

Ruhr-Universität Bochum
Institut für Thermo- und Fluidodynamik
Lehrstuhl für Strömungsmechanik

Diplomarbeit Nr. 199

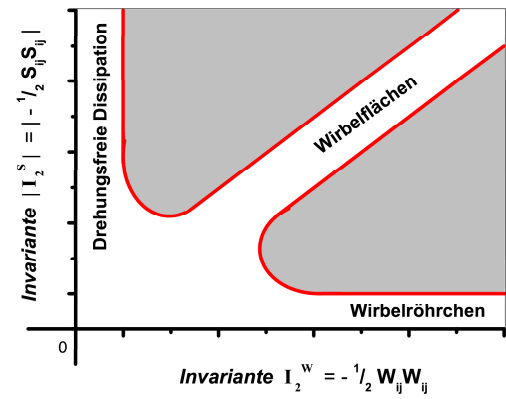
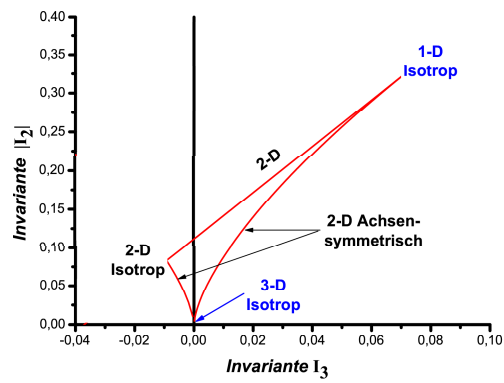
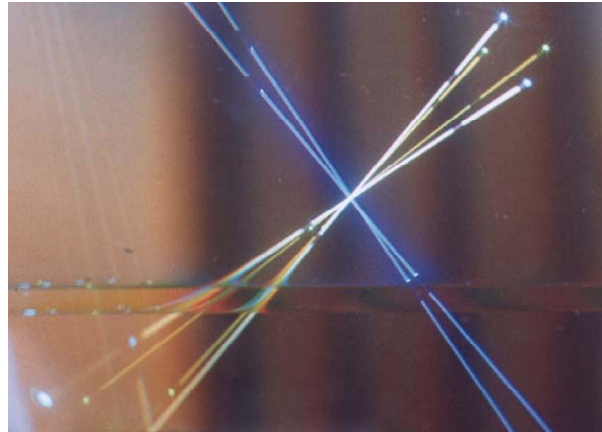
Analyse der Turbulenzeigenschaften aus
Messungen in drallbehafteter Strömung
in einem Rohr

Ramis Örlü

Mat.Nr.: 108 098 205879

Betreuer : Prof. Dr.-Ing. V. I. Vasanta Ram

Oktober 2003



Die oben dargestellte Grafik zeigt zum einen den Schnittpunkt dreier Strahlenpaare einer 3D Laser-Doppler-Velozimetrie in einem brechungsindexangepassten Fluid und zum anderen wichtige Darstellungsmethoden zur Analyse turbulenter Eigenschaften von Strömungen.

Ruhr-Universität Bochum
Institut für Thermo- und Fluidodynamik
Lehrstuhl für Strömungsmechanik

Diplomarbeit Nr. 199

für

Herrn cand.-ing. Ramis Örlü

Matr.-Nr.: 108 098 205879

Thema: Analyse der Turbulenzeigenschaften aus Messungen in drallbehafteter Strömung in einem Rohr

Einleitung

Drall in der Strömung ist eine Erscheinung, die in technischen Anwendungen, wie in der Natur, häufig anzutreffen ist. Die Entstehung des Dralls kann verschiedene Ursachen haben. In technischen Anwendungen kann er durch besondere Maßnahmen im Apparat selbst gezielt erzeugt worden sein, wie dies z.B. in Brennkammern und in Zyklonabscheidern der Fall ist. Er kann auch installationsbedingt entstanden sein, wie dies häufig in Erdgasleitungen der Fall ist. In den erstgenannten Beispielen ist die Wirkung des Dralls für die jeweilige Anwendung förderlich, während im zuletzt genannten der Drall eher die unerwünschte Nebenwirkung der möglichen Verfälschung der Durchflussmessung

ist. Dem mit Strömungsaufgaben betrauten Ingenieur ist daher die Kenntnis der Wirkung des Dralls in der Strömung unerlässlich. Hierauf beruht die überragende Bedeutung der drallbehafteten Strömung für den Ingenieur. Aber nicht nur aus diesem Grunde, sondern auch vom Standpunkt der Grundlagen der Strömungsmechanik, kommt dem Studium des Dralls in der Strömung ein zentraler Stellenwert in der Strömungsforschung zu.

Das hervorstechende Merkmal der drallbehafteten Strömung ist der schraubenförmige Verlauf der Stromlinien. Aus vielen Gründen stellt eine Strömung mit derartigen Stromlinien eine wissenschaftliche Herausforderung dar. Aus theoretischer Sicht liegt die Herausforderung hauptsächlich in der Erfassung des Umschlags und der Turbulenz dieser Strömung. Die Komplexität dieser Phänomene in der drallbehafteten Strömung ist primär auf die räumliche Krümmung der schraubenförmigen Stromlinien zurückführbar. Von experimenteller Seite her werden besondersartige Anforderungen an die Messtechnik gestellt, weil diese Strömung so extrem anfällig gegenüber auch sehr kleinen Störungen ist, dass bereits zur Messung eingeführte Sondenkörper den Charakter der Strömung verändern können. Der Einsatz einer berührungslosen Messtechnik, wie die Laser-Doppler-Velozimetrie, ist deshalb angebracht. Trotz der weitreichenden Entwicklung dieser Messtechnik, die in den letzten Jahrzehnten erfolgt ist, ist sie für diese Aufgabe noch nicht ohne weitere Entwicklungsschritte einsetzbar, vor allem wenn die drallbehaftete Strömung in einem Rohr zu untersuchen ist. Der Grund hierfür liegt in der Krümmung der Rohrwand. Abgesehen davon, dass die genannten theoretischen und experimentellen Schwierigkeiten überwunden werden müssen, kann die Bedeutung der Aufgabe der experimentellen Verwirklichung einer drallbehafteten Strömung mit wohldefinierter Drallverteilung sowie ihre Messung und die Analyse der Messdaten für die Grundlagenforschung nicht unterschätzt werden. Diese Diplomarbeit ist als ein Beitrag in diesem Rahmen anzusehen.

Vorherige Arbeiten

Am Lehrstuhl für Strömungsmechanik der Ruhr-Universität Bochum ist eine Pilotanlage gebaut worden, in der die drallbehaftete Strömung mit einer Drallverteilung entsprechend der Starrkörperrotation zu hoher Genauigkeit experimentell realisiert werden kann und die für Messungen des Strömungsfeldes mit einer 3-D Laser-Doppler-Velozimetrie ausgerüstet worden ist. Die Pilotanlage arbeitet mit einem brechungsindexangepaßten Fluid als Strömungsmedium. Diese Anlage und das Verfahren zur Messung sind in G. Rocklage-Marliani [A] beschrieben worden.

In einer Arbeit von M. Schmidts [B] wurden die Messungen von Rocklage-Marliani von einem Standpunkt aus ausgewertet, der prüft, in wieweit die Entwicklung des Dralls in der experimentell realisierten Strömung von der Theorie von Batchelor erfasst wird (siehe Kap. 7.5 in Batchelor [C]), die für eine stationäre reibungslose drehungsbehaftete nichtturbulente Strömung aufgestellt worden ist. Die Auswertungen zeigten, dass bei einer Reynoldszahl von $2,8 \cdot 10^5$ die Reynolds'schen Schubspannungen in einem Kernbereich unwirksam bleiben, d. h., die Strömung kann in diesem Bereich als „laminar“ angesehen werden. Weiterführende Versuche wurden von I. Schmitz [D] und R. Örlü [E] gefahren, wobei die Erkenntnisse von M. Schmidts bestätigt wurden.

Aufgabenstellung

In der folgenden Arbeit sollen die in [E] selbstständig gemessenen Messwerte erstmalig dahingehend ausgewertet werden, dass charakteristische Eigenschaften der drallbehafteten Strömung analysiert werden können. Dazu gehören die Untersuchung des „laminarisierten“ Kernbereiches, die Anisotropieeigenschaften der Reynolds'schen Spannungen und die dominanten Strukturen des Geschwindigkeitsgradienten.

Literatur

- [A] G. Rocklage-Marliani: *Dreidimensionale Laser-Doppler-Anemometrie in drallbehafteter turbulenter Rohrströmung*; Dr.-Ing.-Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, 1998
- [B] M. Schmidts: *Analyse der Wirkung des Dralls in der turbulenten Strömung*, Diplomarbeit Nr. 184, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, 1998
- [C] G. K. Batchelor: *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1970
- [D] I. Schmitz: *3D LDV-Messungen der Strömungsgrößen in einem Rohr mit turbulenter Strömung und stationärem Drall*, Studienarbeit Nr. 299, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, 2002
- [E] R. Örlü: *Messung und Analyse der stationären drallbehafteten Strömung in einem Rohr bei hohen Reynolds- und Rotations-Zahlen*, Studienarbeit Nr. 301, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, 2003

Bochum, 9. Juli 2003

Prof. Dr-Ing. V. I. Vasanta Ram

Inhaltsverzeichnis

Aufgabenstellung	II
1 Einleitung	2
I Experimenteller Teil	5
2 Experimenteller Aufbau	6
2.1 Versuchsanlage	6
2.2 Drallerzeuger	9
2.3 Laser-Doppler-Velozimetrie	10
2.3.1 Grundlagen der Laser-Doppler-Velozimetrie	11
2.3.2 Aufbau des LDV-Systems	13
2.4 Brechungsindexanpassung	16
3 Durchführung der Messungen	18
3.1 Vorbemerkungen	18
3.2 Parameter	20
3.2.1 Messpunkte	20
3.2.2 Berechnungsmatrix	22
3.3 Signalqualität	23
II Theoretischer Teil	25
4 Theoretische Grundlagen	26
4.1 Mathematische Beschreibung der Strömung	26

4.1.1	Koordinatensysteme	27
4.1.2	Kennzahlen	29
4.1.2.1	Reynolds-Zahl	29
4.1.2.2	Rotations-Zahl	30
4.1.3	Reynolds'sche Gleichungen	30
4.2	Grundlagen der Tensorrechnung	33
4.2.1	Tensornotation	33
4.2.1.1	<i>Einsteinsche Summationsvereinbarung</i>	33
4.2.1.2	Potenz eines Tensors	34
4.2.2	Zerlegung eines Tensors 2-ter Stufe	34
4.2.3	Eigenwerte, -vektoren und <i>Invarianten</i>	36
4.2.4	<i>Isotropie, Anisotropie</i> und <i>Deviatoren</i>	37
4.3	Geschwindigkeitsgradiententensor	38
4.3.1	In kartesischen Koordinaten	39
4.3.2	In Polarkoordinaten	40
4.4	Reynolds'scher Spannungstensor	42
4.4.1	Spannungstensor in kartesischen Koordinaten	43
4.4.2	Reynolds'scher Spannungstensor in Polarkoordinaten	45
5	Analyse der drallbehafteten turbulenten Strömung	47
5.1	Eigenschaften im Kernbereich der Strömung	48
5.1.1	Gemessene Geschwindigkeitsprofile	48
5.1.1.1	Umfangsgeschwindigkeitsverlauf	50
5.1.1.2	Axialgeschwindigkeitsverlauf	51
5.1.2	„Laminarisierungseffekt“ in drallbehafteten Strömungen	52
5.1.2.1	Verdrängungswirkung der Grenzschicht	52
5.1.2.2	„Laminarisierter“ Kernbereich	53
5.1.3	Simulation der drallbehafteten Strömung	55
5.2	Anisotropieeigenschaften des Reynolds'schen Spannungstensors	57
5.2.1	Invarianten des Reynolds'schen Spannungstensors	57
5.2.2	Die <i>Anisotropie-Invariantenkarte</i>	58
5.2.3	Ergebnisse	60
5.3	Dominante Strukturen des Geschwindigkeitsgradiententensors	65

