Mekanik II, 5C1140, 2005 03 30, kl 09.00-13.00
Lösningar till Problemtentamen

Uppgift 1: I en lagerring med ytterradie $6R$ och innerradie $5R$ finns kulor, alla med radierna R, som rullar mellan lagerringen och en inre cylinder vars radie är $3R$. Lagerringen rullar på ett horisontellt underlag så att dess mittpunkt har farten v, åt höger enligt figuren. Den inre cylindern har vinkelhastigheten Ω medurs enligt figuren. Bestäm vinkelhastigheten för en kula i lagret.

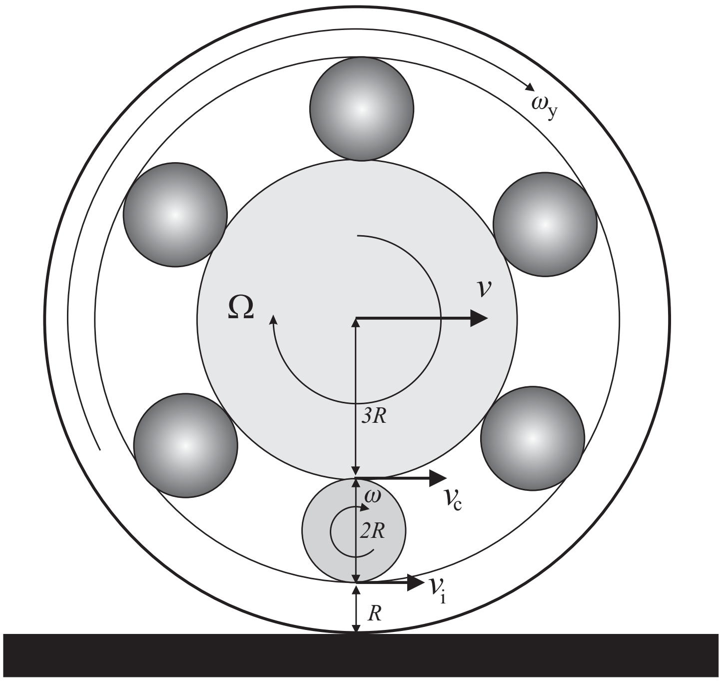

Figure 1: Bild till Lösning 1. Visar några storheter som används i beräkningarna.

Lösning 1: Vi betraktar den nedersta kulan och inför beteckningar:
Ω = inre cylinderns vinkelhastighet (given),
ω_y = lagerringens vinkelhastighet,
ω = kulans vinkelhastighet (sökt).
Dessa betraktas alla som positiva medurs (ett negativt värde betyder alltså rotation moturs). Vidare är:
v = (gemensamma) mittpunktsfarten för lagerringen och inre cylindern,
v_c = farten för kulans övre kontaktpunkt med inre cylindern,
v_i = farten för kulans nedre kontaktpunkt med lagerringens innerradie.
Vi betraktar dessa som positiva åt höger (så ett negativt värde betyder rörelse åt vänster).

Sambandsformelns relevanta komponent i det plana fallet ger då, på grund av rullningsvillkoren: $\omega_y = \frac{v}{6R}$, $v_i = R\omega_y = \frac{v}{6}$, $v_c = v - 3R\Omega$, och

$$v_i + 2R\omega = v_c.$$

Insättning ger nu att $(v/6) + 2R\omega = v - 3R\Omega$. Löses ω ur detta fås

Svar:

$$\omega = \frac{5}{12}\frac{v}{R} - \frac{3}{2}\Omega.$$

Uppgift 2: Ett cirkulärt hjul kan betraktas som bestående av en tunn cirkulär fälg, med radien R och massan $3m$, som är förenad med ett lätt nav via tre ekrar i form av tunna stavar, vardera med massan m och längden R. Hjulet kan rulla rakt ned för ett strävt sluttande plan. Planet bildar vinkeln α med horisontalplanet. Hjulet släpps från vila. Vilken fart har dess nav när det rullat sträckan $4\pi R$ (två varv)?

