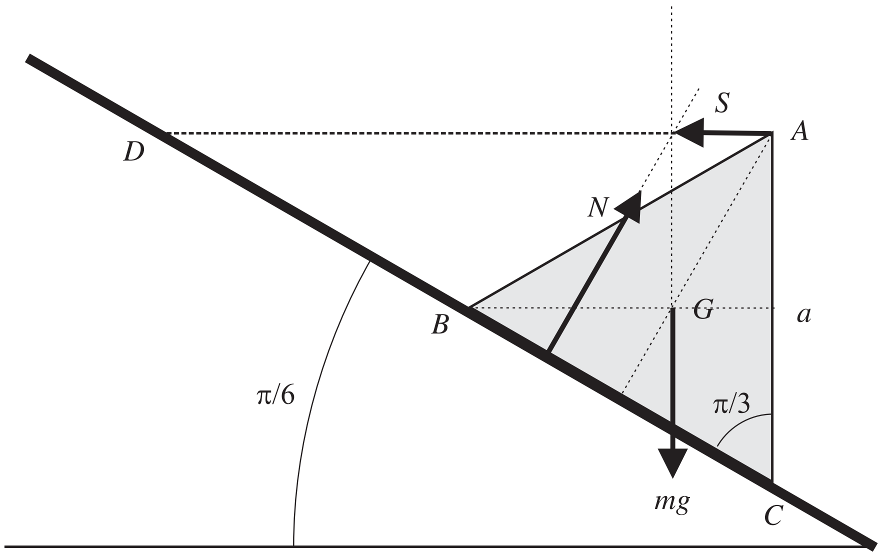
Mekanik bk och I, 5C1103-30, för I1 och BD1, 2006 05 12, kl 08.00-12.00

Lösningar till problemtentamen

Uppgift 1: En platta i form av en liksidig triangel ABC med sidolängderna a och massan m står på ett glatt sluttande plan, med lutningsvinkel $30° = \pi/6$. En horisontell tråd är i sin ena ände D fäst i planet och i sin andra ände i triangelns övre hörn A. Den hindrar triangeln från att glida ner. Vad är spänningen i tråden?



Figur 1: Systemet i Uppgift 1

Lösning 1: Totala kraften i horisontell respektive vertikal led blir,

$$(\rightarrow) \qquad -S + N\sin(\pi/6) = 0, \tag{1}$$

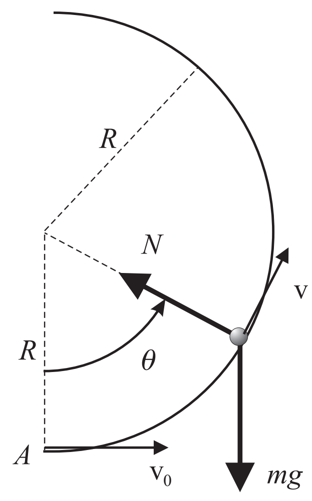
$$(\uparrow) \qquad -mg + N\cos(\pi/6) = 0. \tag{2}$$

Då, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, och, $\sin(\pi/6) = 1/2$, får man att, $S = N/2$, ur den första av dessa ekvationer. Den andra ger, $N = mg2/\sqrt{3}$. Således får man att

Svar: Spänningen i tråden är

$$S = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$

Uppgift 2: En fjäder med styvhet k ges en hoptryckning δ och släpps så att den slungar iväg en partikel med massan m. Partikel rör sig sedan från lägsta punkten A i en glatt vertikal halvcirkulär bana med radien R. Bestäm normalkraften från spåret på partikeln som funktion av vinkeln θ.



Figur 2: Systemet i Uppgift 2

Lösning 2: Fjädern ger partikeln en kinetisk energi som alltså är,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}k\delta^2,$$

i lägsta punkten A. Farten är då, $v_0 = \sqrt{k/m}\delta$.

Därefter gäller att endast tyngdkraften uträttar arbete och att energins bevarande ger,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR(1 - \cos\theta).$$

Kraftekvationens ($m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$) normalkomponent (naturliga komponenter) ger,

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta.$$

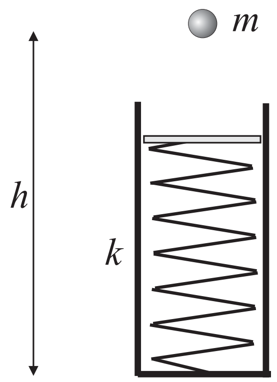
Sätter man ihop dessa resultat får man att,

Svar:

$$N = \frac{k\delta^2}{R} + 3mg\cos\theta - 2mg,$$

för normalkraften som funktion av θ. Notera att normalkraften måste vara positiv. För den vinkel där detta uttryck blir noll upphör kontakten med spåret.

Uppgift 3: I ett glatt vertikalt rör sitter en lätt fjäder med styvhet k och naturliga längden $2h/3$ fast i botten. Ovanpå den är en tunn lätt platta fäst. Från höjden h släpps, från vila, en lerklump med massan m rakt ner på plattan och fastnar. Beräkna fjäderns maximala hoptryckning.



Figur 3: Lerklumpen innan den släpps och röret med lätt platta ovanpå lätt fjäder.

Lösning 3: Notera att när lerklumpen fastnar i plattan har man ett stötförlopp med studstalet $e = 0$. Normalt är alltså energin *inte* bevarad. Då plattan (och fjädern) har försumbar massa jämfört med lerklumpen ger dock rörelsemängdens bevarande att,

$$mv_{\text{före}} = mv_{\text{efter}},$$

och alltså ändras inte hastigheten och därmed heller inte kinetiska energin.

