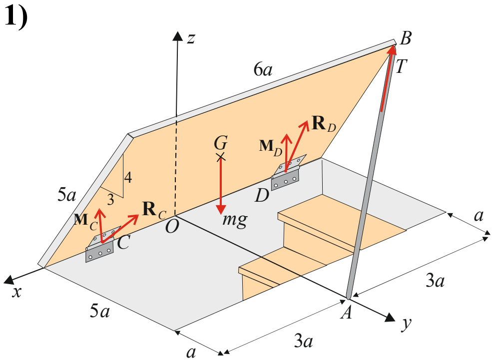
Institutionen för Mekanik
Nicholas Apazidis
tel: 790 7148
epost: nap@mech.kth.se
hemsida: http://www.mech.kth.se/~nap/

SG1112-210607

Lösningar

1)



1) Bestäm $\mathbf{T}$:s riktning

$A(0,6a,0)$, $B(-3a,3a,4a)$, $G(0,\frac{3}{2}a,2a)$

$\mathbf{e}_{AB} = \dfrac{(-3,-3,4)}{\sqrt{34}}$, vilket ger $\mathbf{T} = \dfrac{T}{\sqrt{34}}(-3,-3,4)$.

2) Formulera momentekvationen med avs. på O,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA}\times\mathbf{T} + \mathbf{r}_{OG}\times m\mathbf{g} + \mathbf{r}_{OC}\times\mathbf{R}_C + \mathbf{r}_{OD}\times\mathbf{R}_D + $$
$$+\mathbf{M}_C + \mathbf{M}_D = 0$$

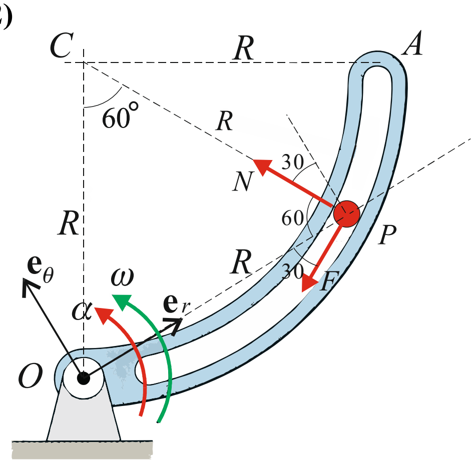
där $\mathbf{M}_C$ och $\mathbf{M}_D$ är eventuella kraftparsmoment i C och D

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 6a & 0 \\ -3 & -3 & 4 \end{vmatrix} \frac{T}{\sqrt{34}} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 3/2 & 2a \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} mg + \mathbf{r}_{OC}\times\mathbf{R}_C + \mathbf{r}_{OD}\times\mathbf{R}_D + \mathbf{M}_C + \mathbf{M}_D = \mathbf{0}$$, men $\mathbf{r}_{OC}\times\mathbf{R}_C\cdot\mathbf{e}_x = 0$

och $\mathbf{r}_{OD}\times\mathbf{R}_D\cdot\mathbf{e}_x = 0$, $\mathbf{M}_C\cdot\mathbf{e}_x = \mathbf{M}_D\cdot\mathbf{e}_x = 0$ vilket ger

$$\mathbf{e}_x: \quad \frac{24aT}{\sqrt{34}} - \frac{3}{2}mga = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{T = \frac{\sqrt{34}}{16}mg}} \approx 0{,}36mg$$

2)



