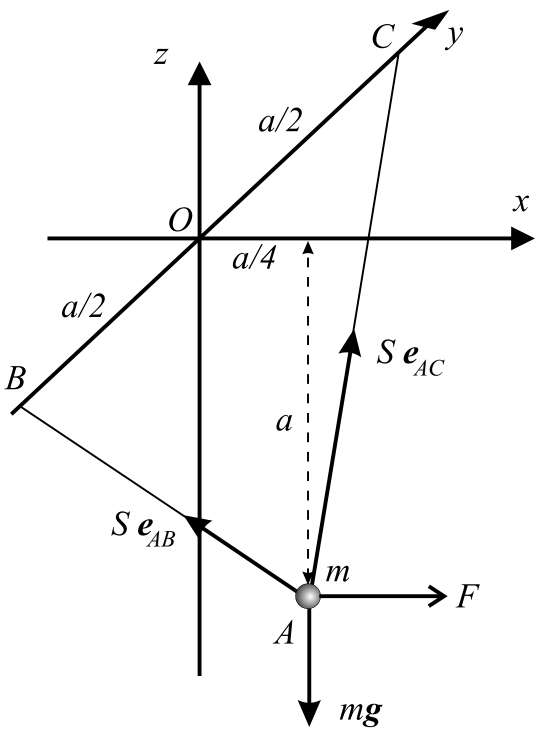
Mekanik bk och I, 5C1103-30, för I1 och BD1, 2007 05 09, kl 08.00-12.00

Lösningar till problemtentamen

Uppgift 1: En partikel i A med massa m hänger i två lika långa trådar fästa i punkterna B respektive C på samma höjd och på avståndet a från varandra. En vind blåser vinkelrätt mot linjen BC och påverkar partikeln med en horisontellt riktad kraft F. Partikel är därför förskjuten $a/4$ åt sidan om linjen och befinner avståndet a under det horisontalplan där punkterna B och C ligger. Med koordinatsystemet i figuren har punkterna koordinaterna $A:(a/4,0,-a),\ B:(0,-a/2,0),\ C:(0,a/2,0)$ och kraften från vinden är i x-riktningen. Beräkna beloppet av spännkraften S i trådarna (samma i båda av symmetriskäl) och kraften F från vinden.



Figur 1: Systemet i Uppgift 1. De fyra krafter som verkar på partikeln är utritade.

Lösning 1: Trådarna går från $\boldsymbol{r}_A=(a/4,0,-a)$ till $\boldsymbol{r}_B=(0,-a/2,0)$ respektive $\boldsymbol{r}_C=(0,a/2,0)$. Det betyder att spännkrafterna i trådarna kan skrivas,

$$S\,\boldsymbol{e}_{AB}=S(\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A)/|\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A|, \tag{1}$$

$$S\,\boldsymbol{e}_{AC}=S(\boldsymbol{r}_C-\boldsymbol{r}_A)/|\boldsymbol{r}_C-\boldsymbol{r}_A|, \tag{2}$$

där S är det sökta beloppet. Man får att $(\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A)=(-a/4,-a/2,a)$ och $(\boldsymbol{r}_C-\boldsymbol{r}_A)=(-a/4,a/2,a)$. Således är $|\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A|=|\boldsymbol{r}_C-\boldsymbol{r}_A|=\sqrt{21}a/4$. Då är alltså enhetsvektorn $\boldsymbol{e}_{AB}=(-1,-2,4)/\sqrt{21}$ och $\boldsymbol{e}_{AC}$ har samma komponenter förutom omvänt tecken på y-komponenten. Jämviktsekvationen

$$\boldsymbol{F}+m\boldsymbol{g}+S\,\boldsymbol{e}_{AB}+S\,\boldsymbol{e}_{AC}=\boldsymbol{0}$$

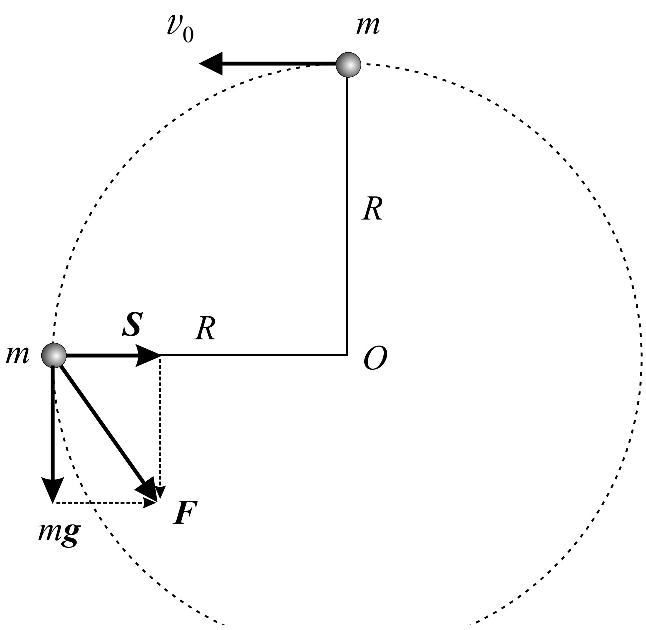
har då komponenterna,

$$(x):\quad F-S/\sqrt{21}-S/\sqrt{21}=0, \tag{3}$$

$$(z):\quad -mg+4S/\sqrt{21}+4S/\sqrt{21}=0. \tag{4}$$

Dessa ekvationer ger **Svar:** Spännkraftbeloppet är $S=\sqrt{21}mg/8$ och sedan fås $F=mg/4$.