5.3.1	Zweite Invariante des Deformations- und Drehungstensors	65
5.3.2	Veranschaulichung der dominanten Strukturen	66
5.3.3	Ergebnisse	67
5.4	Ausrichtung des Deformations- und Reynolds'schen Spannungstensors	77
6	Zusammenfassung und Ausblick	79
	Literaturverzeichnis	82
	Danksagung	86
	Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen	88
III	Anhänge	90
A	Dateiformate des Messprogrammes	91
B	Ergänzungen zu den Grenzschicht-Kriterien	95
C	Beispiele für Hauptachsen des Deformationstensors	98
D	Numerische Differentiation und Integration	105
E	Inhalt der beiliegenden CD	108

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Ansicht der Versuchsanlage	7
2.2	Gesamtanlage	8
2.3	Drallerzeuger (vor dem Einbau)	10
2.4	Gesamtaufbau des LDV-Systems	15
2.5	Anordnung zur Brechungsindexanpassung	17
3.1	Lage der Messpunkte entlang des Radius	21
3.2	Verteilung der Messpunkte	21
3.3	Berechnungsmatrix	22
4.1	Verwendetes Koordinatensystem und Benennungen	27
4.2	Aufspaltung der Strömungsgeschwindigkeit	31
5.1	Axial- und Tangentialgeschwindigkeitsprofil für $Ro = 0,75$	49
5.2	Axial- und Tangentialgeschwindigkeitsprofil für $Ro = 1,4$	49
5.3	Axial- und Tangentialgeschwindigkeitsprofil für $Ro = 1,8$	50
5.4	Koeffizienten des Umfangsgeschwindigkeitsverlaufes	51
5.5	Koeffizienten des Axialgeschwindigkeitsverlaufes	51
5.6	Grenzschicht-Kriterien	53
5.7	Laminarisierter Kernbereich nach Kriterium 3	54
5.8	Gegenüberstellung von Simulation und Messung	55
5.9	Anisotropie-Invariantenkarte	59
5.10	Anisotropie-Invariantenkarte für $Ro = 0,75$	61
5.11	Anisotropie-Invariantenkarte für $Ro = 1,4$	62
5.12	Anisotropie-Invariantenkarte für $Ro = 1,8$	63
5.13	Anisotropie-Invariantenkarte für $Ro = 0$	64

5.14	Diagramm zur Veranschaulichung der dominanten Strukturen . . .	67
5.15	Veranschaulichung der dominanten Strukturen für $Ro = 0,75$. . .	68
5.16	Veranschaulichung der dominanten Strukturen für $Ro = 1,4$. . .	69
5.17	Veranschaulichung der dominanten Strukturen für $Ro = 1,8$. . .	70
5.18	Vegleich der dominanten Strukturen für $Ro = 0,75$	73
5.19	Vegleich der dominanten Strukturen für $Ro = 1,4$	74
5.20	Vegleich der dominanten Strukturen für $Ro = 1,8$	75
5.21	Untersuchung der Spur des Deformationstensors	76
A.1	Auszug aus der Datei 4DR075.PTS	92
A.2	Auszug aus der Datei 4DR075.DAT	93
A.3	Auszug aus der Datei 0_K.DAT	94
B.1	Laminarisierter Kernbereich nach Kriterium 1	96
B.2	Laminarisierter Kernbereich nach Kriterium 2	97
E.1	Schematischer Aufbau des CD Inhaltes	108

Kapitel 1

Einleitung

Im Verlauf der letzten Jahrzehnte wurde die Strömungsmechanik – in sämtlichen Tätigkeitsfeldern heutiger Ingenieure und Naturwissenschaftler – immer bedeutender. So ist man seit jeher bestrebt, den Wirkungsgrad technischer Anlagen zu maximieren, d.h. die Ausnutzung von Ressourcen zu perfektionieren oder aber die strömungsmechanischen Phänomene der Natur zu erkunden. Um dem erstgenannten Ziel gerecht zu werden, ist es in vielen Fällen erforderlich, eine sorgfältige, strömungstechnische Auslegung zu betreiben. Dies sind unter anderem die Gründe dafür, die Kenntnisse über bestimmte strömungsmechanische Vorgänge zu erweitern und zu vertiefen. Zwar scheint seit einigen Jahren die numerische Strömungsmechanik dem Experiment die Stellung streitig zu machen, doch ist die Simulation ohne experimentell bestätigte Parameterstudien, welche Einblicke in die Natur der Strömung erlauben, nicht glaubhaft genug, um sich ganz von Theorie und Experiment zu trennen. Vor allem bei der Bearbeitung praxisrelevanter Probleme ist das Zusammenwirken von Theorie und Experiment ein Charakteristikum gegenwärtiger Strömungsforschung.

Ein noch viele Rätsel aufgebendes Gebiet der Strömungsmechanik ist die Turbulenz. Trotz jahrzehntelanger Bemühungen in der Erforschung der turbulenten Vorgänge ist man aufgrund ihrer hohen Komplexität noch weit von einer echten Durchdringung des Problems entfernt. Praktisches Ziel dieser Forschung ist letztlich eine Theorie im Sinne einer zuverlässigen Berechnungsgrundlage zu erhalten. Für die hierfür nötigen Zusammenhänge zwischen den Schwankungseigenschaf-

ten und den mittleren Strömungseigenschaften werden bis heute Hypothesen benutzt, die zwar physikalisch oder dimensionsanalytisch plausibel gemacht werden können, aber nicht streng aus den physikalischen Grundprinzipien herleitbar sind. So kann das Durchströmverhalten einer noch so einfachen und in technischen Anwendungen elementaren Geometrie wie dem Rohr unter bestimmten Umständen noch Rätsel aufgeben. Ein Beispiel für ein stark mit der Turbulenz verbundenes Phänomen ist das Auftreten von Drall in einer Strömung im Rohr.

Besitzt der Geschwindigkeitsvektor einer Strömung im Rohr bezüglich der Hauptdurchströmrichtung außer einer Axialkomponente auch eine Umfangskomponente, so existiert ein Drall in der Strömung. Daher sind Fliehkräfte sowie Kreiselwirkungen bzw. Corioliskräfte auf ein Fluidteilchen nur in Strömungen mit einer Umfangskomponente vorhanden. Solche Strömungen spielen in vielerlei technischen Systemen eine wichtige Rolle. Der Strömungsdrall ist einerseits in vielen Maschinen und Anlagenkomponenten für deren Funktion zwingend erforderlich, andererseits wird er in anderen Systembereichen trotz teilweise ungünstiger Auswirkungen in Kauf genommen [20].

Der Drall als positiver Wirkmechanismus findet z.B. bei der Stabilisierung von Flammen in Brennkammern, in Gaszentrifugen oder der Trennung von Stoffen in Zyklonabscheidern Anwendung. Verbesserungen der Verbrennung in Brennkammern von Gasturbinen und Flugtriebwerken sowie auch an den Köpfen von Erdgasfackeln werden durch gezielte Drallerzeugung in den Luft-Brennstoff-Strömen erreicht. Ungünstige Effekte des Strömungsdralls sind häufig da zu beobachten, wo es im Wesentlichen um den Transport von Gas oder Flüssigkeit oder der mit ihm stark verbundenen Durchflusstechnik geht. Ein in der Natur in Form eines Dralls vorkommendes und in Nordamerika und Südostasien mit verheerenden Auswirkungen auftretendes Phänomen ist der Tornado und der Hurrikan.

Die Schwierigkeiten bei der Untersuchung von drallbehafteten Strömungen liegen in ihrer enormen Komplexität, welche auf den schraubenförmigen Verlauf der Stromlinien zurückzuführen sind. Durch diese räumlich gekrümmten bzw. schraubenförmigen Stromlinien ist eine vollständige Analyse derartiger Strömungen eine wissenschaftliche Herausforderung und Gegenstand aktueller Forschungsthemen.

Da solche Strömungen auch auf die kleinsten Störungen sehr empfindlich reagieren, ergeben sich bei der Untersuchung drallbehafteter turbulenter Strömungen von experimenteller Seite aus besondere Schwierigkeiten.

Diese Arbeit soll ein kleiner Beitrag zum besseren Verständnis der Eigenschaften der drallbehafteten turbulenten Strömung sein. Untersucht werden der „Laminarisierungseffekt“, die *Anisotropie*eigenschaften des Reynolds’schen Spannungstensors sowie die dominanten Strukturen des Gradienten der Geschwindigkeiten. Die dafür notwendigen experimentellen Daten wurden an einer – am Lehrstuhl für Strömungsmechanik der Ruhr-Universität Bochum entstandenen – Pilotanlage, die auf dem Prinzip der Brechungsindexanpassung beruht, in der die drallbehaftete Strömung mit einer Drallverteilung entsprechend der Starrkörperrotation zu hoher Genauigkeit experimentell realisiert werden kann, und die für Messungen des Strömungsfeldes mit einer 3D Laser-Doppler-Velozimetrie ausgerüstet worden ist, gemessen. Ein wesentlicher Unterschied der untersuchten Messdaten liegt im Vergleich zu früheren ([21], [27] und [28]) darin, dass erstmals hohe Rotationszahlen bei einer hohen Reynolds-Zahl erreicht wurden.

Um dem Leser dieser Arbeit einen Eingang in die Thematik zu verschaffen wurde in Kapitel 2 der experimentelle Aufbau der Pilotanlage samt Drallerzeuger, Laser-Doppler-Velozimetrie und benötigter Brechungsindexanpassung beschrieben und in Kapitel 3 wurden wichtige Vorbemerkungen und Parameter zur Durchführung der Messung sowie zu deren Qualität gegeben.

Mit Kapitel 4 beginnt der theoretische Teil dieser Arbeit. Nach Vorstellung der mathematischen Beschreibung der Strömung, der Grundlagen zur Tensorrechnung und Herleitung des zu untersuchenden Geschwindigkeitsgradienten- und Reynolds’schen Spannungstensors in Polarkoordinaten widmet sich Kapitel 5 der Analyse der drallbehafteten turbulenten Strömung. Abschließend folgt in Kapitel 6 eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse und ein Ausblick auf noch durchzuführende Messungen oder zu untersuchende Phänomene.

Teil I

Experimenteller Teil

Kapitel 2

Experimenteller Aufbau

In diesem Kapitel soll ein allgemeiner Überblick über die Versuchsanlage, an welcher die in dieser Arbeit beschriebenen Untersuchungen durchgeführt wurden, gegeben werden. In den folgenden Unterkapiteln sollen zum einen die Versuchsanlage (Kapitel 2.1) und zum anderen ihre wichtigsten Komponenten, d.h. der Drallerzeuger (Kapitel 2.2), die Laser-Doppler-Velozimetrie (Kapitel 2.3) und abschließend die Brechungsindexanpassung (Kapitel 2.4) vorgestellt und beschrieben werden. Als Grundlage für diese Erläuterungen dienten die Arbeiten von G. Rocklage-Marliani [21], M. Schmidts [27] und I. Schmitz [28]. Für eine schnelle Einarbeitung an die Versuchsanlage sei das Zusatzskript von H. Kocherscheidt und M. Schmidts [12] empfohlen.

