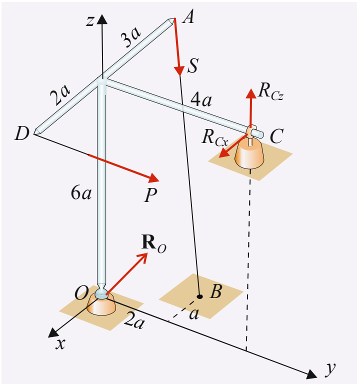
Institutionen för Mekanik
Nicholas Apazidis
tel: 790 7148
epost: nap@mech.kth.se
hemsida: http://www.mech.kth.se/~nap/

SG1112-20190601

Lösningar



1) Bestäm $\mathbf{S}$:s riktning

$A(-3a,0,6a)$, $B(-a,2a,0)$, $C(0,4a,6a)$,

$$D(2a,0,6a)\ ,\ \mathbf{e}_{AB}=\frac{(1,1-3)}{\sqrt{11}}\ ,\ \mathbf{e}_{OC}=\frac{(0,2,3)}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{S}=S\mathbf{e}_{AB}=\frac{S}{\sqrt{11}}(1,1,-3)\ ,.$$

2) Formulera momentekvationen med avs. på O,

$$\mathbf{M}_O=\mathbf{r}_{OB}\times\mathbf{S}+\mathbf{r}_{OC}\times\mathbf{R}_C+\mathbf{r}_{OD}\times P\mathbf{e}_y=\mathbf{0}$$

Eliminera reaktionskraften i C genom att ta momentjämvikten med avseende på axeln OC:

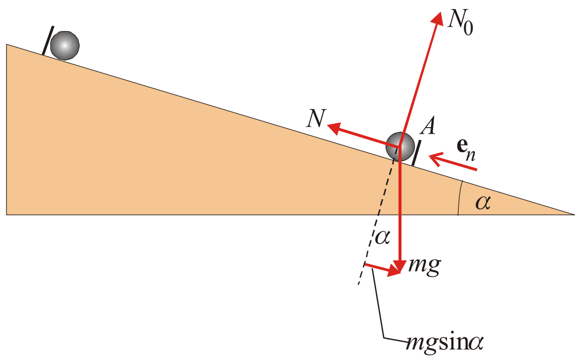
$$\mathbf{M}_O\cdot\mathbf{e}_{OC}=\mathbf{r}_{OB}\times\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_{OC}+\mathbf{r}_{OD}\times P\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_{OC}=\mathbf{0}\quad\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ -a & 2a & 0\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}\frac{S}{\sqrt{11}}\cdot\frac{(0,2,3)}{\sqrt{13}}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 2a & 0 & 6\\ 0 & P & 0\end{vmatrix}\cdot\frac{(0,2,3)}{\sqrt{13}}=0\quad\Rightarrow$$

$$(-6a,-3a,-3a)\cdot(0,2,3)\frac{S}{\sqrt{11}}+(-6aP,0,2aP)\cdot(0,2,3)=0\quad\Rightarrow$$

$$-\frac{15}{\sqrt{11}}Sa+6aP=0\quad\Rightarrow\quad S=\frac{6\sqrt{11}}{15}P=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{11}}{5}P}}$$

2)



1) Formulera kraftekvationen i normalriktningen i A,

$$\mathbf{e}_n:\quad m\frac{v_A^2}{R}=N-mg\sin\alpha$$

$$\Rightarrow\quad N=mg\sin\alpha+m\frac{v_A^2}{R}.$$ Normalkrafterna från skenan i början och efter ett varv i A blir:

$$N_1=mg\sin\alpha+m\frac{v_1^2}{R}\ ,\ N_2=mg\sin\alpha+m\frac{v_2^2}{R}\ ,$$

där $v_1=v$ och v_2 är farten i A efter ett varv.