1) Formulera kraftekvationen i radial- och transversalrikt-ningen

$$\mathbf{e}_r: \quad m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -N\sin 30 - F\cos 30$$

$$\mathbf{e}_\theta: \quad m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = N\cos 30 - F\sin 30$$

med $r = R$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ och $\dot{\theta} = \omega$ samt $\ddot{\theta} = \alpha$ fås:

$$\frac{1}{2}N + \frac{\sqrt{3}}{2}F = mR\omega^2 \qquad (1)$$

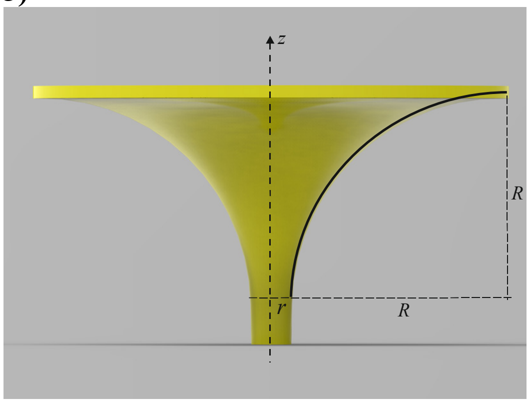
$$\frac{\sqrt{3}}{2}N - \frac{1}{2}F = mR\alpha \qquad (2)$$

2) Bestäm N och F

$$(1)\cdot\frac{1}{2} + (2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{N = \frac{mR}{2}\left(\omega^2 + \sqrt{3}\,\alpha\right)}}$$

$$(1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - (2)\cdot\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F = \frac{mR}{2}\left(\sqrt{3}\,\omega^2 - \alpha\right)}}$$

3)



1) Momentekvationen ger

$$\dot{H}_z = M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad H_z = konst$$

eller

$$(R+r)v_0 = rv_1 \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{R+r}{r}\frac{v_0}{v_1} \quad (1)$$

2) Mekaniska energin bevaras

$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_1^2 - mgR = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$$

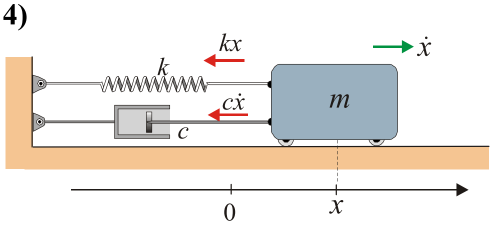
eller $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gR}$ (2)

Insättning av (2) i (1) ger $\quad \underline{\underline{\cos\theta = \frac{R+r}{r}\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gR}}}}$

3) Bestäm v_0 så att hastigheten på nivån R under högsta blir horisontell. För $\cos\theta = 1$ fås

$$r^2\left(v_0^2 + 2gR\right) = (R+r)^2 v_0^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_0 = r\sqrt{\frac{2g}{R+2r}}}}$$

4)



1) Kraftekvationen ger svängningsekvationen

$$\rightarrow: m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2\zeta\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2}x = 0$$

Den allmänna lösningen för fallet svag dämpning är $x(t) = \left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right)e^{-\zeta\omega_n t}$ där

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

där $\zeta = \dfrac{c}{2m\omega_n} = \dfrac{c}{2m}\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$

2) Integrationskonstanterna A och B bestäms från begynnelsevillkoren

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad \Rightarrow \quad x = A\sin\omega_d t\, e^{-\zeta\omega_n t} \Rightarrow \dot{x} = A\omega_d\cos\omega_d t\, e^{-\zeta\omega_n t} - A\zeta\omega_n\sin\omega_d t\, e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega_d} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x(t) = \frac{v_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\, e^{-\zeta\omega_n t}}}$$

3) Partikeln passerar jämviktsläget igen första gången efter halva perioden, $t_1 = \tau_d/2$ vilket ger hastigheten enligt

$$\dot{x}(\tau_d/2) = \frac{v_0}{\omega_d}\omega_d\cos\underbrace{\frac{\omega_d\tau_d}{2}}_{\pi}e^{-\zeta\omega_n\tau_d/2} - \frac{v_0}{\omega_d}\zeta\omega_n\sin\underbrace{\frac{\omega_d\tau_d}{2}}_{\pi}e^{-\zeta\omega_n\tau_d/2} = -v_0 e^{-\zeta\omega_n\tau_d/2} = \underline{\underline{-v_0 e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}}$$

eftersom $\omega_n\dfrac{\tau_d}{2} = \omega_n\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$