2.1 Versuchsanlage

Bei dem hier untersuchten experimentellen Aufbau handelt es sich um eine Versuchsanlage, die im Wesentlichen aus Edelstahlrohren mit einem Durchmesser von 100mm besteht. Hierbei handelt es sich um einen geschlossenen Kreislauf, welcher durch das verwendete Fluid durchströmt wird. Bei dem ausgewählten Fluid handelt es sich um eine Cumol-Paraffin-Mischung. Die Gründe für die Verwendung einer Cumol-Paraffin-Mischung werden in Kapitel 2.4 erläutert. In Abbildung 2.1 wird der schematische Aufbau des strömungstechnischen Teils der

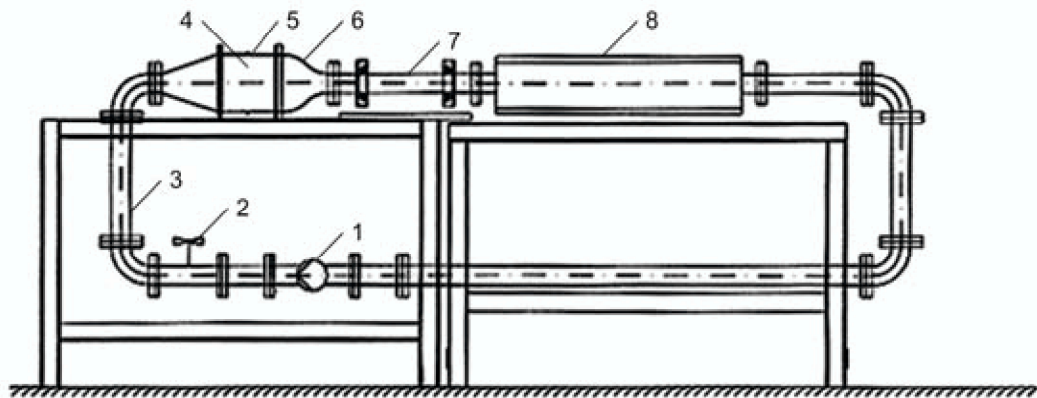


Abbildung 2.1: *Schematische Ansicht der Versuchsanlage*

Versuchsanlage gezeigt. Bezogen auf diese Abbildung wird die Anlage im Uhrzeigersinn durchströmt. In dem unteren Teil der Anlage sind ein Absperrventil (2) zur Regulierung des Volumenstroms und die Pumpe (1) zu erkennen. Die Leistung der Pumpe bleibt konstant. Um dennoch den Volumenstrom durch die Anlage zu dosieren, steht das erwähnte zentrale Absperrventil (2) und ein per Ventil regelbarer Bypass um die Pumpe (nicht im Bild) zur Verfügung. Nach dem Passieren des Absperrventils wird das Fluid in ein vertikales Rohrstück (3) umgeleitet. In diesem 700mm langen Rohrstück wird die notwendige Fluidkühlung realisiert, mit deren Hilfe ein ständiges Erwärmen des Fluids verhindert werden soll. Auf den Sinn dieser Temperaturkompensierung wird in Kapitel 2.4 weiter eingegangen. Nach einer weiteren Umlenkung, diesmal in die horizontale Richtung, strömt das Fluid durch einen Diffusor in eine sogenannte Vorkammer (4) und wird auf einen Durchmesser von 300mm erweitert. In dieser Vorkammer wird die aktuelle Fluidtemperatur mittels eines Thermoelements (Pt 100) gemessen. Außerdem befindet sich an der oberen Seite der Vorkammer der höchste Punkt der Anlage, so dass hier eine Möglichkeit zur Entlüftung (5) besteht. Gleichzeitig ist die Vorkammer der tiefste Punkt des oberen Teils der Anlage, daher ist dort auch eine Entleerung vorgesehen. Direkt an die Vorkammer ist eine Düse (6) angeschlossen, an welche wiederum der Drallerzeuger (7) angeschlossen ist.

Der Sinn der Düse liegt darin, dass der Drallerzeuger möglichst mit einem kastenförmigen Profil angeströmt werden sollte. Bei einem Nenndurchmesser von 100mm würde zur Realisierung einer vollausgebildeten Zuströmung eine viel zu lange Rohrstrecke von mindestens 8 bis 10m erforderlich sein und dies kann aus räumlichen Gründen – ganz abgesehen von den zusätzlichen Unkosten – nicht realisiert werden. Die Düse gewährleistet somit auf kürzestem Wege mit ihrem Kontraktionsverhältnis von 9:1 ein kastenförmiges Profil am Eintritt in den Drallerzeuger. Der Aufbau des Drallerzeugers wird in Kapitel 2.2 genauer betrachtet. Im Anschluss an den Drallerzeuger wird das Fluid in die eigentliche Messstrecke (8) geleitet. Diese Messstrecke besteht aus einem ca. 1500mm langen Glasrohr ($D = 100\text{mm}$), welches in einem trapezförmigen Kasten gelagert ist. Der Zweck dieses Kastens liegt in der sogenannten Brechungsindexanpassung, worauf in Kapitel 2.4 näher eingegangen wird. Nach dem Durchlaufen der Messstrecke wird die Strömung wieder zurück zur Pumpe geleitet. Die Gesamtanlage

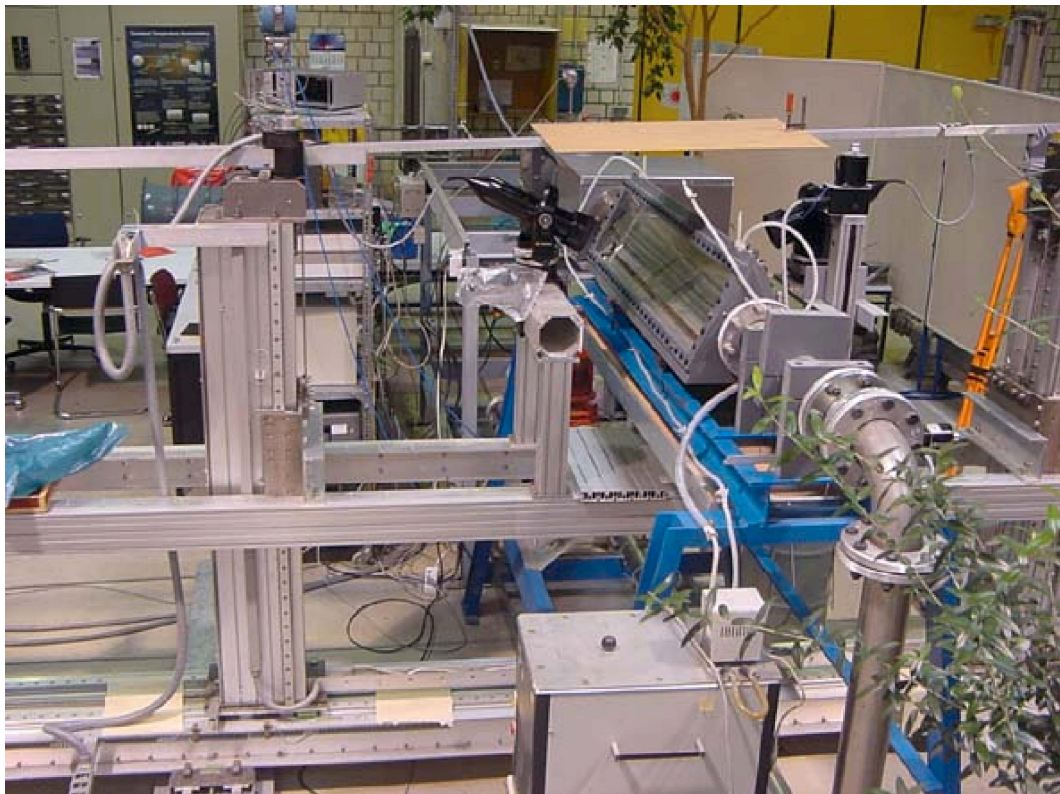


Abbildung 2.2: Gesamtanlage

wird in Abbildung 2.2 gezeigt. Die Anlage ist ohne Traversierung etwa $5m$ lang und $1,5m$ breit und ist mit 120 Litern Cumol-Paraffin-Mischung gefüllt, die mit Streuteilchen angereicherten ist. Im Sichtkasten befinden sich nochmals 40 Liter der brechungsindexangepassten Flüssigkeitsmischung, die jedoch keine Streuteilchen enthält. Die Traversierung dient dem exakten Einstellen und Erreichen eines jeden Punktes, der innerhalb der Messstrecke liegt. An den Traversierungseinheiten, die Bewegungen in allen drei Bewegungsrichtungen zulassen, sind zwei Optiken befestigt, von denen eine einer 1D-Optik und die andere einer 2D-Optik entspricht.

2.2 Drallerzeuger

Im Rahmen dieser und aller anderen an dieser Anlage durchgeführten Experimente werden im Allgemeinen drallbehaftete Strömungen untersucht. Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit ist eine mit einem stationären Drall behaftete Rohrströmung. Verschiedene Möglichkeiten zur Erzeugung eines stationären Dralls werden in der Dissertation von G. Rocklage-Marliani [21] erläutert. Die von G. Rocklage-Marliani gewählte Lösung besteht aus einem rotierenden Rohrbündel, welcher von einem Motor mit wählbarer, aber konstanter Umdrehungszahl in eine Rotation um seine Längsachse, also parallel zur Hauptströmungsrichtung, versetzt wird. Hierdurch wird ein einzelner Wirbel erzeugt, der die gesamte axiale Strömung überlagert und schraubenförmige Stromlinien entwickelt. Vorteile dieser Lösung sind u. a., dass die Drallstärke unabhängig von der axialen Geschwindigkeit eingestellt und bei einer günstigen Auslegung des Drallerzeugers eine große Bandbreite an Drallstärken erzeugt werden kann. Außerdem kann hier im Gegensatz zu anderen Drallerzeugungsmechanismen von einer rotationssymmetrischen Drallverteilung ausgegangen werden, was durch die späteren Messungen bestätigt wurde. Der Drallerzeuger hat eine Länge von $500mm$ und einen Durchmesser von $100mm$. Das Rohrbündel besteht in seinem Inneren aus kleinen Messingröhrchen mit einem Durchmesser von $4mm$ und einer Wandstärke von $0,2mm$. Die Zwischenräume zwischen den einzelnen

Röhrchen sind mit Harz abgedichtet.

Abbildung 2.3 zeigt eine Fotografie des Drallerzeugers vor dem Einbau. Im Rahmen einer Arbeit von H. Kocherscheidt [11] wurde der Flachriemen als Antrieb durch eine Zahnkettenkonstruktion ausgetauscht, um bei sprunghaften Drehzahländerungen nicht dem Schlupf am Flachriemen ausgesetzt zu sein.



Abbildung 2.3: *Drallerzeuger (vor dem Einbau)*

2.3 Laser-Doppler-Velozimetrie

Bevor in Kapitel 2.3.2 der Aufbau des LDV-Systems dargestellt wird, soll zuvor ein kurzer Überblick über den physikalischen Vorgang der Geschwindigkeitsmessung mittels Laser-Doppler-Velozimetrie und dessen Vor- und Nachteile gegeben werden.

