Mekanik fortsättningskurs V, 5C1114, 2003 01 13 , kl 09.00-13.00

Lösningar till Problemtentamen

Uppgift 1: En stege av längden L står på ett horisontellt golv lutad mot en vertikal vägg. Stegen har börjat glida ner och dess nedre ände har farten v längs golvet. Vid en viss tidpunkt är vinkeln mellan stege och vägg θ. Vad är då stegens vinkelhastighet och dess mittpunkts hastighet (obs vektor).

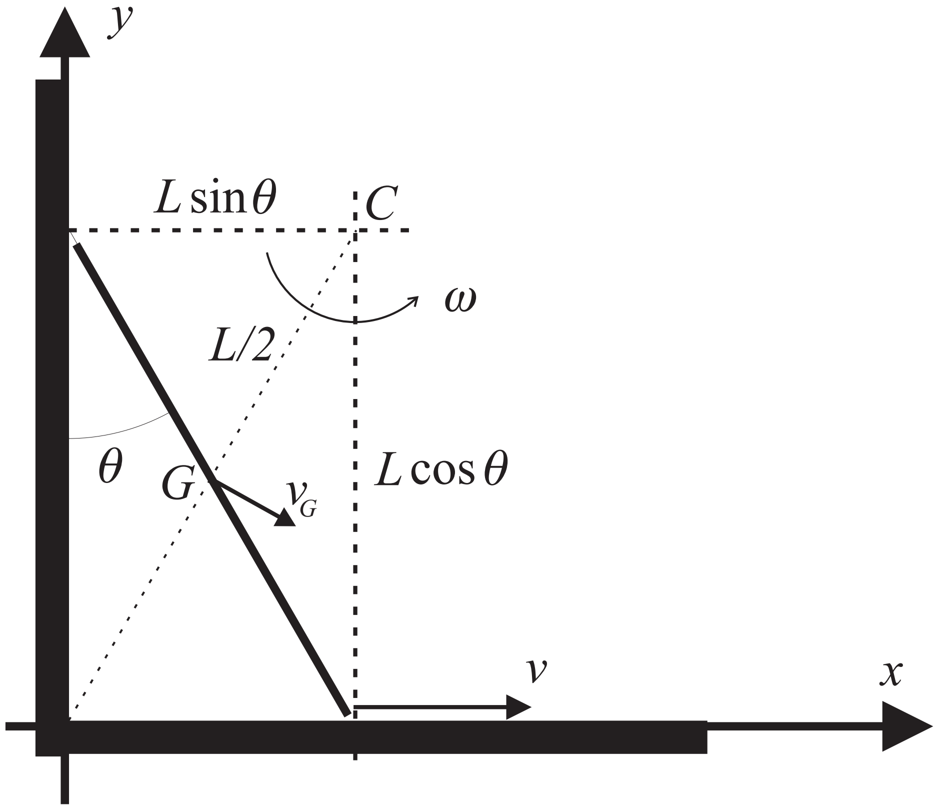

Figure 1: Bild till Lösning 1

Lösning 1: Konstruera momentancentrum C och lägg in ett koordinatsystem enligt figur. Om stegens vinkelhastighet är ω gäller att $v = L\cos\theta\,\omega$. Ur denna ekvation år vi direkt att

$$\textbf{Svar: } \omega = \frac{v}{L\cos\theta}.$$

Avståndet från momentancentrum C till stegens mittpunkt G är av enlig figuren $L/2$ så att mittpunktens fart måste ges av

$$v_G = (L/2)\omega = \frac{v}{2\cos\theta}.$$

Riktningen för mittpunktens hastighet måste vara vinkelrät mot linjen CG. Då fås ur figuren att

$$\textbf{Svar: } \boldsymbol{v}_G = \frac{v}{2\cos\theta}(\cos\theta\,\boldsymbol{e}_x - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_y),$$

är hastighetsvektorn för stegens mittpunkt.

Uppgift 2: En rät homogen cirkulär cylinder med radien R släpps från vila på ett sluttande plan, med horisontell symmetriaxel, så att den rullar ned. Planet, som bildar lutningvinkeln β med horisontalplanet, är strävt så att cylindern rullar utan att slira. Beräkna cylinderns vinkelhastighet när den rullat sträckan l längs det lutande planet.

