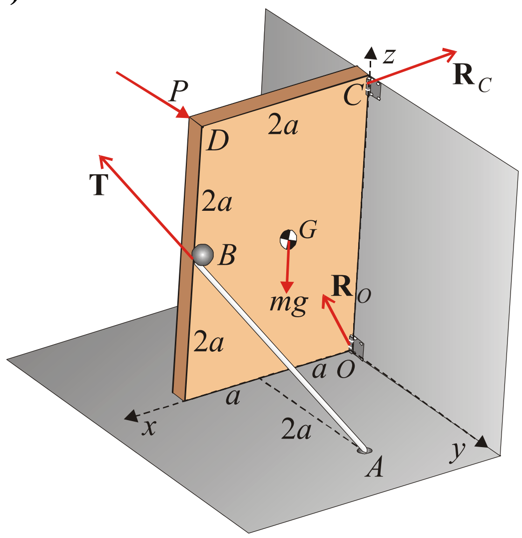
Institutionen för Mekanik
Nicholas Apazidis
tel: 790 7148
epost: nap@mech.kth.se
hemsida: http://www.mech.kth.se/~nap/

Lösningar till SG1112 Mekanik I

1)



1) Bestäm $\mathbf{T}$:s riktning

$$A(a,2a,0)\,,\; B(2a,0,2a) \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_{AB}=(a,-2a,2a)$$

$$\mathbf{e}_{AB}=\frac{(1,-2,2)}{3}\,,\;\text{ vilket ger }\; \mathbf{T}=\frac{T}{3}(1,-2,2)\,.$$

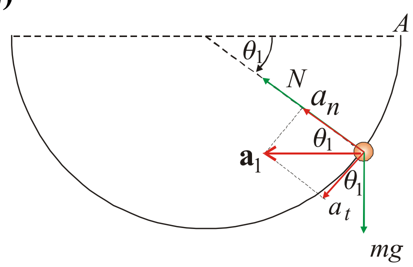
2) Formulera momentekvationen med avs på *O*,

$$\mathbf{M}_O=\mathbf{r}_{OB}\times\mathbf{T}+\mathbf{r}_{OG}\times m\mathbf{g}+\mathbf{r}_{OD}\times\mathbf{P}+\mathbf{r}_{OC}\times\mathbf{R}_C=\mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 2a & 0 & 2a\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}\frac{T}{3}+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ a & 0 & 2a\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}mg+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 2a & 0 & 4a\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}P+$$

$$+\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 0 & 0 & 4a\\ R_{Cx} & R_{Cy} & R_{Cz}\end{vmatrix}=\mathbf{0}\;\Rightarrow\;\begin{cases}\mathbf{e}_x: & \dfrac{4aT}{3}-4aP-4aR_{Cy}=0\\ \mathbf{e}_y: & -\dfrac{2aT}{3}+mga+4aR_{Cx}=0\\ \mathbf{e}_z: & -\dfrac{4aT}{3}+2aP=0\end{cases}\;\Rightarrow\;\begin{cases}\underline{\underline{R_{Cy}=-\dfrac{P}{2}}}\\ \underline{\underline{R_{Cx}=\dfrac{P-mg}{4}}}\\ \underline{\underline{T=\dfrac{3}{2}P}}\end{cases}$$

2)



1) Betrakta vagnen i punkten där dess totala acceleration är horisontell. Vi får

$$\tan\theta_1=\frac{a_t}{a_n}=\frac{\dot{v}_1}{v_1^2/R}=\frac{\dot{v}_1R}{v_1^2}\qquad(1)$$

2) Bestäm v_1 och $\dot{v}_1$ med hjälp av t ex kraftekvationen

$$\mathbf{e}_t:\quad m\dot{v}=mg\cos\theta\;\Rightarrow\;\dot{v}=g\cos\theta\;\Rightarrow\;vdv=gR\cos\theta d\theta\;\Rightarrow\;\frac{v^2}{2}=gR\sin\theta+\underbrace{C}_{0}$$

Vilket för $\theta=\theta_1$ ger $\dot{v}_1=g\cos\theta_1$ samt $v_1^2=2gR\sin\theta_1$