Uppgift 2: En partikel med massa m är fäst i en tråd av längd R vars andra ände sitter fast i en fix punkt O. Med tråden sträckt och riktad vertikalt uppåt ges partikeln en horisontell fart $v_0 = \sqrt{gR}$. Beräkna beloppet av totala kraften $\boldsymbol{F}$ på partikeln när tråden blivit horisontell.



Figur 2: Systemet i Uppgift 2. Krafterna i det horisontella läget, tyngdkraften $m\boldsymbol{g}$ och spännkraften $\boldsymbol{S}$, i tråden, är utsatta.

Lösning 2: Farten v för partikeln i det horisontella läget fås med hjälp av energins bevarande,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2,$$

till,

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gR} = \sqrt{3gR},$$

då $v_0^2 = gR$. Kraftekvationen $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ i det horisontella läget, delas upp i naturliga komponenter. Då $\dot{s} = v$, och $\rho = R$, ger detta,

$$(\boldsymbol{e}_t): \quad mg = m\ddot{s}, \tag{5}$$

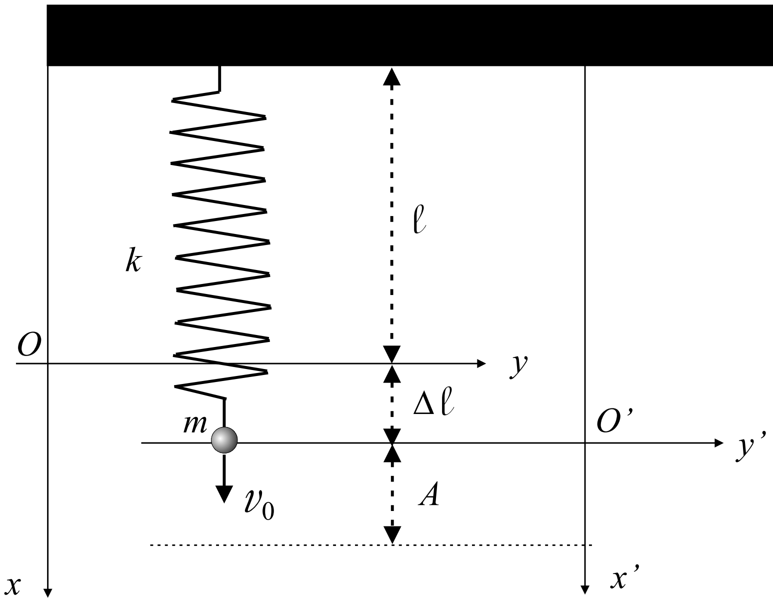
$$(\boldsymbol{e}_n): \quad S = m\frac{v^2}{R}. \tag{6}$$

Med $v = \sqrt{3gR}$ fås alltså $S = F_n = 3mg$. För beloppet av kraften fås således $F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = \sqrt{(mg)^2 + (3mg)^2}$. Detta ger

Svar:

$$F = \sqrt{10}mg$$

Uppgift 3: En partikel med massa m hänger i en lätt fjäder med styvhet k. Fjäderns naturliga längd är ℓ. Hur mycket längre är fjädern när partikeln hänger i jämvikt? När partikeln är i vila ges den plötsligt en fart v_0 nedåt. Beräkna maximala värdet för den ytterligare förlängning som fjädren får i den efterföljande rörelsen.



Figur 3: Den statiska, initiala, förlängningen betecknas $\Delta\ell$. Den maximala förlängningen i den fortsatta rörelsen är lika med amplituden A i den efterföljande svängningsrörelsen.

Lösning 3: Den statiska förlängningen ges av $F_x = 0$ dvs. $mg - k\Delta\ell = 0$, så att förlängningen i jämviktsläget är $\Delta\ell = mg/k$.

Flyttas nu origo till jämviktsläget O' blir rörelseekvationen,

$$m\ddot{x}' = -kx'.$$

Denna har den allmänna lösningen $x'(t) = A\sin(\omega_n t + \phi)$, där $\omega_n = \sqrt{k/m}$, med begynnelsevärden $x'(0) = 0$ och $\dot{x}'(0) = v_0$. Det första villkoret ger $\phi = 0$ och det andra ger då,

$$\dot{x}'(t) = A\omega_n \cos(\omega_n t),$$

att $v_0 = A\omega_n$. Detta ger den maximala ytterligare förlängningen $A = v_0/\omega_n$:

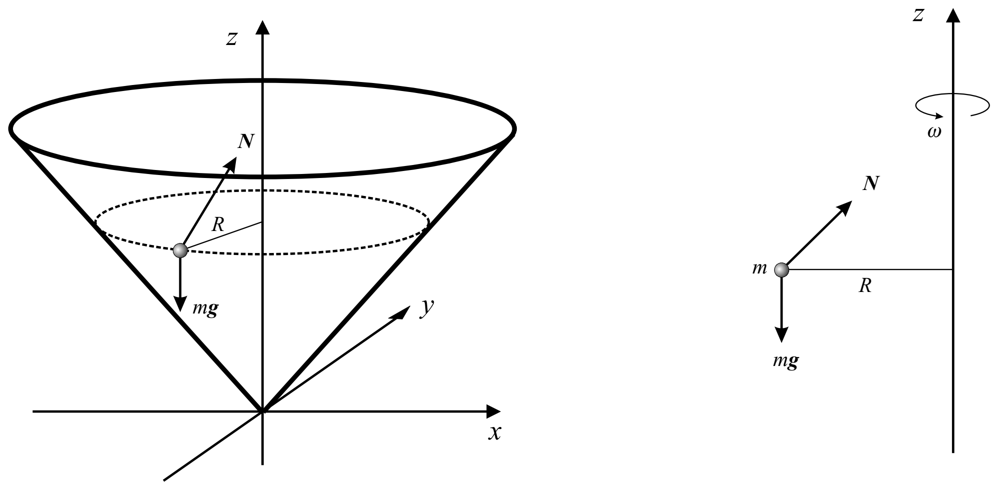
Svar: $\Delta\ell = mg/k$ respektive $A = \sqrt{m/k}\, v_0$.

Man kan även räkna ut A med hjälp av energins bevarade:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 = 0 - mgA + \frac{1}{2}k(\Delta\ell + A)^2.$$

Med $\Delta\ell = mg/k$ ger lite algebra att, $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$, vilket leder till samma svar $A = \sqrt{m/k}\, v_0$.

Uppgift 4: En partikel rör sig på insidan av en glatt kon (strut). Konens axel är vertikal och om den väljs till z-axel har konen ekvationen $z = r$, i cylinderkoordinater ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$). Toppvinkeln är alltså 90° och origo är i spetsen. Vid $t = 0$ befinner sig partikeln vid $r = R$ med $\dot{r} = 0$ och $\dot{\theta} = \omega$. Beräkna ω om banan är en cirkelbana ($r = R$ =konstant). Uttryck $\dot{r}^2$ som funktion av r om banan inte är en cirkelbana.



Figur 4: Till vänster visas en crikelbana med radien R som en streckad linje och de krafter som verkar på partikeln. Till höger illustreras krafterna i det plan som innehåller partikeln och z-axeln.

Lösning 4: Till höger i figuren ser man att, $mg - N/\sqrt{2} = 0$, och att normalkomponeneten av kraften i cirkelbanan är $F_n = N/\sqrt{2} = mg$. Cirkelbanehastigheten är ju $v = R\omega$. Med naturliga komponeneter fås då:

$$F_n = ma_n \;\Leftrightarrow\; mg = m\frac{(R\omega)^2}{R}.$$

Alltså är det första
Svaret:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Sedan noterar man att både energin $E = T + V$ och rörelsemängdsmomentets z-komponent H_z är bevarade. I det första fallet för att krafterna är konservativa och i det andra fallet för att krafterna inte har något moment M_z med avseende på z-axeln.

Vi får först att

$$H_z = mr^2\dot{\theta} = mR^2\omega = \text{konst.}$$

och sedan att

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz = E.$$

Då $z = r$ på konens yta där partikeln befinner sig är $\dot{r} = \dot{z}$ och $mgz = mgr$. Vidare ger H_z att

$$\dot{\theta} = \frac{R^2\omega}{r^2}.$$

Detta sätts in i uttrycket för E så att z, $\dot{z}$ och $\dot{\theta}$ elimineras. Begynnelsevärdena ger sedan att $E = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + mgR$. Lös ut $\dot{r}^2$. Lite räkningar [använd att $(R^2 - r^2) = (R - r)(R + r)$] ger nu

Svaret:

$$\dot{r}^2 = (R - r)\left[g - \frac{R^2\omega^2}{2r^2}(R + r)\right].$$

Teoritentamen

Uppgift 5: Formulera Newtons tre rörelselagar samt Newtons gravitationslag.

Svar: För de tre rörelselagarna, se Nybergs teoribok sidorna 165 - 168. Newtons gravitationslag är

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

där F är attraktionskraften mellan två kroppar med massorna m och M, och där r är avståndet mellan dem.

Uppgift 6: Skriv upp kinetiska energin, $T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$, för en partikel uttryckt i cylinderkoordinater och deras tidsderivator.

Svar:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

Uppgift 7: Formulera Keplers tre lagar för planetrörelse.

Svar: Se Nybergs teoribok sidan 249.

Uppgift 8: Visa att det finns tre kvalitativt olika typer av fri dämpad svängning genom att ställa upp och lösa karaktäristiska ekvationen.

Svar: Se Nybergs teoribok, sidorna 272-274.

HE 2007 05 09