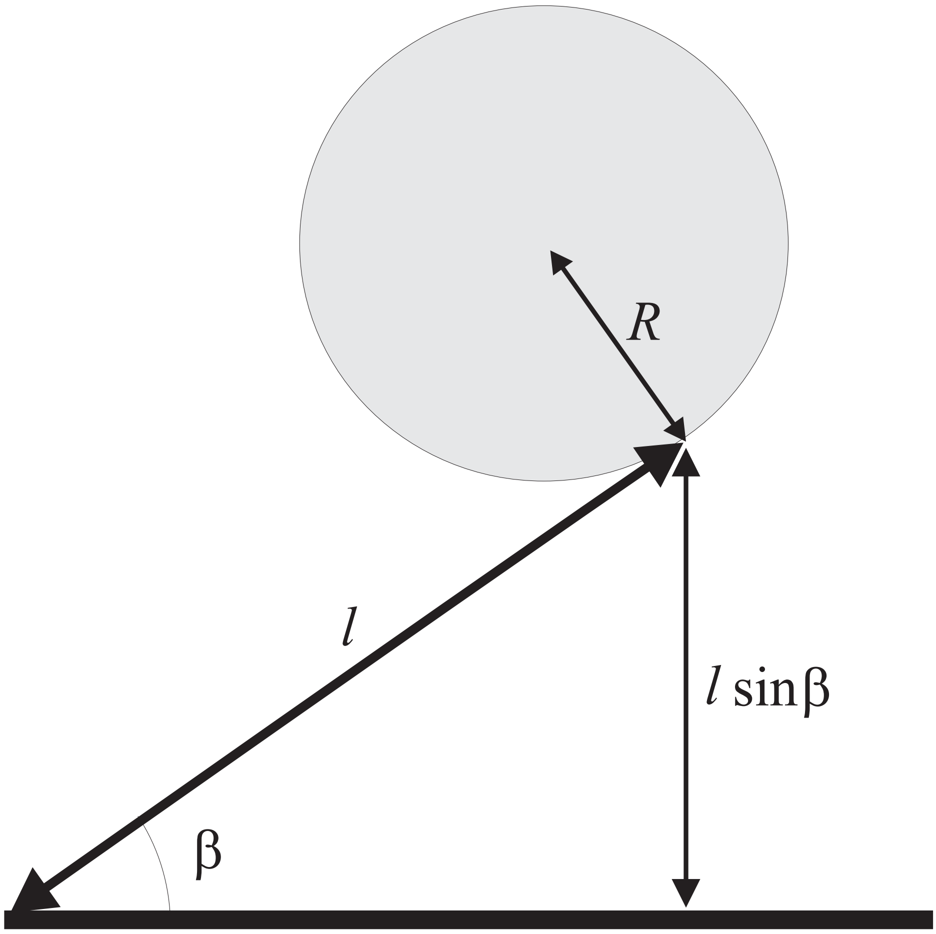

Figure 2: Bild till Lösning 2

Lösning 2: Energin är bevarad. Om potentiella energin ges nollnivå vid slutläget gäller för startläget att totala energin är $E = mgh = mgl \sin\beta$, då ju $h = l \sin\beta$ är den höjd från vilken cylindern startar, se figur, och då kinetiska energin är noll i startläget där cylindern är i vila.

Vid slutläget har denna potentiella energi omvandlats till kinetisk energi. Enligt Königs teorem ges denna av $E = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$. Tröghetsmomentet för cylindern är här $I_G = \frac{1}{2}mR^2$. Då cylindern rullar fås sambandet $v_G = R\omega$, (rullningsvillkoret). Kinetiska energin vid slutläget blir då $E = \frac{3}{4}mR^2\omega^2$. Då detta är lika med potentiella enegin i startläget får vi ekvationen

$$\frac{3}{4}R^2\omega^2 = gl \sin\beta$$

efter att ha förkortat bort massan m. Ur denna ekvation kan man lösa ut

$$\textbf{Svaret:}\ \omega = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{gl}{R^2}\sin\beta},$$

för vinkelhastigheten hos cylindern.

