

Vektorbegreppet

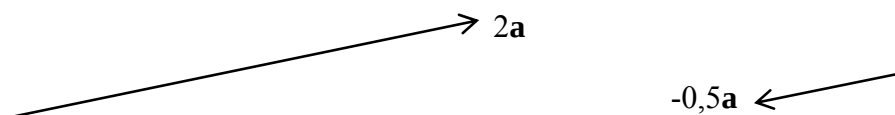
I fysiken använder man sig av samband (formler) mellan fysikaliska storheter. En *storhet* är en egenskap som kan mätas eller beräknas.

Vissa storheter har enbart storlek; en sådan storhet kallas *skalär*. Andra storheter har både storlek och riktning; en sådan storhet kallas *vektor*.

Vektorer kan betecknas på några olika sätt; med fet symbol: $\mathbf{a}$, med pil över symbolen: $\vec{a}$, med streck över symbolen: $\overline{a}$ eller med streck under symbolen: $\underline{a}$. I fortsättningen använder vi fet symbol: $\mathbf{a}$.

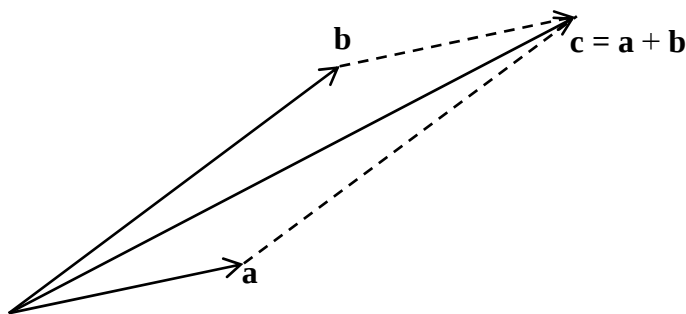


En vektor kan multipliceras med ett reellt tal, varvid den blir lika många gånger större:



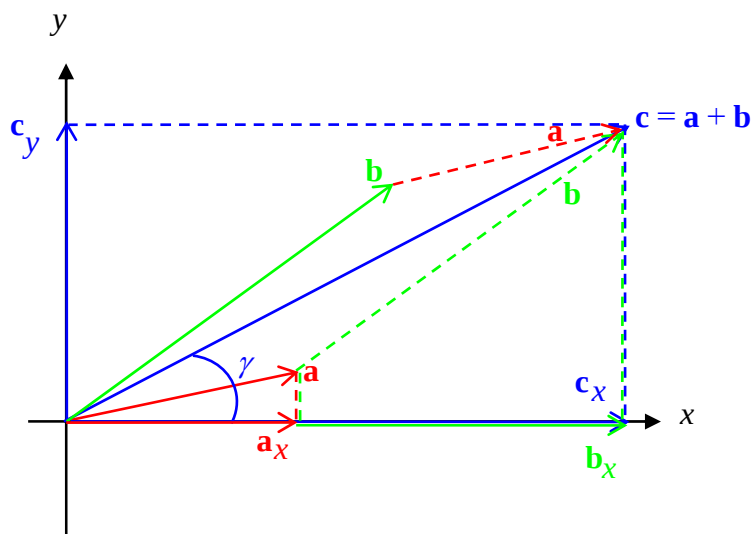
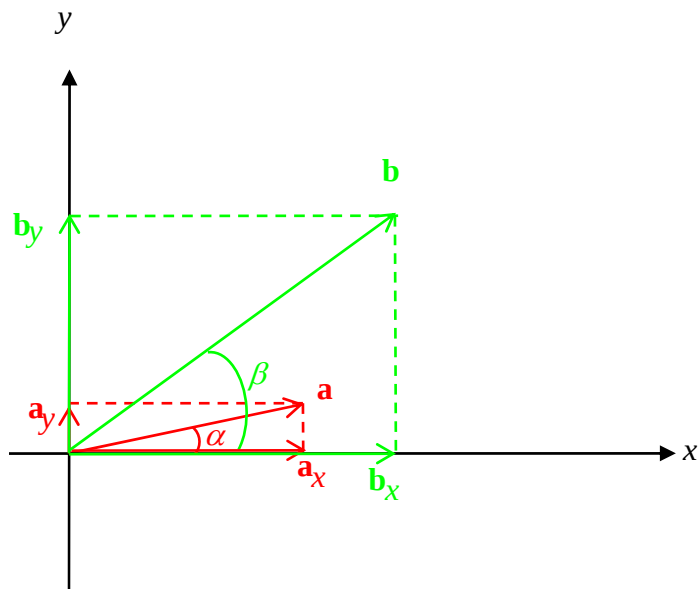
Resultant och komposant

Krafter som verkar i samma punkt kan sammansättas till en *resultant*. En kraft som ligger till grund för en sådan sammansättning kallas *komposant*:



Ovan är således $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ komposanter samt $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ resultant.

Omvänt kan en kraft uppdelas i komposanter. En speciellt användbar uppdelning får man om man använder *rätvinkliga komposanter*: I fortsättningen behandlar vi enbart vektorer i xy -planet, dvs i två dimensioner, men det är naturligt att utveckla vektorbegreppet till tre dimensioner (i rummet) och även till ännu högre dimensioner. Vi kommer att använda oss av den tredje dimensionen (z) i samband med moment.



$$\mathbf{a} = a_x + a_y \quad \mathbf{b} = b_x + b_y \quad \mathbf{c} = c_x + c_y = (a_x + b_x) + (a_y + b_y)$$

Längd (belopp) av vektor, enhetsvektor

Vi inför nu *längden* (eller *beloppet*) a av vektorn **a** som $a = |\mathbf{a}|$.

