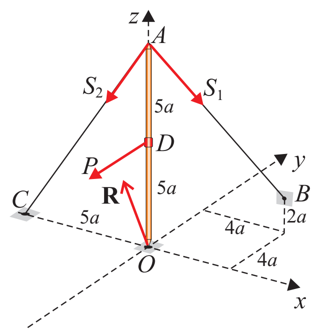
Institutionen för Mekanik
Nicholas Apazidis
tel: 790 7148
epost: nap@mech.kth.se
hemsida: http://www.mech.kth.se/~nap/

SG1112 210823

Lösningar till SG1112 Mekanik I

1)



1) Skriv spännkrafterna på vektorform

$$A(0,0,10)a; \quad B(4,4,2)a; \quad C(-5,0,0)a$$

$$\mathbf{r}_{AB} = (4,4,-8)a = 4(1,1,-2)a\,;$$

$$\mathbf{r}_{AC} = (-5,0,-10)a = -5(1,0,2)a$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}; \quad \mathbf{e}_{AC} = -\frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_1 = \frac{S_1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

$$\mathbf{S}_2 = -\frac{S_2}{\sqrt{5}}(1,0,2); \quad \mathbf{F}_1 = (0-P,0)$$

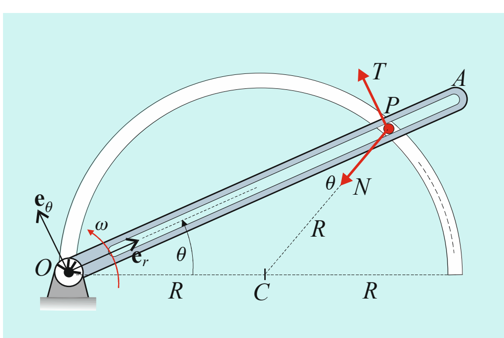
2) Momentekvationen med avs på O ger

$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) + \mathbf{r}_{OD} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$ eller

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 10a \\ \frac{S_1}{\sqrt{6}} - \frac{S_2}{\sqrt{5}} & \frac{S_1}{\sqrt{6}} & -\frac{2S_1}{\sqrt{6}} - \frac{2S_2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 5a \\ 0 & -P & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_x : -\frac{10aS_1}{\sqrt{6}} + 5aP = 0 \\ \mathbf{e}_y : \frac{S_1}{\sqrt{6}} - \frac{S_2}{\sqrt{5}} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{S_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}P}}, \quad S_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}S_1 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}P}}$$

2)



1) Formulera kraftekvationen i radial- och transversalriktningen

$$\mathbf{e}_r : \quad ma_r = -N\cos\theta \qquad (1)$$

$$\mathbf{e}_\theta : \quad ma_\theta = T - N\sin\theta \qquad (2)$$

men $r = 2R\cos\theta$, $\dot{\theta} = \omega = konst$,vilket ger

$\dot{r} = -2R\dot{\theta}\sin\theta = -2R\omega\sin\theta$ och

$\ddot{r} = -2R\dot{\theta}^2\cos\theta = -2R\omega^2\cos\theta$ och vidare

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -2R\omega^2\cos\theta - 2R\omega^2\cos\theta = -4R\omega^2\cos\theta$$

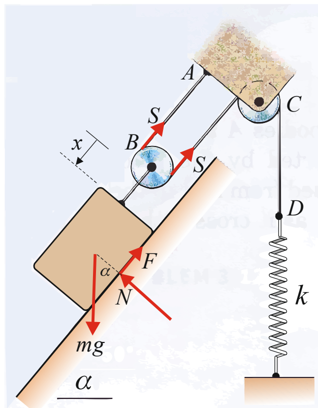
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 - 4R\omega^2\sin\theta = -4R\omega^2\sin\theta$$

2) Insättning i (1) ger

$$\underline{\underline{N = 4mR\omega^2}}$$

Från (2) fås $T = ma_\theta + N\sin\theta = -4mR\omega^2\sin\theta + 4mR\omega^2\sin\theta = 0$, $\underline{\underline{T = 0}}$

3)



1) Använd LKE

$$U_{0-1} = T_1 - T_0 = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

2) Bestäm arbetet som uträttas av den totala kraften F_x längs planet på blocket.

$F_x = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - 2S$, där

$S = k\Delta l$ är fjäderkraften. Med $\Delta l = 2x$ fås

$$F_x = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - 4kx =$$
$$= mg\cos\alpha(\tan\alpha - \mu) - 4kx$$

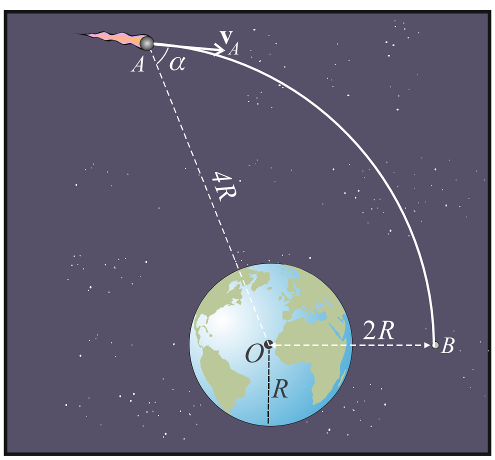
2) Bestäm arbetet

$$U_{0-1} = \int_0^x \left(mg\cos\alpha(\tan\alpha-\mu) - 4kx\right)dx = mg\cos\alpha(\tan\alpha-\mu)x - 2kx^2$$

3) Insättning i (1) ger uttrycket för blockets hastighet enligt

$$\underline{\underline{v = \sqrt{2g\cos\alpha(\tan\alpha-\mu)x - \frac{4k}{m}x^2}}}$$

4)



1) Kometens rörelsemängdsmoment bevaras

$$4R\,v_A\sin\alpha = 2R\,v_B \quad\Rightarrow\quad v_A = \frac{v_B}{2\sin\alpha} \qquad (1)$$

2) Kometens energi bevaras under rörelsen

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

med $V = -G\dfrac{mM}{r} = -mg\dfrac{R^2}{r}$ fås

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - mg\frac{R^2}{4R} = \frac{1}{2}mv_B^2 - mg\frac{R^2}{2R} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad v_B^2 - v_A^2 = \frac{1}{2}gR$$

vilket tillsammans med (1) ger $v_B^2\left(1 - \dfrac{1}{4\sin^2\alpha}\right) = \dfrac{gR}{2} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{v_B = \sqrt{\dfrac{2\sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha - 1}gR}}}$

3) Hyperbelns krökningsradie i B fås sedan från normalkomponenten av kraftekvationen i B

$$\mathbf{e}_n:\quad m\frac{v_B^2}{\rho_B} = G\frac{mM}{(2R)^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{gR^2}{4R^2} \quad\Rightarrow\quad \rho_B = \frac{4}{g}\frac{2\sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha-1}gR = \underline{\underline{\frac{8\sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha-1}R}}$$

där vi har använt $GM = gR^2$. För $\alpha = 60°$ fås $\underline{\underline{\rho_B = 3R}}$