2.3.1 Grundlagen der Laser-Doppler-Velozimetrie

Eine Welle erfährt bei Streuung oder Reflexion von einem bewegten Objekt eine Frequenzverschiebung, die proportional zur Projektion des Geschwindigkeitsvektors auf den Streuvektor ist. Aus der Messung der Frequenzverschiebung lässt sich die Geschwindigkeit des Objekts bestimmen. Einen wichtigen Platz in der Lasermesstechnik nimmt die Laser-Doppler-Velozimetrie bzw. -Anemometrie, also die Geschwindigkeitsmessung mit Hilfe des Lasers, ein. Bei der Laser-Doppler-Velozimetrie (*LDV*) werden zwei kohärente Laserstrahlen so ins Untersuchungs-volumen fokussiert, dass sie sich dort in einem flachen Winkel schneiden. Im Schnittbereich entsteht durch Interferenz ein Muster abwechselnd heller und dunkler Streifen. Fliegt ein in der Strömung mitgeführtes Partikel (sogenannte *Seeding* bzw. *Tracer*) durch dieses Streifenmuster, so besteht das Streulicht aus einer Folge von Lichtimpulsen. Um den Doppler-Effekt zur Geschwindigkeitsmessung zu nutzen, müssen die Streupartikel neben anderen Eigenschaften (vgl. F. Durst [5], G. Rocklage-Marliani [21], B. Ruck [24], F. Schlottmann [26] und G. Schweiger [29]) ein möglichst optimales Strömungsverhalten aufweisen, so dass sie sich in ihren Bewegungen der Strömung anpassen. So müssen sie groß genug sein, um ausreichend viel Licht zu reflektieren, dürfen aber auch nicht zu groß gewählt werden, da sie sonst durch ihre hohe Massenträgheit den Stromlinien nicht mehr exakt folgen können. Ihre Dichte darf nicht zu sehr von der Fluidichte abweichen, weil auftretende Volumenkräfte wie Gravitation oder Zentrifugalkräfte ebenfalls zu Fehlern führen. Schließlich sollten sie möglichst kugelförmig sein, wodurch ein besseres Folgevermögen erreicht wird.

Die Pulsfrequenz, die sogenannte Dopplerfrequenz, ist proportional zur Partikelgeschwindigkeitskomponente, senkrecht zur Winkelhalbierenden, d.h. zur optischen Achse der beiden Laserstrahlen. Daraus folgt, dass für eine vollständige Messung aller drei auftretenden Geschwindigkeitskomponenten einer realen Strömung auch drei verschiedene Paare von Laserstrahlen benötigt werden, deren Messvolumina am selben Punkt im Raum liegen müssen und somit ein Gesamt-Messvolumen erzeugen.

Die *LDV* liefert prinzipbedingt die Geschwindigkeit der Partikel, die sich durch das Messvolumen bewegen. Es wird zur Laser-Doppler-Anemometrie (*LDA*), wenn die Partikelbewegung am Ort des Messvolumens mit der Fluidbewegung übereinstimmt. Während F. Schlottmann [26] den Unterschied der *LDV* zur *LDA* auf das Verhältnis von Partikelgeschwindigkeit und Fluidgeschwindigkeit zurückführt, unterscheiden G. Rocklage-Marliani [21] und J. Wiedemann [33] die Verfahren anhand ihrer Einsatzgebiete. So heißt es dort:

Das Wort Anemometrie, als Bezeichnung für Geschwindigkeitsmesstechnik, kommt von dem griechischen Wort „anemos“, was soviel wie Windmessung bedeutet, und impliziert daher, dass es sich um Geschwindigkeitsmessungen in einer Luftströmung handelt. [...] Auch das Wort Velozimetrie bezeichnet Geschwindigkeitsmessungen, stammt jedoch von dem lateinischen Wort „velox“, was Geschwindigkeitsmessung heißt und ist daher allgemeiner und natürlich besonders im Zusammenhang mit Flüssigkeitsströmungen korrekter [21].

Die optische Geschwindigkeitsmessung hat gegenüber den konventionellen Verfahren (Hitzdrahtanemometrie, Drucksonden) eine Reihe von Vorteilen:

- Das Strömungsfeld wird nicht durch mechanische Sonden gestört, d.h. es handelt sich um ein berührungsloses und rückwirkungsfreies Messverfahren. Einzige Anforderung ist die optische Zugänglichkeit der Messstelle.
- Die Messung ist unabhängig von Druck, Temperatur und Zusammensetzung der Strömung.
- Es können sehr kleine Messvolumina erzeugt werden. Damit ist eine hohe Raumauflösung und daher auch eine Messung bei steilen Geschwindigkeitsgradienten, wie es in Grenzschichten der Fall ist, möglich.
- Es handelt sich um ein absolutes Messverfahren, d. h. es ist keine Kalibrierung nötig. Die gesuchte Strömungsgeschwindigkeit ist unmittelbar proportional zum gemessenen Signal, der Dopplerfrequenz.
- Hochfrequente Geschwindigkeitsfluktuationen können gemessen werden.

Neben diesen Vorteilen müssen allerdings zwei Nachteile erwähnt werden:

- Die Strömung muss durchsichtig sein.
- Die Strömung muss kleine lichtstreuende Partikel enthalten, die sich mit der Strömung bewegen bzw. die gleiche Geschwindigkeit wie die Strömung haben.

Um die in dieser Arbeit geforderte dreidimensionale Geschwindigkeitsmessung der drallbehafteten Strömung zu ermöglichen, ist die Versuchsanlage mit einer Vorrichtung zur 3D Laser-Doppler-Velozimetrie ausgestattet.

2.3.2 Aufbau des LDV-Systems

Der konkrete Gesamtaufbau der hier verwendeten LDV-Anlage wird in Abbildung 2.4 schematisch wiedergegeben. Bei dem eingesetzten 5 Watt Argon Laser handelt es sich um ein Modell der Marke SPECTRA PHYSICS. Er liefert einen Strahl, der sich im sichtbaren Spektrum aus drei Farben zusammensetzt, und zwar aus *grün* bei einer Wellenlänge von $514nm$, aus *blau* bei einer Wellenlänge von $488nm$ und aus *violett* bei einer Wellenlänge von $476nm$. Es können also drei farblich getrennte Strahlen erzeugt werden. Dies geschieht innerhalb der Transmitterbox. Zusätzlich werden diese drei Strahlen nochmals in jeweils zwei Strahlen gleicher Farbe aufgeteilt, so dass nun drei gleichfarbige Strahlen-Paare zur Verfügung stehen. Mit jedem dieser Strahlen-Paare können nun prinzipiell unabhängig voneinander Geschwindigkeiten gemessen werden. Hierzu müssen sie allerdings noch in die sogenannten Optikköpfe weitergeführt werden, und zwar ein Paar in den 1D-Optikkopf und zwei Paare in den 2D-Optikkopf. Aus den Optikköpfen treten die drei Strahlenpaare mit einem festgelegten Abstand und Winkel zueinander aus, so dass sie sich im Brennpunkt der jeweiligen Optik miteinander schneiden. Hierbei ist zu beachten, dass die zwei Strahlen-Paare aus der 2D-Optik mit einer gemeinsamen optischen Achse, aber in 90° zueinander gedrehten Ebenen, austreten. Hierdurch können in dem dabei entstehenden Messvolumen zwei zueinander senkrecht stehende Komponenten einer Geschwindigkeit gemessen werden.

Wird nun das Messvolumen der 1D-Optik zur Überschneidung mit dem der 2D-Optik gebracht, so ist es möglich alle drei Geschwindigkeitskomponenten zu messen, wenn ein Seeding-Partikel das Gesamt-Messvolumen durchquert. Die Optikköpfe können mit Hilfe einer Traversiereinrichtung mechanisch so verfahren werden, dass mit dem erzeugten Messvolumen jeder beliebige Punkt innerhalb der Messstrecke erreicht werden kann. Die beschriebenen Optiken dienen auch als Empfänger des vom Teilchen ausgesandten Streulichtes. Hierbei empfangen die Optiken das Licht, welches die jeweilige andere Optik ausgesandt hat. Diese Arbeitsweise wird „off-axis Betrieb“ genannt. Die so empfangenen Lichtsignale werden nun nach Farben getrennt und über drei getrennte Kanäle an Photomultiplier weitergegeben, die diese in elektrische Signale umwandeln. Die entstandenen Signale werden an drei automatisierte Analyse-Einheiten, die sogenannten Burst-Spectrum-Analyser (*BSA*), weitergeführt. Die Aufgabe der *BSA* besteht unter anderem darin, die Signale anhand ihrer Frequenzstruktur dahingehend zu untersuchen, ob sie tatsächlich von einem *Seeding*-Partikel, welches das Messvolumen durchquert hat, stammen können. Ein *Seeding*-Partikel wird nur dann eine gültige Messung auslösen, wenn es innerhalb eines Zeitfensters ($t \leq 1ms$) Licht von allen drei Strahlen-Paaren zur empfangenen Optik reflektiert. Ist dies der Fall, spricht man von einem *Burst*. Tritt ein gültiger Burst auf, so sind die *BSA* in der Lage die jeweilige Komponente der Geschwindigkeit des Teilchens und damit des Fluids zu errechnen. Die so errechneten Komponenten werden inklusive einer Angabe des Auftrittszeitpunktes an den Messrechner weitergegeben (siehe Anlage A). Da die Lage der gemessenen Geschwindigkeitskomponenten von der Anordnung der Laserstrahlen im Versuchsaufbau abhängt, und somit nicht notwendigerweise mit den gesuchten Komponenten übereinstimmt, wird durch den Messrechner eine Koordinaten-Transformation vorgenommen, deren Ergebnis die Geschwindigkeitsanteile des Partikels in axialer v_x , in tangentialer v_φ und in radialer v_r Richtung sind.

