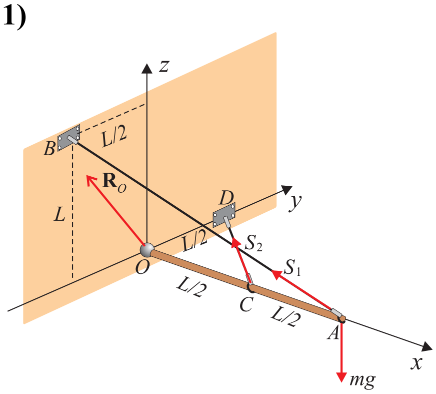
Institutionen för Mekanik
Nicholas Apazidis
tel: 790 7148
epost: nap@mech.kth.se
hemsida: http://www.mech.kth.se/~nap/

Lösningar till SG1112 Mekanik I

1)



1) Bestäm spännkrafterna på vektorform. Vi har

$A(L,0,0)$, $B(0,-L/2,L)$, $C(L/2,0,0)$, $D(0,L/2,0)$,
vilket ger $\mathbf{r}_{AB}=(-L,-L/2,L)$, $\mathbf{r}_{CD}=(-L/2,L/2,0)$
och

$$\mathbf{S}_1 = S_1\mathbf{e}_{AB} = S_1\frac{(-2,-1,2)}{3} \text{ samt } \mathbf{S}_2 = S_2\mathbf{e}_{CD} = S_2\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}$$

2) Momentjämvikten ger

$$M_O = \mathbf{r}_{OA}\times\mathbf{S}_1 + \mathbf{r}_{OC}\times\mathbf{S}_2 + \mathbf{r}_{OA}\times m\mathbf{g} = \mathbf{0}$$

$$\frac{S_1}{3}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ L & 0 & 0\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix} + \frac{S_2}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ L/2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ L & 0 & 0\\ 0 & 0 & -mg\end{vmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\mathbf{e}_y: & -\dfrac{2LS_1}{3} + mgL = 0\\ \mathbf{e}_z: & -\dfrac{LS_1}{3} + \dfrac{LS_2}{2\sqrt{2}} = 0\end{cases}$$

$$S_1 = \frac{3}{2}mg \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S}_1 = (-1,-1/2,1)mg \text{ och } S_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{3}{2}mg = \sqrt{2}mg \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S}_2 = (-1,1,0)mg$$

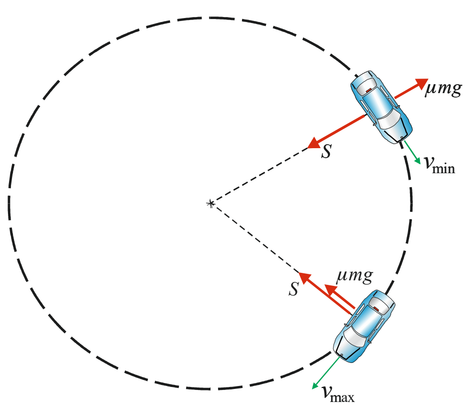
3) Kraftjämvikten slutligen ger

$$\mathbf{e}_x: \quad R_{Ox} - mg - mg = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{R_{Ox} = 2mg}}$$

$$\mathbf{e}_y: \quad R_{Oy} - mg/2 + mg = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{R_{Oy} = -mg/2}}$$

$$\mathbf{e}_z: \quad R_{Oz} + mg - mg = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{R_{Oz} = 0}}$$

2)



1) Formulera kraftekvationen i normalriktningen för största och minsta radien. Största möjliga friktionskraften $F=\mu mg$ är riktad utåt vid minsta hastigheten och inåt vid största vilket ger

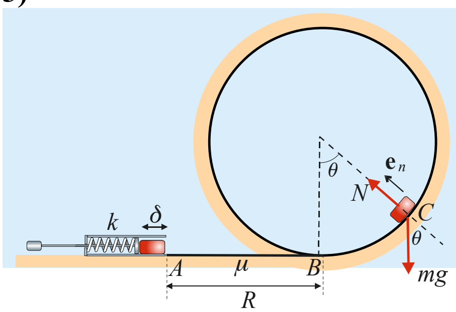
$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{v_{\min}^2}{r} = mg - \mu mg \quad\Rightarrow\quad v_{\min} = \sqrt{gr(1-\mu)}$$

och

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{v_{\max}^2}{r} = mg + \mu mg \quad\Rightarrow\quad v_{\min} = \sqrt{gr(1+\mu)}$$

Med $v_{\min} \le v \le v_{\max}$ och $\dfrac{v_{\max}}{v_{\min}} = \sqrt{\dfrac{1+\mu}{1-\mu}} = \sqrt{3}$ för $\mu = 1/2$

3)



1)Formulera kraftekvationen i normalriktningen i C

$$C, \mathbf{e}_n : \quad m\frac{v_C^2}{R} = N - mg\cos\theta$$

vilket ger

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v_C^2}{R} \qquad (1)$$

2) Bestäm v_C med hjälp av lagen om den kinetiska energin

$$U_{A-C} = T_C - T_A = \frac{1}{2}mv_C^2 - 0 \qquad (2)$$

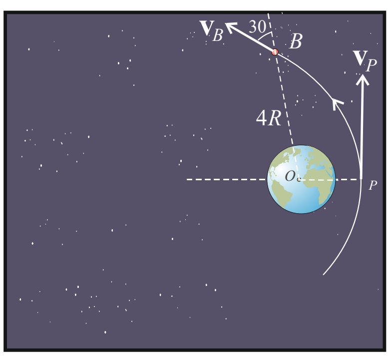
Men $U_{A-C} = \frac{1}{2}k\delta^2 - \mu mgR - mgR\left(1-\cos\theta\right)$ vilket insatt i (2) ger

$$mv_C^2 = k\delta^2 - 2\mu mgR - 2mgR\left(1-\cos\theta\right) \quad (3)$$

Insättning av (3) i (1) ger

$$N\left(\theta\right) = mg\cos\theta + \frac{k\delta^2}{R} - 2\mu mg - 2mg\left(1-\cos\theta\right) = \underline{\underline{\frac{k\delta^2}{R} + mg\left(3\cos\theta - 2\left(1+\mu\right)\right)}}$$

4)



1) Rörelsemängdsmomentets bevarande ger

$$v_P\, kR = \underbrace{v_B}_{\sqrt{gR}} \sin 30^\circ\, 4R \quad \Rightarrow \quad v_P = \frac{2\sqrt{gR}}{k} \qquad (1)$$

2) Energin bevaras längs banan

$$T_P + V_P = T_B + V_B$$

eller

$$\frac{1}{2}mv_P^2 - mg\frac{R^2}{kR} = \frac{1}{2}mv_B^2 - mg\frac{R^2}{4R} \quad \Rightarrow \quad v_P^2 - v_B^2 = 2gR\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\right) \quad (2)$$

Men $v_B = \sqrt{gR}$ och $v_P = \dfrac{2\sqrt{gR}}{k}$.

Insättning i (2) ger

$$gR\left(\frac{4}{k^2} - 1\right) = 2gR\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{4-k^2}{k^2} = \frac{4-k}{2k} \quad \Rightarrow \quad k^2 + 4k - 8 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+8} = -2 \pm 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{k = 2\left(\sqrt{3}-1\right) \approx 1{,}46}}$$