Uppgift 3: En homogen cirkulär plan skiva med massa m och radie R roterar fritt med vinkelhastigheten ω_0 kring en fix glatt vertikal axel genom mittpunkten. En smal homogen stav, av längd $L = 2R$ och massa $M = 3m/2$, är monterad på samma axel så att den kan rotera fritt kring sin mittpunkt i ett plan vinkelrätt mot axeln och parallellt med skivans plan. Staven kan föras längs axeln och är i vila när den försiktigt bringas i kontakt med den roterande skivan. Efter ett tag gör friktionen att skivan och staven får samma vinkelhastighet. Beräkna det arbete som friktionskraften då uträttat.

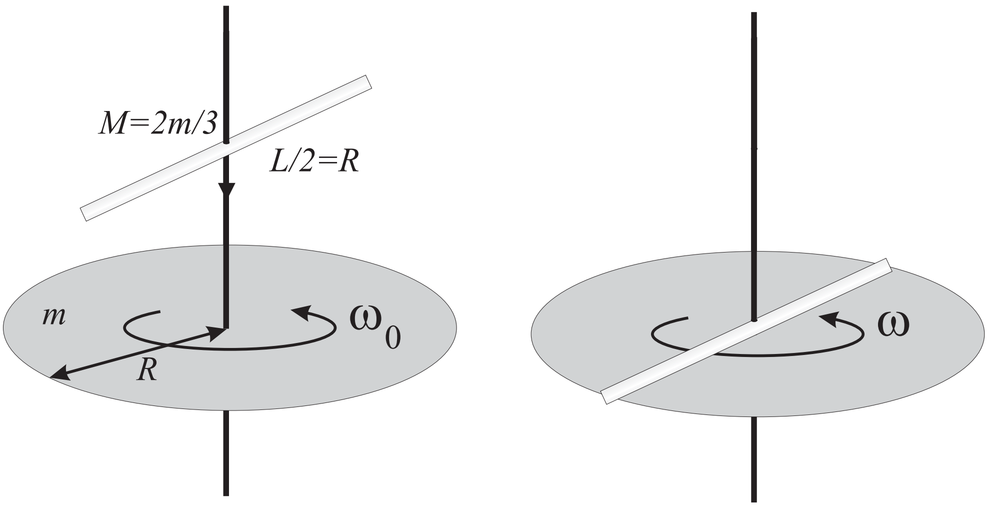

Figure 3: Bild till Uppgift 3

Lösning 3: Rörelsemängdsmomentet H med avseende på rotationsaxeln är bevarat. Kallas skivans tröghetsmoment för I_0 fås att tröghetsmomentet är $H = I_0\omega_0$. Om stavens tröghetsmoment kallas I_1 gäller till slut, när stav och skiva roterar tillsammans med gemensam vinkelhastighet ω, att $H = (I_0 + I_1)\omega$. Dessa båda ekvationer ger slutvinkelhastigheten till

$$\omega = \frac{I_0}{I_0 + I_1}\omega_0$$

. Energin är först $E_0 = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2$. När den relativa vinkelhastigheten blivit noll är energin $E_1 = \frac{1}{2}(I_0+I_1)\omega^2 = \frac{1}{2}(I_0+I_1)\left(\frac{I_0}{I_0+I_1}\omega_0\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{I_0^2}{I_0+I_1}\omega_0^2$. Skillnaden mellan E_0 och E_1 måste vara friktionskraftens arbete. Vi får $A = E_0 - E_1 = \frac{1}{2}\left(I_0 - \frac{I_0^2}{I_0+I_1}\right)\omega_0^2$. Förenkling av detta ger för friktionsarbetet

$$A = E_0 - E_1 = \frac{1}{2}\frac{I_0 I_1}{I_0 + I_1}\omega_0^2.$$

Vi har nu att $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$ och, med angivna värden för stavens massa och längd fås $I_1 = \frac{1}{12}ML^2 = \frac{1}{12}\frac{3m}{2}(2R)^2 = \frac{1}{2}mR^2 = I_0$. Alltså blir

$$\textbf{Svaret: } A = \frac{1}{4}I_0\omega_0^2,$$

där $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$. Halva ursprungliga (kinetiska) energin har alltså försvunnit.