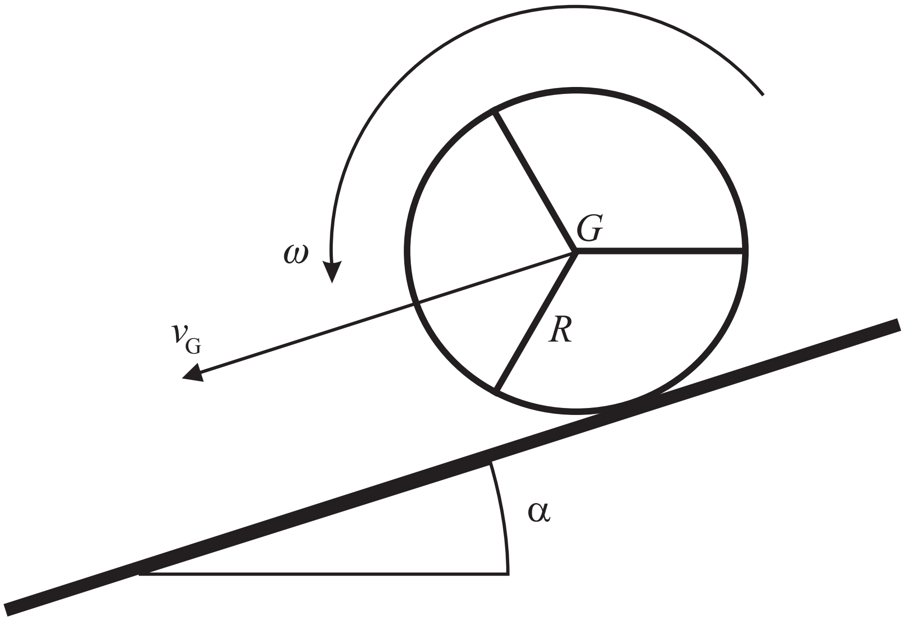

Figure 2: Bild till Lösning 2. Då hjulet rullar är sambandet mellan navets (mittpunktens) fart och vinkelhastigheten $R\omega = v_G$.

Lösning 2: Notera att totala massan är $6m$. Energin är bevarad och ges av $T = 0$ och

$$V = (6m)gh = 6mg4\pi R \sin\alpha$$

i startläget (översta läget).

Efter rullning sträckan $4\pi R$ är $V = 0$ och $T = (1/2)6mv_G^2 + (1/2)I_G\omega^2$. Eftersom tröghetsmomentet är (ring, massa $3m$, plus tre stavar, massa m)

$$I_G = 3mR^2 + 3\frac{1}{3}mR^2 = 4mR^2$$

och $\omega = v_G/R$ fås då att

$$T = 3mv_G^2 + 2mR^2(v_G/R)^2 = 5mv_G^2.$$

Energins bevarande ger alltså att

$$5mv_G^2 = 24\pi Rmg \sin\alpha,$$

så att,

Svar: farten för navet är

$$v_G = \sqrt{\frac{24}{5}\pi Rg \sin\alpha}.$$

Uppgift 3: En pendel består av en smal stång lagrad i en kulled i övre änden. Stången har längd L och massa $3m$. Stången är i vila när den träffas av en liten kittklump i sin nedre ände. Kittklumpen, vars massa är m, har horisontell hastighet just innan den träffar pendeln, som den klibbar fast på. I den efterföljande rörelsen svänger pendeln upp vinkeln 90 grader, så att den blir horisontell, innan den vänder. Beräkna kittklumpens fart just före träffen.

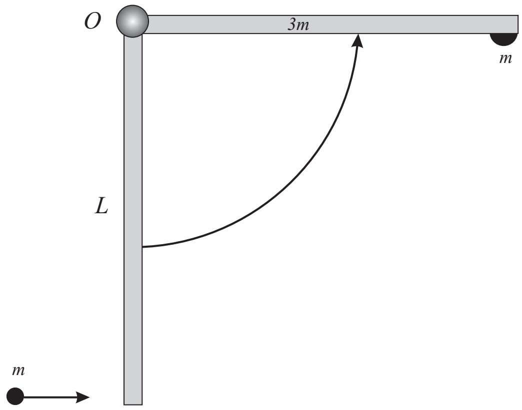

Figure 3: Bild till Uppgift 3. Detta är en så kallad ballistisk pendel.