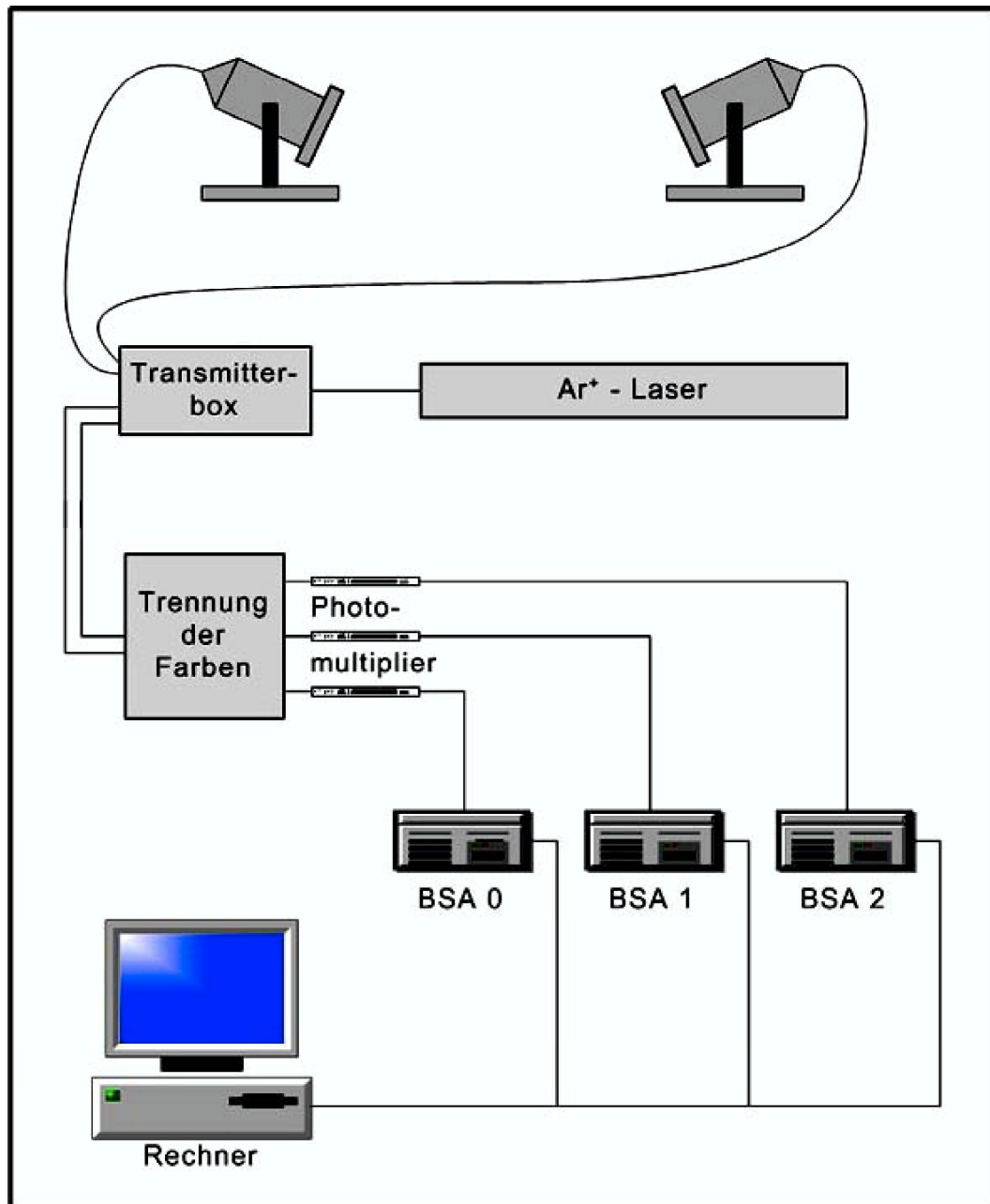


Abbildung 2.4: Gesamtaufbau des LDV-Systems

2.4 Brechungsindexanpassung

Die im Kapitel 2.3.1 beschriebene Vorgehensweise zur Erzeugung eines Messvolumens lässt erkennen, dass an einen derartigen Versuchsaufbau einige Anforderungen gestellt werden. So ist es notwendig, dass insbesondere die Messstrecke optisch gut zugänglich ist, um an jedem Punkt innerhalb der Messstrecke ein Überschneiden der drei Strahlen-Paare zu ermöglichen. Eine besondere Schwierigkeit stellen hierbei die Brechungen der Laserstrahlen beim Eintritt in das Glasmaterial der Messstrecke sowie beim Übergang vom Glas in das Fluid dar. Durch diese Brechungen kommt es ständig zu einem Winkelversatz (in den Laserstrahlen) an den Ein- und Austrittsstellen. Bei der Messstrecke handelt es sich aufgrund des Glasrohres um eine gekrümmte Oberfläche. Soll das Messvolumen nun an verschiedenen räumlichen Punkten positioniert werden, so führt dies zu sich ändernden Bedingungen beim Eintritt des Strahles in die Glasfläche, da sich nicht nur der optische Weg der Strahlen in der Luft ändert, sondern ebenfalls der Krümmungswinkel der Glasoberfläche selbst. Dazu kommt noch, dass diese Probleme ebenso beim Übergang der Strahlen vom Glasrohr in das Fluid auftreten. Dieses würde dazu führen, dass der durch die Brechung entstehende Winkelversatz stark von der Position des Messvolumens abhängig und kaum noch kontrollierbar wäre.

Es scheint evident, dass unter diesen Umständen ein genaues Positionieren des Messvolumens bzw. eine exakte Überlagerung aller drei Strahlen-Paare extrem schwierig wäre. Es gibt jedoch exemplarische Korrekturvorschriften für immer wiederkehrende Berandungsbeispiele, wie bei Messungen in Rohren. Um derartig erhöhte Anforderungen und Probleme zu umgehen, wird hier eine Brechungsindexanpassung durchgeführt. Diese besteht im Wesentlichen daraus, dass das Glasmaterial der Messstrecke und das verwendete Fluid darauf hin abgestimmt wird, dass beide annähernd denselben Licht-Brechungsindex haben. Bei dem Glas handelt es sich um ein DURAN Borosilicatglas mit einem Brechungsindex von $n = 1,4730$ bei einer Temperatur von $20^{\circ}C$. Dieser Werkstoff erfüllt auch alle übrigen Ansprüche, wie ausreichende Lichtdurchlässigkeit und Kratzfestigkeit. Bei dem Fluid handelt es sich, wie schon erwähnt, um eine Mischung aus den Stoffen Cumol (78,29 Vol.%) und Paraffin (21,71 Vol.%) deren Brechungsindex

bei einer Temperatur von 20°C mit $n = 1,4730$ genau dem des Glasrohres entspricht. Durch die Wahl dieser Materialien für Messstrecke und Fluid wird das Problem einer Brechung der Laserstrahlen beim Übergang vom Rohr ins Fluid vermieden. Da beide Stoffe denselben Brechungsindex haben, findet hier nun keine Brechung mehr statt.

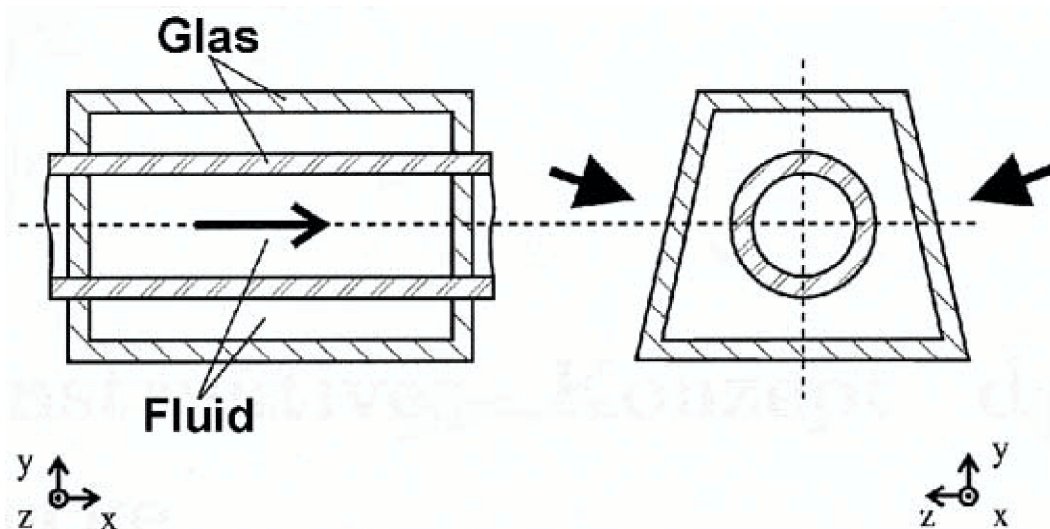


Abbildung 2.5: Anordnung zur Brechungsindexanpassung

Das Problem der Brechung beim Eintritt der Strahlen in den gekrümmten Glaskörper der Messstrecke wird durch die Konstruktion eines trapezförmigen Kastens um die Messstrecke gelöst. Dieser Kasten besteht ebenfalls aus dem oben erwähnten Borosilicatglas und ist mit dem Fluid, welches in der Anlage verwendet wird, gefüllt. Die Seitenwände des in Abbildung 2.5 gezeigten Kastens sind so geneigt, dass sie parallel zur Austrittsfläche der Optiken liegen, d. h. die optische Achse der Laserstrahlen verläuft genau senkrecht zur Kastenwand. Auch hier gilt wieder, dass sowohl beim Übergang der Strahlen von der Kastenwand ins Fluid im Kasten als auch vom Fluid im Kasten ins Glasrohr der Messstrecke keinerlei Brechung stattfindet. Die einzige Brechung vollzieht sich beim Eintritt der Strahlen in die Außenfläche des Kastens. Diese kann aber aufgrund der jetzt sehr einfachen Geometrie (gerade statt gekrümmter Fläche, optische Achse genau senkrecht) relativ einfach bestimmt werden und wird bei der rechnergesteuerten Traversierung der Optikköpfe automatisch ausgeglichen.

Kapitel 3

Durchführung der Messungen

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten Schritte, die bis zur Erlangung der Messwerte nötig waren, festgehalten werden. Dies sind einerseits die Überlegungen, die vor einer Messung angestellt werden und die Erfahrungen, die während der Messvorbereitung und Messung gewonnenen werden (Kapitel 3.1). Andererseits sind es die eingestellten Parameter, abgesehen davon wie banal sie zu sein scheinen, die für den Experimentator enorm wichtig sind, da nur so eine Reproduzierbarkeit und Vergleichbarkeit mit anderen Ergebnissen gewährleistet ist (Kapitel 3.2). Abschließend soll noch auf die Qualität der aufgenommenen Signale eingegangen werden (Kapitel 3.3).

3.1 Vorbemerkungen

Die Messungen, die in dieser Arbeit analysiert werden, sind anhand des *Zusatzskriptes zur LDA-Versuchsanlage* von H. Kocherscheidt und M. Schmidts [12] durchgeführt. Dass sich die in dieser Versuchsanleitung dokumentierte Vorgehensweise nicht immer reibungslos in die Praxis umsetzen lässt, ist kein Manko der Autoren, sondern liegt vielmehr in der Natur des experimentellen Arbeitens. Um diese Arbeit übersichtlich zu halten, werden nur die in [12] noch nicht erwähnten Informationen festgehalten, weshalb die Lektüre [12] zum Verständnis des nun Folgenden erforderlich ist.

Die 3D *LDV*-Anlage ist aufgrund ihrer Komplexität und der Brechungsindexempfindlichkeit der Anpassungsflüssigkeit extrem von Umwelteinflüssen beeinflussbar. So können verschiedene Faktoren, wie z. B. Temperaturen, die außerhalb des Intervalls von 23°C bis 25°C liegen, Luftströmungen (z. B. durch offene Werkstatttüre), Luft in den Rohren oder aber kaum sichtbare Staubschichten auf dem trapezförmigen Glaskasten zu einer Verfälschung der Messergebnisse oder sogar zum Ausbleiben von Messsignalen führen, und somit den vorteilhaften Effekt der Brechungsindexanpassung beeinträchtigen. Das letztere wiederum veranlasst den Experimentator nach erfolgloser Feinjustierung zu einer erneuten, zeitaufreibenden Kalibrierung der drei Laserstrahl-Paare an der Messblende und Traversierung der 3D *LDV*-Anlage. Abgesehen von diesen meist schnell erkennbaren Fehlereinflüssen gibt es auch Fehlerquellen, die schwer zu lokalisieren sind. So fällt auf, dass sich die Einstellungen des untersten *BSA* nach längeren Stillstandszeiten auf Maximal- oder Minimal-Werte verstellt haben, was durch ein Aufleuchten der Spannungsanzeige der Photomultipliern oder durch einen falschen Wert des „Calibration-Factor“ erkennbar ist. Dies macht ein Starten des Messprogramms unmöglich, da sich unter anderem auch die Zuweisungsadresse des *BSA* verstellt und das Messprogramm das angeschlossene *BSA* nicht zuweisen kann. Mittels der „Soft Key“-Taste des untersten *BSA* müssen dann alle justierbaren Einstellungen an die der oberen beiden angepasst werden.