2) Bestäm sambandet mellan v_1 och v_2. Vi har $N_1=2N_2$, vilket ger

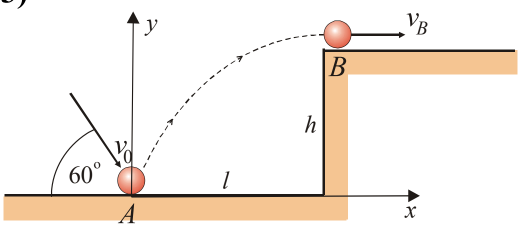
$$mg\sin\alpha+m\frac{v_1^2}{R}=2mg\sin\alpha+2m\frac{v_2^2}{R}\quad\Rightarrow\quad v_2^2=\frac{1}{2}v_1^2-\frac{1}{2}gR\sin\alpha$$

3) Använd lagen om den kinetiska energin och beräkna friktions arbete. Obs att tyngdkraftens arbete är noll från A till A. Vi har:

$$U_{1-2}=T_2-T_1=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}m\left[\frac{1}{2}v_1^2-\frac{1}{2}gR\sin\alpha-v_1^2\right]=\underline{\underline{-\frac{m}{4}\left[v^2+gR\sin\alpha\right]}}$$ eftersom

$$v_1=v$$

3)



1) Partikelns rörelsemängd i horisontella riktningen bevaras

$$\rightarrow: \quad v_0 \cos 60° = v'\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v'\cos\alpha = \frac{1}{2}v_0 \qquad (1)$$

Hastigheten i den vertikala riktningen ändras och fås med hjälp av studstalet. Beteckna partikeln med index 1 och golvet med 2:

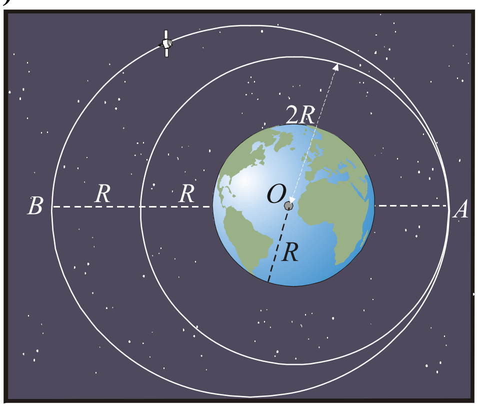
$$\uparrow: \quad e = \frac{v'_{2y} - v'_{1y}}{v_{1y} - v_{2y}} = \frac{0 - v'\sin\alpha}{-v_0 \sin 60° - 0} = \frac{v'\sin\alpha}{v_0 \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v'\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}v_0 \qquad (2)$$

2) Betrakta nu rörelsen efter stöten, som är en vanlig kastparabel

$$\begin{cases} \rightarrow: & \ddot{x} = 0 \\ \uparrow: & \ddot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = c_1 = \dfrac{1}{2}v_0 \\ \dot{y} = c_2 - gt = \dfrac{\sqrt{3}}{4}v_0 - gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}v_0 t \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}, \ \dot{y} = 0 \text{ ger } t_1 \text{ för punkten } B$$

Vi får $t_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{v_0}{g}$ och $l = x(t_1) = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{8}\dfrac{v_0^2}{g}}}$ samt $h = y(t_1) = \underline{\underline{\dfrac{3}{32}\dfrac{v_0^2}{g}}}$

4)



1) Bestäm först rymdfarkostens hastighet på den cirkulära banan med hjälp av kraftekvationen

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{v_{A,cirk}^2}{2R} = G\frac{mM}{(2R)^2} \quad \Rightarrow v_{A,cirk}^2 = \frac{GM}{2R} = \frac{gR}{2}$$

Farkostens energi på den cirkulära banan blir

$$E_{cirk} = T_{cirk} + V_{cirk} = \frac{1}{4}mgR - G\frac{mM}{2R} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)mgR =$$

$$= -\frac{1}{4}mgR \quad (1)$$

2) Betrakta nu den elliptiska banan. Rörelsemängdsmomentets bevarande ger

$$OA\, v_A = OB\, v_B \quad \Rightarrow \quad 2R\, v_A = 3R\, v_B \quad \Rightarrow \quad v_A = \frac{3}{2}v_B \qquad (2)$$

3) Energiekvationen ger

$$T_A + V_A = T_B + V_B \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_A^2 - mg\frac{R^2}{2R} = \frac{1}{2}mv_B^2 - mg\frac{R^2}{3R} \quad \Rightarrow \quad v_A^2 - v_B^2 = 2gR\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}gR$$

vilket tillsammans med (2) ger

$\dfrac{5}{4}v_B^2 = \dfrac{1}{3}gR \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = \dfrac{4}{15}gR$ och energin på den elliptiska banan blir

$$E_{ell} = \frac{1}{2}mv_B^2 - mg\frac{R^2}{3R} = \frac{1}{2}\frac{4}{15}mgR - \frac{1}{3}mgR = -\frac{1}{5}mgR$$

Vilket slutligen ger energikvoten

$$\underline{\underline{\frac{E_{ell}}{E_{cirk}} = \frac{4}{5}}}$$