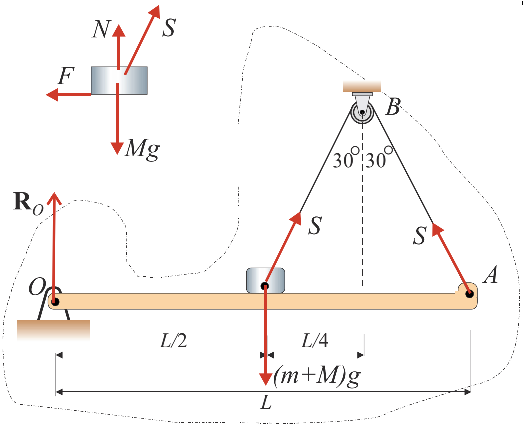
Institutionen för Mekanik
Nicholas Apazidis
tel: 790 7148
epost: nap@mech.kth.se
hemsida: http://www.mech.kth.se/~nap/

SG1112-200530



Lösningar

1) Betrakta hela systemet och ställ upp moment-jämvikten med avseende på O

$$\curvearrowleft O: \left(S \underbrace{\cos 30}_{\sqrt{3}/2} - (m+M)g \right)\frac{L}{2} + S\cos 30\, L = 0$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} S = (m+M)g \quad \Rightarrow \quad S = \frac{2}{3\sqrt{3}}(m+M)g$$

2) Formulera kraftjämvikten för partikeln

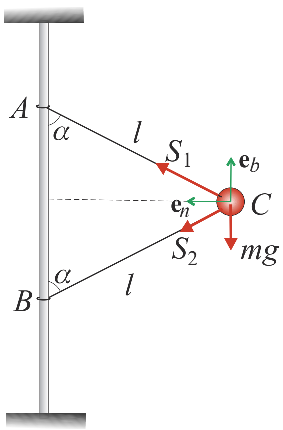
$$\uparrow: \quad N + S\underbrace{\cos 30}_{\sqrt{3}/2} - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Mg - \frac{\sqrt{3}}{2}S = Mg - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{3\sqrt{3}}(m+M)g = Mg - \frac{m+M}{3}g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{2M-m}{3}g$$

$$\rightarrow: \quad S\underbrace{\sin 30}_{1/2} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}S = \frac{m+M}{3\sqrt{3}}g$$

Och slutligen $\mu = \dfrac{F}{N} = \dfrac{m+M}{3\sqrt{3}}\dfrac{3}{2M-m} = \underline{\underline{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{m+M}{2M-m}}}$

2)



1) Formulera kraftekvationen i normal- och binormalriktningarna

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{v^2}{l\sin\alpha} = (S_1 + S_2)\sin\alpha$$

$$\mathbf{e}_b: \quad 0 = (S_1 - S_2)\cos\alpha - mg \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2 + \frac{mg}{\cos\alpha}$$

Insättning i första ekvationen ger

$$2S_2 + \frac{mg}{\cos\alpha} = m\frac{v^2}{l\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S_2 = m\frac{v^2}{2l\sin^2\alpha} - \frac{mg}{2\cos\alpha}}}$$

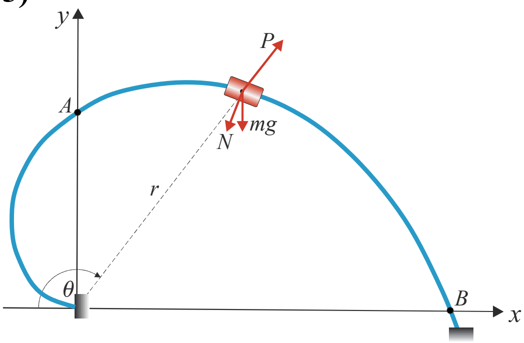
och

$$\underline{\underline{S_1 = m\frac{v^2}{2l\sin^2\alpha} + \frac{mg}{2\cos\alpha}}}$$

2) Slutligen $S_2 = 0$ ger

$$\frac{v^2}{l\sin^2\alpha} = \frac{g}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v = \sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}}\sin\alpha}}$$

3)



1) Använd lagen om den kinetiska energin

$$U_{A-B} = T_B - \underbrace{T_A}_{0} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

2) Bestäm $U_{A-B} = U_{A-B}^{P} + U_{A-B}^{mg} + U_{A-B}^{fr}$ (2)

a) P :s arbete

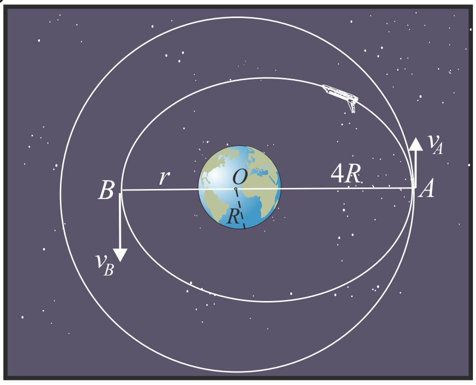
$$U_{A-B}^{P} = \int_A^B P\mathbf{e}_r d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} Pdr = \int_{\pi/2}^{\pi} Pkd\theta = \frac{\pi}{2}kP$$

b) Tyngdkraftens arbete $U_{A-B}^{mg} = mg\left(y_A - y_B\right) = mg\left(k\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}kmg$

3) Bestäm friktionsarbetet. Insättning i (1) och (2) ger

$$U_{A-B}^{fr} = \frac{1}{2}mv^2 - U_{A-B}^{P} - U_{A-B}^{mg} = \underline{\underline{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\pi}{2}k\left(P + mg\right)}}$$

4)



1) Bestäm först rymdfärjans hastighet på den cirkulära banan med hjälp av kraftekvationen

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{v_{A,cirk}^2}{4R} = G\frac{mM}{\left(4R\right)^2} \quad \Rightarrow v_{A,cirk}^2 = \frac{GM}{4R} = \frac{gR}{4}$$

$$v_{A,cirk} = \frac{\sqrt{gR}}{2}$$

2) Betrakta nu den elliptiska banan. $v_A = \sqrt{\frac{2}{3}}\, v_{A,cirk} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{gR}}{2} = \sqrt{\frac{gR}{6}}$

Rörelsemängdsmomentets bevarande ger

$$OA\, v_A = OB\, v_B \quad \Rightarrow \quad 4R\, v_A = r\, v_B \quad \Rightarrow \quad v_B = 4\sqrt{\frac{gR}{6}}\frac{R}{r} \qquad (2)$$

3) Energiekvationen ger totala energin på den elliptiska banan

$$E = T_A + V_A = \frac{1}{2}mv_A^2 - mg\frac{R^2}{4R} = \frac{1}{2}m\frac{gR}{6} - \frac{1}{4}mgR = -\frac{1}{6}mgR$$

men

$E = T_B + V_B = \frac{1}{2}m\,16\frac{gR}{6}\left(\frac{R}{r}\right)^2 - mg\frac{R^2}{r} = -\frac{1}{6}mgR$ vilket ger en kvadratisk ekvation för $\frac{R}{r}$

$8\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 6\frac{R}{r} + 1 = 0$ med rötterna $\left(\frac{R}{r}\right)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{8} = \frac{3 \pm 1}{8} \quad \Rightarrow \quad r_1 = 4R$ och $\underline{\underline{r_2 = 2R}}$