Ein anderes häufig auftretendes Problem in Bezug auf die Einstellungen des obersten *BSA* ist, dass nach längeren Betriebsstunden entweder die „Shift-Frequenz“ und/oder die angelegte Spannung an den Photomultipliern nicht mehr eingeschaltet werden kann. Zwar ist dieses Problem noch nicht lokalisiert, doch kann es meistens durch mehrmaliges „reseten“ des *BSA* gelöst werden.

Eine eher sinnwidrige Fehlermeldung, die entweder beim Einschalten der *BSA* oder aber nach längeren Betriebsstunden eintritt, ist das Aufleuchten der „Local Control (*LoC*)“-Leuchte. Dieses Aufleuchten, was einem Aktivieren des „Local Control“-Modus gleichkommt, sagt aus, dass die *BSA*-Einstellungen ausschließlich an ihrer Paneele und nicht durch das Messprogramm verstellt

werden können. Laut Betriebsanleitung der BURST SPECTRUM ANALYSER [34] dürfte das „*LoC*“ nur dann aufleuchten, wenn keines der drei *BSA* die „Clock Source“-Einstellung auf „Master“ gestellt hat. Die in der „Clock Source“-Einstellung mit „Slave“ eingestellten *BSA* müssten sich an den mit „Master“ eingestellten *BSA* orientieren, um somit zu gewährleisten, dass koinzidente Messungen durchgeführt werden können. Trotz Prüfung dieser Einstellungen durch die „Soft Key“-Funktionen war es nicht immer möglich, das „*LoC*“ zu deaktivieren und somit die *BSA*-Einstellungen durch das Messprogramm zu verändern.

Weitere Hinweise zur Behebung oder Verhinderung auftretender Fehler wurden in der Diplomarbeit von J. Micheel [16] dokumentiert, welche parallel zu dieser Arbeit entstanden ist. Eine weitere Hilfe zum Umgang mit den vom Messprogramm benötigten Eingabe-Dateien und erzeugten Ausgabe-Dateien ist im Anhang A einzusehen.

3.2 Parameter

Da der experimentelle Teil dieser Arbeit hauptsächlich mit den experimentell gewonnenen Daten von J. Micheel [16] und R. Örlü [18] arbeitet, sei hier ein kurzer Einblick in die gewählten Parameter gegeben.

3.2.1 Messpunkte

Bei der hier vorliegenden Arbeit wird von einem rotationssymmetrischen Strömungszustand ausgegangen, was nicht nur aufgrund des Aufbaus der Anlage und der Konstruktion des Drallerzeugers, sondern vor allem durch vorherige Arbeiten ([21], [27], [28]) bestätigt wird. Deswegen muss bei den durchgeführten Profilmessungen nicht das ganze Profil bemessen werden, sondern es reicht aus, beginnend von der Rohrmitte entlang einer senkrecht auf der Strömungsrichtung

(x – Achse) stehenden Achse bis zur Wand Messungen durchzuführen. Um den zeitlichen Aufwand der Messungen zu verringern, ist die Maschenweite im Kern der Strömung aufgeweitet und in der Nähe der Wand, wo große Geschwindigkeitsgradienten erwartet werden, verdichtet.

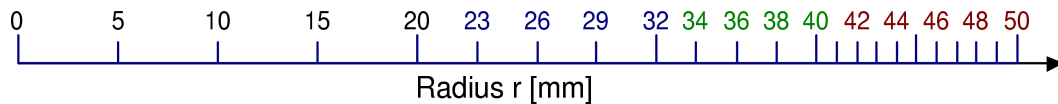


Abbildung 3.1: Lage der Messpunkte entlang des Radius

Wie in Abbildung 3.1 veranschaulicht, ist die Verteilung der Messpunkte folgendermaßen aufgebaut:

Bereich [mm]	Abstand [mm]	Anzahl der	
		Messpunkte	Teilbereiche
0 – 20	5	5	4
20 – 32	3	5	4
32 – 40	2	5	4
40 – 49	1	10	9

Abbildung 3.2: Verteilung der Messpunkte

Die Anzahl der Messpunkte und der Teilbereiche, die in Tabelle 3.2 angegeben sind, rechtfertigt die spätere Anwendung der *Simpson*-Regel zur numerischen Integration (siehe Anhang D).

An der Wand ($r = 50\text{mm}$) können keine Messungen durchgeführt werden, da einerseits die Streueffekte keine Messungen zulassen, d. h. es können keine Signale aufgenommen werden, und andererseits die Photomultiplier aufgrund der auftretenden starken Lichtreflexionen durchbrennen könnten. Abgesehen von dieser technischen Grenze ist durch die Haftbedingung an der Wand eine Messung bei $r = R$ nicht nötig.

3.2.2 Berechnungsmatrix

Zur Realisierung der hohen Reynolds-Zahl wurde, durch Regulation der Ventile an der Pumpe, bei drallfreier Strömung eine maximale Axialgeschwindigkeit von etwa $3,15 \frac{m}{s}$ eingestellt. Anlehnend an vorherige Arbeiten ([11], [12]) kann davon ausgegangen werden, dass diese Einstellung eine über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit von ca. $2,8 \frac{m}{s}$ ergibt.

Erst die endgültige Auswertung der Messdaten zeigt, dass sich für die über den Querschnitt des Rohres gemittelte Geschwindigkeit ein Wert von $\bar{v}_{x,m} = 2,87 \frac{m}{s}$ ergibt. Die Schwankungen dieses Wertes entlang der Strömungsrichtung liegen unter 2%, was bei der Komplexität der Signalerfassung ein vertretbarer Wert ist. Mit dieser mittleren Strömungsgeschwindigkeit ergibt sich eine Reynolds-Zahl von $2,24 \cdot 10^5$ (kinematische Viskosität bei $20^\circ C$: $\nu = 1,28 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$).

x/D	$Ro [-]$	0,75	1,4	1,8
$[-]$	$N [\frac{1}{min}]$	410	750	965
4		⊗	⊗	⊗
6,5		⊗	⊗	⊗
9		⊗	⊗	⊗
11,5		⊗	⊗	⊗
14		⊗	⊗	⊗

Abbildung 3.3: *Berechnungsmatrix*

Es werden nun Rotations-Zahlen vorgegeben, bei denen Messungen durchgeführt werden sollen. Mittels Gleichung 4.14 werden die am Drallerzeuger einzustellenden Drehzahlen berechnet. Für die durchzuführende Messreihe wird die in Abbildung 3.3 dargestellte Berechnungsmatrix gewählt.

Da in der Arbeit von I. Schmitz [28] Messungen bei hohen Rotations-Zahlen bis $2,0$ – mit einer niedrigen Reynolds-Zahl von ca. $1,17 \cdot 10^5$ – durchgeführt wurden und M. Schmidts [27] den Drallerzeuger mit einer hohen Reynolds-Zahl von ca. $2,8 \cdot 10^5$ – aber bei einer niedrigen Rotations-Zahl bis einschließlich $1,0$ – betrieben hat, kam es nie zum Überschreiten einer Drehzahl von 550

Umdrehungen pro Minute.

Da diese Arbeit auf den mit J. Micheel [16] gemeinsam gemessenen Daten basiert und diese sowohl bei einer hohen Reynolds-Zahl als auch bei hohen Rotations-Zahlen durchgeführt ist, gibt es jedoch das Problem, dass der Frequenzrichter des Drallerzeugers seine Leistungsgrenze bei ca. $550 \frac{1}{min}$ überschreitet. Aus diesem Grund wird der Frequenzbereich des Umrichters (nach [35]) soweit erhöht, dass Drehzahlen bis zu $1000 \frac{1}{min}$ möglich sind. Es zeigt sich aber, dass bei dieser eingestellten maximalen Drehzahl das Fluid durch den Drallerzeuger drastisch erwärmt wird, was eine Erfassung von Messsignalen aufgrund der Brechungsindexempfindlichkeit des Cumol-Paraffin-Gemisches unmöglich macht. Daher ist die maximale Rotations-Zahl von 1,8 für die gewählte Reynolds-Zahl von $2,24 \cdot 10^5$ als eine obere Grenze zu betrachten. Zumindest solange, bis keine alternative Kühlmöglichkeit zur Kompensation der Erwärmung sowie ein Drehzahlmesser mit einem größeren Messbereich gefunden wird, da der zurzeit verwendete lediglich einen Anzeigebereich bis $1000 \frac{1}{min}$ aufweist.

3.3 Signalqualität

Zur Durchführung der Messungen soll abschließend noch auf die Qualität der erfassten Daten eingegangen werden. In diesem Zusammenhang sind zum einen die Datenrate (*Rate*) und zum anderen die Gültigkeit der Daten (*Valid*) zu erwähnen. Die Datenrate ist die durch die *BSA* aufgenommene Anzahl von Signalen eines Streupartikels. Die Datenrate gibt den prozentualen Anteil der weiterverarbeitbaren Signale an, d. h. den Anteil der koinzidenten Messungen. Mittels dieser beiden Kriterien ist daher eine Beurteilung der Messsignale möglich.

In den an dieser Anlage zuvor durchgeführten Versuchen lag die Datenrate im Bereich von $600 - 1200 Hz$ und die Gültigkeit der Daten im Bereich von $70 - 80\%$. Für die in diesem Fall ausgewerteten Daten wird eine Kombination von hoher Reynolds-Zahl und hohen Rotations-Zahlen gewählt, was auffallend abweichende

Werte ergibt. So liegt die Datenrate bei den beiden höheren Rotations-Zahlen meistens im Bereich von $1500 - 2500 Hz$, wohingegen die Gültigkeit der Daten im Bereich von $40 - 70\%$ schwankt. Die hohe Datenrate könnte mit dem erhöhten Drall und die niedrigere Gültigkeit mit der durch die hohen Drehzahlen des Drallerzeugers verursachten Vibrationen zusammenhängen.

Teil II

Theoretischer Teil

Kapitel 4

Theoretische Grundlagen

Nachdem in den vorherigen Kapiteln ein Überblick über den experimentellen Aufbau (Kapitel 2) gegeben und die wichtigsten Etappen bei der Durchführung der Messung (Kapitel 3) dokumentiert sind, beginnt mit diesem Kapitel der theoretische Teil dieser Arbeit. Im folgenden Kapitel sollen die theoretischen Grundlagen, die zur Analyse der turbulenten drallbehafteten Strömung in einem Rohr vonnöten sind, ausgearbeitet werden. Dazu gehören die mathematische Beschreibung der Strömung (Kapitel 4.1), die Grundlagen der Tensorrechnung (Kapitel 4.2), sowie die Darstellung des Geschwindigkeitsgradiententensors (Kapitel 4.3) und des Reynolds'schen Spannungstensors (Kapitel 4.4).

4.1 Mathematische Beschreibung der Strömung

Dieses Unterkapitel gibt einen Überblick über die theoretischen Zusammenhänge, die sich bei drallbehafteten Strömungen in einem Rohr ergeben. In den folgenden Unterkapiteln wird das verwendete Koordinatensystem (Kapitel 4.1.1) vorgestellt, und es wird erläutert, wie die kinematischen Größen des zugrunde liegenden Koordinatensystems aus den gemessenen Größen berechnet werden können. Nachdem die wichtigsten Kennzahlen (Kapitel 4.1.2) zur Beschreibung drallbehafteter Strömung im Rohr erläutert werden, werden die, die Reynolds'schen Gleichungen, die die turbulente Strömung beschreiben (Kapitel 4.1.3), aufgestellt.