Lösning 3: Vi stötförloppet är rörelsemängdsmomentet H_{Oz}, med avseende på kulleden, bevarat. Detta ger för situationen just före stöten respektive just efter stöten:

$$Lmv = I_O\omega.$$

Tröghetsmomentet är ju

$$I_O = \frac{1}{3}3mL^2 + mL^2 = 2mL^2$$

med kittklumpen, massa m, längst ut på staven, massa $3m$. Sambandet mellan v och ω är då $v = I_O\omega/mL = 2L\omega$.

När kittklumpen väl fastnat är energin bevarad så den kinetiska energin i startläget

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

övergår till ren potentiell energi

$$V = 3mg\frac{L}{2} + mgL = \frac{5}{2}mgL$$

i det översta läget. Alltså är

$$\frac{1}{2}2mL^2\omega^2 = \frac{5}{2}mgL$$

så $\omega^2 = \frac{5}{2}\frac{g}{L}$ och således fås att
Svar: farten hos klumpen är

$$v = \sqrt{10gL}.$$

Uppgift 4: Ett smalt glatt *horisontellt* rör roterar fritt kring en vertikal axel genom sin mittpunkt. Röret har längden $2L$ och massan $4m$. Från början är rörets vinkelhastighet Ω. I rörets mittpunkt ligger en liten kula med massan m. En liten störning gör att denna börjar glida utåt längs röret. Beräkna rörets vinkelhastighet just innan kulan lämnar röret.

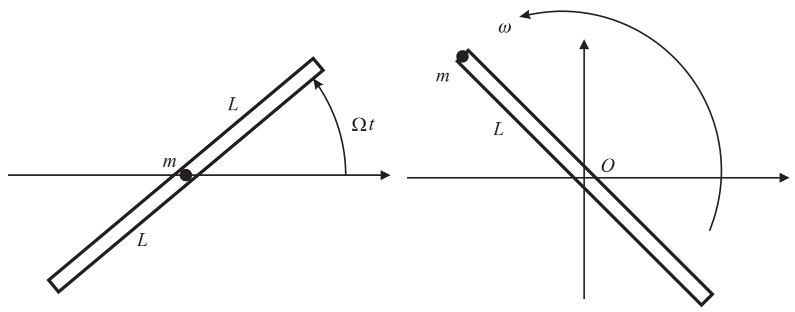

Figure 4: Bild till Lösning 4. Startläget respektive slutläget visas.

Lösning 4: Då röret kan rotera fritt är rörelsemängdsmomentet H_{zO} bevarat. I startläget gäller att

$$H_{zO} = \frac{1}{12}(4m)(2L)^2\Omega = \frac{4}{3}mL^2\Omega.$$

I slutläget när kulan ligger på avståndet L från rotationsaxeln fås

$$H_{zO} = \left(\frac{4}{3}mL^2 + mL^2\right)\omega = \frac{7}{3}mL^2\omega.$$

Sätter man de båda rörelsemängdsmomenten lika får man lätt att

Svar: rörets vinkelhastighet är

$$\omega = \frac{4}{7}\Omega.$$

Svar till Teoritentamen, Mek II, 5C1140, 2005 03 30

Uppgift 5: besvaras av $v_{Ar} = v_{Br}$ och $v_{A\theta} = v_{B\theta} + r\omega$ (se Nyberg sid. 41).

Uppgift 6: besvaras av Nyberg sid. 16.

Uppgift 7: besvaras av Nyberg sid. 71-72.

Uppgift 8: $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ är pekar rakt inåt i jorden, d.v.s rakt ner. Minustecknet gör då att man får **Svar**: rakt upp.

HE 05 03 30 (Mek II)