När fjädern når sin maximala hoptryckning, δ, vänder lerklumpen första gången i den efterföljande svängningsrörelsen. Vid vändlägen är hastigheten noll och alltså kinetiska energin noll ($T = 0$). Då kinetiska energi också är noll i startläget fås ur lagen om kinetiska energin att totala arbete är noll. Då arbetet är positivt för tyngdkraften och negativt för fjäderkraften fås,

$$T_2 - T_1 = 0 - 0 = mg\left(\frac{h}{3} + \delta\right) - \frac{1}{2}k\delta^2.$$

Man måste alltså lösa följande andragradsekvation för δ:

$$\frac{1}{2}k\delta^2 - mg\delta - \frac{h}{3}mg = 0.$$

Den negativa roten måste uteslutas.

Detta ger följande maximala hoptryckning för fjädern:

Svar:

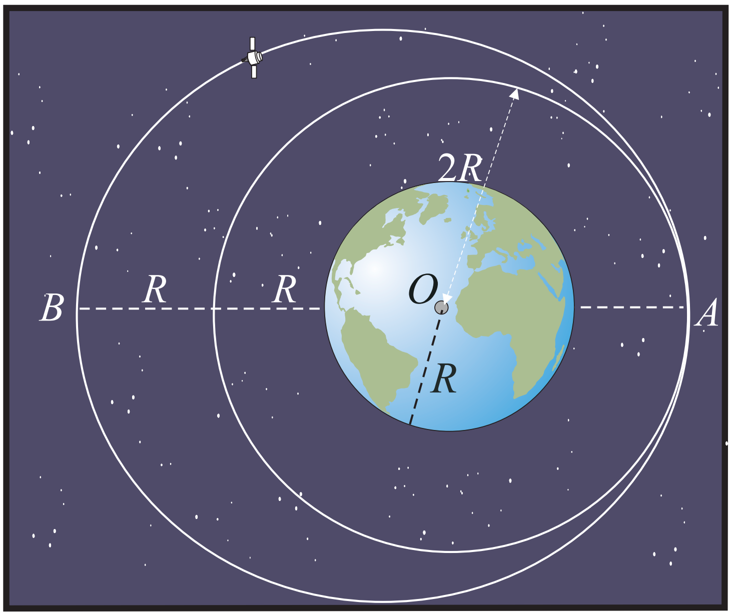
$$\delta = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2}{3}\frac{mgh}{k}}.$$

Svaret kan också skrivas på formen,

$$\delta = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3}\frac{kh}{mg}}\right),$$

och flera andra algebraiskt ekvivalenta former.

Uppgift 4: En rymdfarkost kretsar kring jorden längs en cirkulär bana med radien $2R$, där R är jordradien. Rymdfarkostens fart ökas under en kort tid, i punkten A, utan att riktningen ändras. Detta leder till att banan ändras till en ellips enligt figuren. Största avståndet till jordens centrum blir i den nya banan $3R$. Bestäm vilket energitillskott ΔE farkosten har fått.



Figur 4: Bild till Uppgift 4

Lösning 4: För cirkelbanehastigheten gäller att,

$$m\frac{v_C^2}{2R} = \frac{GmM}{(2R)^2}.$$

Detta medför att

$$v_C^2 = \frac{GM}{2R}.$$

För ellipsbana gäller allmänt att,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{2a},$$

där $2a$ är ellipsens storaxel. (Alternativt kan man använda rörelsemängdsmomentets bevarande, i punkterna A och B, i stället för denna formel.) I punkten A fås nu att,

$$\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{GM}{2R} = -\frac{GM}{5R},$$

eftersom massan m kan förkortas bort. Detta ger,

$$v_A^2 = \frac{3}{5}\frac{GM}{R}.$$

Energiändringen blir således, $\Delta E = \frac{1}{2}m(v_A^2 - v_C^2)$. Alltså fås

Svar:

$$\Delta E = \frac{GmM}{20R} = \frac{mgR}{20}.$$

Teoritentamen

Uppgift 5: En kraft $\boldsymbol{F} = (2\,\boldsymbol{e}_x + 6\,\boldsymbol{e}_z)\,\mathrm{N}$ angriper i en punkt P med kartesiska koordinater $P : (3, -2, 0)\,\mathrm{m}$. Beräkna kraftens moment $\boldsymbol{M}_A$ med avseende på punkten A med koordinaterna $A : (1, -2, 3)\,\mathrm{m}$.

Svar:

$$\boldsymbol{M}_A = \overline{AP} \times \boldsymbol{F} = (2\,\boldsymbol{e}_x - 3\,\boldsymbol{e}_z) \times (2\,\boldsymbol{e}_x + 6\,\boldsymbol{e}_z)\mathrm{Nm} = -18\,\boldsymbol{e}_y\,\mathrm{Nm}.$$

Uppgift 6: Härled uttrycket för accelerationen i planpolära koordinater.

Svar:

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\boldsymbol{e}_\theta$$

Uppgift 7: Visa att rörelsemängdsmomentvektorn $\boldsymbol{H}_O$ är konstant om en centralkraft verkar och momentpunkten ligger i kraftcentrum O. Vilka slutsatser om rörelsen kan man dra av detta?

Svar: Då $\dot{\boldsymbol{H}}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ och $\boldsymbol{F}$ är parallell med $\boldsymbol{r}$ fås att $\dot{\boldsymbol{H}}_O = \boldsymbol{0}$ så $\boldsymbol{H}_O =$ konstant. Detta visar i att rörelsen är plan och att sektorhastigheten är konstant (när $\boldsymbol{H}_O = mr^2\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_z$ uttrycks i polära koordinater).

Uppgift 8: Beräkna perioden för små svängningar i ett vertikalplan för en partikel upphängd i en tråd av längd ℓ.

Svar: Perioden ges av $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

HE 2006 05 12