4.1.1 Koordinatensysteme

Im Allgemeinen werden aufgenommene Daten durch rechtwinklige bzw. kartesische Koordinaten beschrieben. Dies bietet die Möglichkeit, Daten in einer Ebene oder auch im Raum darzustellen. Bei der Beschreibung von Strömungen im Rohr ist es aber zweckmäßig, von dieser Darstellungsart abzuweichen und Zylinderkoordinaten zu verwenden. Die in dieser Arbeit verwendeten Koordinaten und deren Bezeichnungen sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

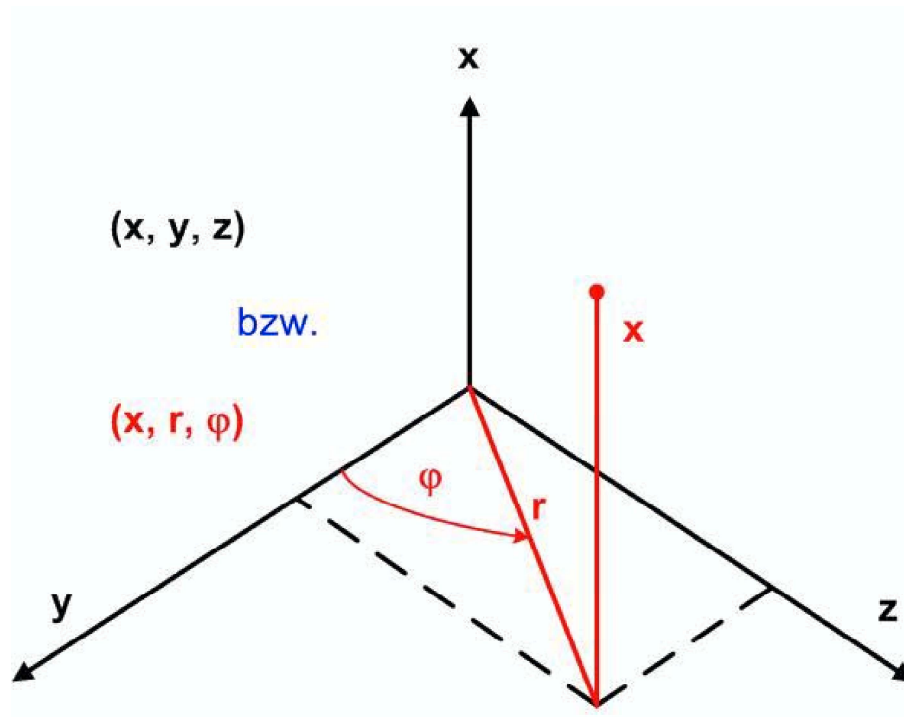


Abbildung 4.1: *Verwendetes Koordinatensystem und Benennungen*

Aus Abbildung 4.1 ergeben sich auch unmittelbar die folgenden Transformationsgleichungen zwischen den kartesischen und zylindrischen Koordinaten:

- Zylinderkoordinaten \implies Kartesische Koordinaten

$$x = x \quad (4.1)$$

$$y = r \cdot \cos \varphi \quad (4.2)$$

$$z = r \cdot \sin \varphi \quad (4.3)$$

- Kartesische Koordinaten \implies Zylinderkoordinaten

$$x = x \quad (4.4)$$

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (4.5)$$

$$\varphi = \arctan \frac{z}{y} \quad (4.6)$$

Da in dieser Arbeit vornehmlich Geschwindigkeiten untersucht werden, müssen natürlich auch die gemessenen Geschwindigkeiten in x -, y - und z - Richtung (v_x, v_y, v_z) und im Zylinderkoordinatensystem (v_x, v_r, v_φ) bekannt sein. Aus geometrischen Gegebenheiten, die in G. Rocklage-Marliani [21] detailliert dargestellt sind, lässt sich folgende Transformationsvorschrift herleiten:

- Zylinderkoordinaten \implies Kartesische Koordinaten

$$v_x = v_x \quad (4.7)$$

$$v_y = v_r \cdot \cos \varphi - v_\varphi \cdot \sin \varphi \quad (4.8)$$

$$v_z = v_r \cdot \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi \quad (4.9)$$

- Kartesische Koordinaten \implies Zylinderkoordinaten

$$v_x = v_x \quad (4.10)$$

$$v_r = v_y \cdot \cos \varphi + v_z \cdot \sin \varphi \quad (4.11)$$

$$v_\varphi = -v_y \cdot \sin \varphi + v_z \cdot \cos \varphi \quad (4.12)$$

Der gemeinsame Ursprung beider Koordinatensysteme liegt unmittelbar am Ausgang des Drallerzeugers auf der Mittelachse der Messstrecke.

4.1.2 Kennzahlen

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit den in dieser Arbeit Verwendung findenden dimensionslosen Kennzahlen, welche das bedeutendste Werkzeug der experimentellen Strömungsmechanik sind. Zu jedem technischen oder physikalischen Vorgang gehören entsprechende Kennzahlen, d. h., dass jede Strömung durch dimensionslose Kennzahlen charakterisiert ist. Diese Kennzahlen erlauben es, zwei ähnliche physikalische Vorgänge miteinander zu vergleichen. Sind die Kennzahlen zweier Vorgänge gleich, so nennt man sie physikalisch ähnlich, ohne dass es zwingend notwendig ist, dass auch alle (dimensionsbehafteten) Einflussfaktoren gleich sind. Die drallbehaftete Strömung in einem Rohr wird grundsätzlich durch zwei unabhängige Kennzahlen beschrieben, welche in den beiden folgenden Unterkapiteln vorgestellt werden. Für ausführlichere Informationen bezüglich der Dimensionsanalyse sei auf B. Rogg [22] (Anhang D) verwiesen.

4.1.2.1 Reynolds-Zahl

Für den Fall einer inkompressiblen, reibungsbehafteten Strömung wirken am Volumenelement nur Trägheits- und Reibungskräfte. Diese beiden Kräfte hängen von folgenden physikalischen Größen ab:

- die zeitlich über den Querschnitt gemittelte mittlere Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v}_{x,m}$,
- der charakteristische Rohrdurchmesser D ,
- die Dichte ρ und dynamische Viskosität μ des strömenden Fluids.

Nach der Dimensionsanalyse bleibt als einzige dimensionslose Kombination der physikalischen Größen der folgende Quotient übrig:

$$Re = \frac{\rho \cdot \bar{v}_{x,m} \cdot D}{\mu} = \frac{\bar{v}_{x,m} \cdot D}{\nu} \quad (4.13)$$

Diese dimensionslose Kennzahl (Gl. 4.13) wird nach Osborne Reynolds, der dieses Gesetz 1883 bei der Untersuchung von Strömungen in Rohren gefunden hatte, *Reynolds-Zahl* genannt. Sie stellt das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskraft dar, wobei $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ als kinematische Viskosität eingeführt worden ist. Die Viskosität der verwendeten Cumol-Paraffin-Mischung ist vergleichbar mit der geringen Viskosität des Wassers, so dass problemlos Reynolds-Zahlen der Größenordnung $O(10^5)$ erreicht werden können. Das Erreichen solch hoher Reynolds-Zahlen ist vonnöten, um die Erkenntnisse aus diesen Experimenten, der Praxisrelevanz wegen, mit der Luftströmung zu vergleichen.

4.1.2.2 Rotations-Zahl

Die Stärke des eigentlichen Dralls wird durch die zweite Kennzahl, die sogenannte Rotations-Zahl, beschrieben.

$$Ro = \frac{\omega \cdot D}{2 \bar{v}_{x,m}} \quad (4.14)$$

Diese Kennzahl ist durch Gleichung 4.14 definiert, wobei ω für die Winkelgeschwindigkeit des Drallerzeugers, D für den Durchmesser des Rohres und $\bar{v}_{x,m}$ wiederum für die zeitlich über den Querschnitt gemittelte mittlere Geschwindigkeit der Strömung steht. Die Winkelgeschwindigkeit ist mit $\omega = 2\pi \cdot N$ gegeben. N ist hierbei die Drehzahl des Drallerzeugers. Die Rotations-Zahl ist damit ein Maß für die Drallstärke, d. h. je höher die Rotations-Zahl ist, desto stärker ist der Drall des Fluids um die Rohrachse. Das bedeutet, dass die Strömung durch die beiden Kennzahlen Re und Ro eindeutig beschrieben wird.

4.1.3 Reynolds'sche Gleichungen

Nachdem das verwendete Koordinatensystem (Kapitel 4.1.1) und die verwendeten strömungsmechanischen Kennzahlen (Kapitel 4.1.2) vorgestellt sind, wird hier das Augenmerk auf die Gleichungen gerichtet, die das Gleichgewicht zwischen den Reibungs-, Trägheits- und Druckkräften, sowie den Kräften aufgrund

der Reynolds'schen Spannungen beschreiben. Für tiefergehende Studien sei auf J. H. Spurk [30] und andere ([23] und [25]) verwiesen, aus welchen hier auch profitiert wird.

Bei den bekannten Navier-Stokes-Gleichungen, die das mathematische Fundament jeder theoretischen Beschreibung von Strömungen darstellen, handelt es sich um vier partielle nichtlineare Differentialgleichungen für die vier unbekanntenen Strömungsgrößen - den Druck p , sowie die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{u} = (v_x, v_r, v_\varphi)$ - in den drei Raumrichtungen (x, r, φ) . Da in dieser Arbeit die drallbehaftete turbulente Strömung in einem Rohr behandelt wird, muss mittels einer Aufspaltung der Strömungsgrößen in einen Mittelwert und eine instationäre Schwankungsgröße, ein theoretischer Zugang verschafft werden. Turbulente Strömungen sind von Natur aus dreidimensional und instationär. Doch bei einer Betrachtung über einen längeren Zeitraum kann man viele von ihnen als im zeitlichen Mittel stationär betrachten.