Inför nu också enhetsvektorerna $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$. Dessa har egenskapen att deras längd är 1 och att de är parallella med x- resp y-axeln: $|\mathbf{e}_x| = 1$ och $|\mathbf{e}_y| = 1$.

Komponenter

Samtidigt inför vi *komponenten* a_x av vektorn $\mathbf{a}$ som projektionen av vektorn $\mathbf{a}$ på x-axeln som

$$a_x = a \cos \alpha.$$

På motsvarande sätt införs *komponenten* a_y av vektorn $\mathbf{a}$ som projektionen av vektorn $\mathbf{a}$ på y-axeln som $a_y = a \sin \alpha$.

Observera att följande gäller:

$$\alpha = 0: \quad \sin \alpha = 0 \quad \cos \alpha = 1$$

$$0 < \alpha < \pi/2: \quad \sin \alpha > 0 \quad \cos \alpha > 0$$

$$\alpha = \pi/2: \quad \sin \alpha = 1 \quad \cos \alpha = 0$$

$$\pi/2 < \alpha < \pi: \quad \sin \alpha > 0 \quad \cos \alpha < 0$$

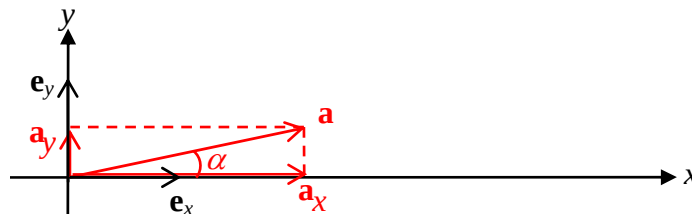
$$\alpha = \pi: \quad \sin \alpha = 0 \quad \cos \alpha = -1$$

$$\pi < \alpha < 3\pi/2: \quad \sin \alpha < 0 \quad \cos \alpha < 0$$

$$\alpha = 3\pi/2: \quad \sin \alpha = -1 \quad \cos \alpha = 0$$

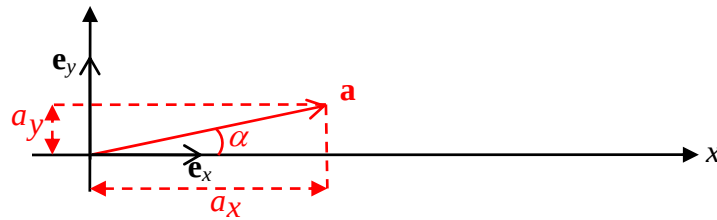
$$3\pi/2 < \alpha < 2\pi: \quad \sin \alpha < 0 \quad \cos \alpha > 0$$

$$\alpha = 2\pi = 0$$



Vi ser då att $\mathbf{a}_x = a_x \mathbf{e}_x = a \cos \alpha \mathbf{e}_x$ och $\mathbf{a}_y = a_y \mathbf{e}_y = a \sin \alpha \mathbf{e}_y$

Komponenten $\mathbf{a}_x$ kan således uttryckas med hjälp av komponenten a_x och enhetsvektorn $\mathbf{e}_x$ som också använd på detta sätt brukar kallas *basvektor*. Motsvarande gäller för komponenten $\mathbf{a}_y$.



Vi kan alltså skriva vektorn **a**:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y = a \cos\alpha \mathbf{e}_x + a \sin\alpha \mathbf{e}_y$$

Om vi alltid räknar vinkeln positiv moturs från x-axeln hamnar den i vårt fall för vektorn **b** så att sinus för vinkeln blir < 0 medan cosinus för vinkeln > 0 .

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_x + \mathbf{b}_y = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y = b \cos\beta \mathbf{e}_x + b \sin\beta \mathbf{e}_y$$

Således får vi

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_x + \mathbf{c}_y = c_x \mathbf{e}_x + c_y \mathbf{e}_y = c \cos\gamma \mathbf{e}_x + c \sin\gamma \mathbf{e}_y = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y = a_x \mathbf{e}_x + b_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + b_y \mathbf{e}_y =$$

$$= (a_x + b_x) \mathbf{e}_x + (a_y + b_y) \mathbf{e}_y = (a \cos\alpha + b \cos\beta) \mathbf{e}_x + (a \sin\alpha + b \sin\beta) \mathbf{e}_y$$

Således är

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_x + \mathbf{c}_y = (\mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x) + (\mathbf{a}_y + \mathbf{b}_y)$$

$$\mathbf{c}_x = \mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x \quad \mathbf{c}_y = \mathbf{a}_y + \mathbf{b}_y$$

$$c_x = a_x + b_x \quad c_y = a_y + b_y$$

$$c \cos\gamma = a \cos\alpha + b \cos\beta \quad c \sin\gamma = a \sin\alpha + b \sin\beta$$

I stället för att skriva ut basvektorerna $\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y$ eller $\mathbf{a} = a \cos\alpha \mathbf{e}_x + a \sin\alpha \mathbf{e}_y$ så skriver man kortare $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ eller $\mathbf{a} = (a \cos\alpha, a \sin\alpha)$ med kommatecken mellan komponenterna.

Vid heltal har man inga problem: $\mathbf{a} = (5, 7) \text{ m/s}^2$ men vid decimaltal byter man ut kommatecknet mot semikolon: $\mathbf{a} = (4,2; 3,8) \text{ m/s}^2$

Nollvektorn

Nollvektorn $\mathbf{0} = (0, 0)$ har längden 0. Den är den enda vektor som saknar riktning.