Uppgift 4: En homogen plan kvadratisk skiva med massan m och sidan a ligger på ett glatt horisontalplan. Skivan är från början i vila. Lägg in ett koordinatsystem så att skivans ena hörn ligger i origo och axlarna är parallella med skivans sidor. Skivan träffas nu av ett slag i origo som ger den en stötimpuls, $\boldsymbol{S}$, av belopp S och parallell med x-axeln: $\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{e}_x$. Beräkna vinkelhastighet, masscentrums hastighet samt kinetiska energin för skivan.

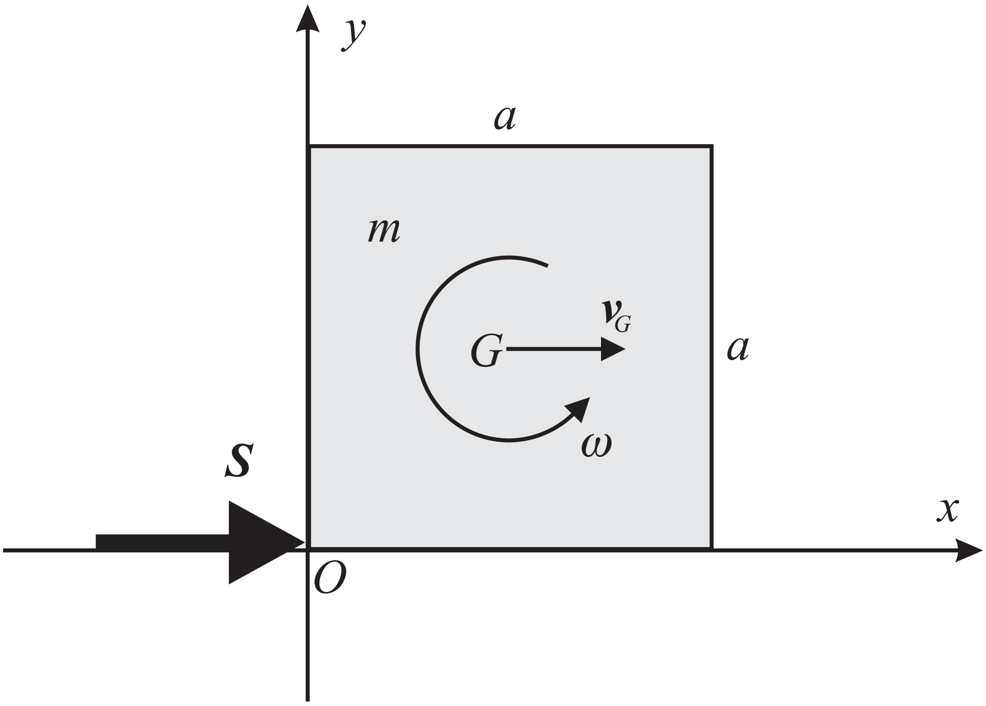

Figure 4: Bild till Uppgift 4

Lösning 4: Impulsen $\mathbf{S}$ är ändringen i rörelsemängd så att vi får

$$\boldsymbol{p}_{\text{efter}} - \boldsymbol{p}_{\text{före}} = m\boldsymbol{v}_G - \mathbf{0} = \mathbf{S}$$

Härur fås direkt att

$$\textbf{Svar: } \boldsymbol{v}_G = \frac{\mathbf{S}}{m} = \frac{S}{m}\boldsymbol{e}_x.$$

För rotationen kan vi använda att impulsmomentet med avseende på masscentrum G är

$$H_{Gz\,\text{efter}} - H_{Gz\,\text{före}} = I_G\omega - 0 = \frac{a}{2}S.$$

Här är $a/2$ momentarmen för impulsen. Impulsmomentets z-komponent är alltså

$$(\overline{GO} \times \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{e}_z = \frac{a}{2}S$$

Då tröghetsmomentet är $I_G = \frac{1}{6}ma^2$ fås nu

$$\textbf{Svar: } \omega = \frac{3}{a}\frac{S}{m},$$

för vinkelhastigheten.

Kinetiska energin fås med Königs teorem till $T = \frac{1}{2}m\left(\frac{S}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{6}ma^2\left(\frac{3}{a}\frac{S}{m}\right)^2$ så svaret blir

$$\textbf{Svar: } T = \frac{15}{12}\frac{S^2}{m}.$$

HE 03 01 13 (Mek fk V)