Alternativt kan denna hastighet bestämmas m h a energiekvationen

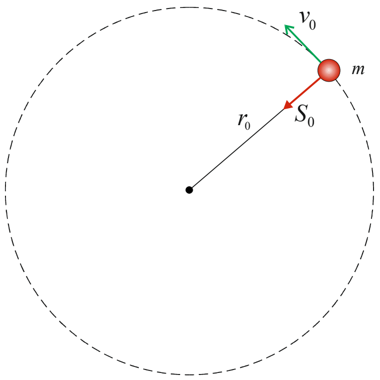
$$T_0+V_0=T_1+V_1\;\Rightarrow\;0+0=\frac{1}{2}mv_1^2-mgR\sin\theta_1\;\Rightarrow\;v_1^2=2gR\sin\theta_1$$

3) Insättning av dessa uttryck i (1) ger

$$\tan\theta_1=\frac{\dot{v}_1R}{v_1^2}=\frac{gR\cos\theta_1}{2gR\sin\theta_1}\;\Rightarrow\;\tan^2\theta_1=\frac{1}{2}\;\Rightarrow\;\underline{\underline{\tan\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

Från figuren fås att $\cos\theta_1=\dfrac{a_n}{a_1}\;\Rightarrow\;a_1=\dfrac{a_n}{\cos\theta_1}=\dfrac{2g\sin\theta_1}{\cos\theta_1}=2g\tan\theta_1=\dfrac{2g}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{\sqrt{2}g}}$

3)



1) Kraftekvationen i normalriktningen ger

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{v_0^2}{r_0} = S_0, \quad m\frac{v_1^2}{r_1} = 2S_0 \quad (1)$$

2) Rörelsemängdsmomentet bevaras, vilket ger

$$r_0 v_0 = r_1 v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{r_0}{r_1} v_0 \qquad (2)$$

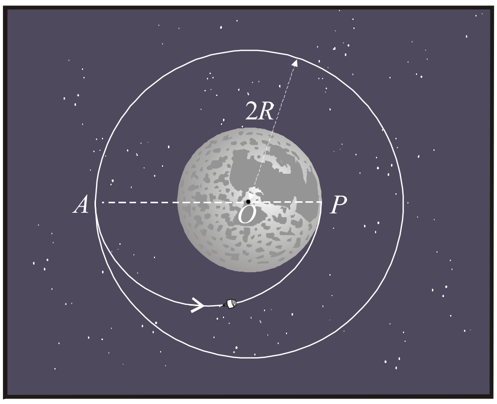
3) Ekvationerna (1) och (2) tillsammans ger

$$\frac{v_1^2}{r_1} = 2\frac{v_0^2}{r_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_0^2}{r_1^3} v_0^2 = 2\frac{v_0^2}{r_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_0}{r_1} = 2^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r_0 = \frac{r_1}{2^{1/3}}}}$$

4) Låt oss slutligen bestämma arbetet

$$U_{0-1} = T_1 - T_0 = \frac{m}{2}\left(v_1^2 - v_0^2\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{r_0^2}{r_1^2} - 1\right)v_0^2 = \underline{\underline{\frac{m}{2}\left(2^{2/3} - 1\right)v_0^2}}$$

4)



1) Bestäm först rymdfarkostens hastighet på den cirkulära banan med hjälp av kraftekvationen

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{v_{cirk}^2}{2R} = G\frac{mM}{(2R)^2} \quad \Rightarrow$$

$$v_{cirk} = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \sqrt{\frac{g_0 R}{2}} \qquad (1)$$

där vi har använt att

$$mg_0 = G\frac{mM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad GM = g_0 R^2$$

2) Betrakta nu den elliptiska banan från A till P. Rörelsemängdsmomentets bevarande ger

$$OA\, v_A = OP\, v_P \quad \Rightarrow \quad 2R\, v_A = R\, v_P \quad \Rightarrow \quad v_P = 2v_A \qquad (2)$$

3) Energiekvationen ger

$$T_A + V_A = T_P + V_P \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_A^2 - mg_0\frac{R^2}{2R} = \frac{1}{2}mv_P^2 - mg_0\frac{R^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_P^2 - v_A^2 = 2g_0 R\left(1 - \frac{1}{2}\right) = g_0 R$$

vilket tillsammans med (2) ger

$$3v_A^2 = g_0 R \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{g_0 R}{3}} \quad \Rightarrow \quad v_A < v_{cirk}$$

$v_{rel} = v_{cirk} - v_A = \underline{\underline{\sqrt{g_0 R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}}$ och är parallell men *motriktad* $\mathbf{v}_A$