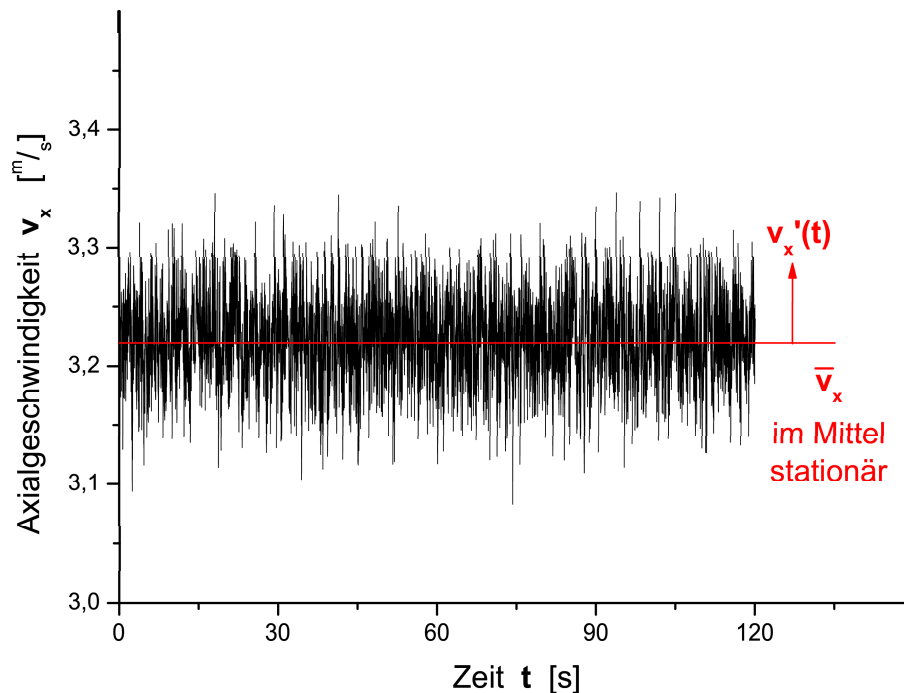


Abbildung 4.2: Aufspaltung der Strömungsgeschwindigkeit in axialer Richtung am Beispiel einer gemessenen Strömung

Misst man z. B. die Geschwindigkeitskomponente v_x einer turbulenten Strömung in einem Rohr an einem festen Ort über einen längeren Zeitraum, so erhält man üblicherweise ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, wie in Abbildung 4.2. Das Geschwindigkeitsfeld und der Druck lassen sich dann folgendermaßen zerlegen:

$$u_i(x_j, t) = \bar{u}_i(x_j) + u'(x_j, t) \quad (4.15)$$

$$p(x_j, t) = \bar{p}(x_j) + p'(x_j, t) \quad (4.16)$$

Mit Hilfe der obigen Zerlegungen (Gln. 4.15 und 4.16) und der Rechenregeln für Mittelwerte erhält man nach einer zeitlichen Mittelung die Reynolds'schen Gleichungen in Tensornotation. Unter Annahme einer inkompressiblen Strömung mit konstanten Stoffwerten und vernachlässigtem Volumenanteil ergeben sich aus der Kontinuitätsgleichung und den Impulsgleichungen die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.17)$$

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (4.18)$$

Das Verschwinden der gemittelten linearen Glieder bedeutet physikalisch, dass die Beträge der entsprechenden Größen sich im Integral (Gl. 4.19) aufheben. Dies ist für die nichtlinearen Glieder nicht der Fall.

$$\bar{u}_i(x_j) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} u_i(x_j, t) dt \quad (4.19)$$

Die stationäre Grundströmung \bar{u}_i muss die zeitlich gemittelte Kontinuitätsgleichung (Gl. 4.17) und die Reynolds'schen Gleichungen (Gl. 4.18) erfüllen. Aufgrund der - durch die zeitliche Mittelung hervorgerufenen - Schwankungsterme $-\rho \overline{u'_i u'_j}$, die als unterbestimmte Unbekannte auftreten und als *Schließungsproblem* bekannt geworden sind, reichen diese Gleichungen aber zur Bestimmung der Grundströmung nicht aus. Der das Schließungsproblem kennzeichnende Term ist auch unter der Bezeichnung *Reynolds'sche Spannung* oder *turbulente Scheinspannung* bekannt. Mit der Definition eines gesamten Spannungstensors (Gl. 4.20) läßt sich die Reynolds'sche Gleichung dann gemäß Gleichung 4.21 darstellen:

$$T_{ij} = \rho \bar{u}_i \bar{u}_j - \rho \overline{u'_i u'_j} \quad (4.20)$$

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.21)$$

Aufbauend auf dieser Darstellung des gesamten Spannungstensors (Gl. 4.20) und der Reynolds'schen Gleichung (Gln. 4.18 und 4.21) sollen in Kapitel 5 verschiedene grundlegende Eigenschaften der Dynamik von turbulenten Strömungen analysiert werden.

4.2 Grundlagen der Tensorrechnung

Die Tensorrechnung begrenzt den Lese- und Schreibaufwand beim Umgang mit Gleichungen. Daher ist es im Umgang mit Gleichungen oft zweckmäßig sich der Tensorrechnung zu bedienen. Nach Festlegung auf eine Tensornotation (Kap. 4.2.1) wird auf die *Symmetrie* und *Antisymmetrie* (Kap. 4.2.2), auf Eigenwerte, -vektoren und *Invarianten* (Kap. 4.2.3), sowie auf die *Isotropie* und *Anisotropie* (Kap. 4.2.4) von Tensoren zweiter Stufe eingegangen.

4.2.1 Tensornotation

Trotz weiter Verbreitung in der technischen Literatur und der leichteren Anwendbarkeit im Gegensatz zur schwerfälligeren symbolischen Schreibweise hat sich noch keine einheitliche Notation bei Operationen mit Tensoren durchgesetzt. Dieses Manko tritt vor allem bei Veröffentlichungen zum Vorschein, wo zum Zwecke der Kürze auf eine Erklärung der verwendeten Notation verzichtet wird. Um das erwähnte Manko nicht selbst zu verursachen, doch andererseits nicht zu sprengen, sollen hier kurz die verwendeten Symbole und Operationen vorgestellt werden, wobei für tiefergehende Fragestellungen auf J. Betten [2] verwiesen wird.

4.2.1.1 Einsteinsche Summationsvereinbarung

Die Gültigkeit der *Einsteinschen Summationsvereinbarung*, welche besagt, dass über doppelt vorkommende gleiche Indizes in Gleichungen oder Ausdrücken

summiert wird, wird bei allen Gleichungen und Ausdrücken vorausgesetzt.

4.2.1.2 Potenz eines Tensors

Aus der Anwendung der *Einsteinschen Summationsvereinbarung* ergeben sich einige Schlussfolgerungen, die die Potenzierung von Tensoren betreffen. Im Folgenden sind die für unseren Fall wichtigsten Fälle aufgelistet:

- $A_{ij}^0 = \delta_{ij}$ (Kronecker-Delta)
- $A_{ij}^2 = A_{ik} A_{kj}$, etc.
- $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \text{Spur}(A_{ij})$
- $A_{ii}^2 = \text{Spur}(A_{ij}^2)$, etc.
- $A_{ii} A_{jj} = \text{Spur}(A_{ij})^2$, etc.

Vor allem die Notation der Potenz eines Tensors bzw. das Quadrat der Spur eines Tensors wird in vielen Publikationen auf verschiedenste Arten dargestellt. In der vorliegenden Arbeit sind aus Gründen der Leserlichkeit mathematische Beziehungen immer auf die hier vorgestellte Form umgeschrieben.

4.2.2 Zerlegung eines Tensors 2-ter Stufe

Ein Tensor A_{ij} zweiter Stufe heißt *symmetrisch*, falls $A_{ij} = A_{ji}$ gilt. Der in der Strömungsmechanik wohl bekannteste symmetrische Tensor zweiter Stufe ist der Spannungstensor. Für ihn ist im Zusammenhang mit dem Hauptspannungsproblem auch das Ergebnis wichtig, dass die Eigenwerte und -vektoren eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe stets *reell* sind. Ein Tensor A_{ij} zweiter Stufe heißt *antisymmetrisch*, falls $A_{ij} = -A_{ji}$ gilt. A_{ij} sei nun ein beliebiger, nicht unbedingt *symmetrischer* oder *antisymmetrischer*, Tensor zweiter Stufe. Es ist

leicht einzusehen, dass die Hälfte der Summe aus dem Tensor selbst und dem dazu transponierten Tensor,

$$A_{ij}^{sym} := \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}), \quad (4.22)$$

ein *symmetrischer* Tensor ist, während die Hälfte der Differenz dieser beiden Tensoren,

$$A_{ij}^{anti} := \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}), \quad (4.23)$$

einen *antisymmetrischen* Tensor darstellt. Addiert man die Gln. 4.22 und 4.23, so ist erkennbar, dass wegen

$$A_{ij} := A_{ij}^{sym} + A_{ij}^{anti} \quad (4.24)$$

jeder beliebige Tensor A_{ij} zweiter Stufe als Summe eines *symmetrischen* und *antisymmetrischen* Tensors darstellbar ist. Aus dieser Aufspaltung folgen auch unmittelbar die Definitionen der Begriffe *Symmetrie* und *Antisymmetrie*: Der Tensor A_{ij} ist *symmetrisch*, wenn der *antisymmetrische* Anteil verschwindet:

$$A_{ij}^{anti} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{ij} = A_{ji}. \quad (4.25)$$

Der Tensor A_{ij} ist *antisymmetrisch*, wenn der *symmetrische* Anteil verschwindet:

$$A_{ij}^{sym} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{ij} = -A_{ji} \quad (4.26)$$

Die Elemente auf der Hauptdiagonalen eines *antisymmetrischen* Tensors (Gl. 4.26) verschwinden ($A_{11} = -A_{11} \Rightarrow A_{11} \equiv 0$ usw.), so dass er durch folgendes Schema gekennzeichnet ist:

$$A_{ij}^{anti} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & -A_{31} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & A_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Aufgrund des Vorzeichenwechsels bei der Spiegelung an der Hauptdiagonalen kann man den *antisymmetrischen* bzw. *antimetrischen* Anteil auch *schiefsymmetrisch* oder *alternierend* nennen.

4.2.3 Eigenwerte, -vektoren und *Invarianten*

Bekanntlich erzeugt ein Tensor A_{ij} zweiter Stufe beim Einwirken auf einen Vektor X_i einen Vektor Y_i gemäß der linearen Abbildung

$$Y_i = A_{ij} X_j. \quad (4.28)$$

Hierbei unterscheiden sich die Vektoren X_i und Y_i je nach Tensor A_{ij} im Allgemeinen durch ihre Länge und Richtung. In einem sogenannten *Hauptachsensystem* haben beide Vektoren dieselbe Richtung. In diesem Sonderfall ändert der auf X_i einwirkende Tensor A_{ij} nicht seine Richtung, sondern nur seinen Betrag. Dann muss gelten:

$$Y_i = \lambda X_i \quad (4.29)$$

Aus den Gln. 4.28 und 4.29 folgt unter Berücksichtigung der Austauschregel:

$$(A_{ij} - \lambda \delta_{ij}) X_j = 0 \quad (4.30)$$

Das daraus folgende Ergebnis stellt ein System von drei homogenen linearen Gleichungen zur Bestimmung der drei unbekanntenen Koordinaten des Vektors X_j dar. Aufgrund der *Cramerschen* Regel liegt eine nichttriviale Lösung für X_j vor, wenn die Koeffizientendeterminante in Gl. 4.30 verschwindet:

$$\det(A_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0. \quad (4.31)$$

Hieraus folgt eine kubische Gleichung, die sogenannte charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (4.32)$$

des Tensors A_{ij} zur Bestimmung der Eigenwerte λ_1 , λ_2 und λ_3 . Da in der charakteristischen Gleichung 4.32 der Eigenwert λ eine skalare Größe ist (Gl.4.29), müssen die Koeffizienten I_1 , I_2 und I_3 , die sogenannten *Invarianten* des Tensors A_{ij} (Gl. 4.32) ebenfalls skalare Größen sein, d. h. sie sind unabhängig vom Koordinatensystem. Durch Koeffizientenvergleich aus Gln. 4.31 und 4.32 sind für die Invarianten folgende Beziehungen herleitbar:

$$I_1 = I_1(A_{ij}) = \delta_{ij} A_{ij} = A_{ii} = \text{Spur}(A_{ij}) \quad (4.33)$$

$$I_2 = I_2(A_{ij}) = \frac{1}{2} (A_{ii} A_{jj} - A_{ij} A_{ji}) \quad (4.34)$$

$$I_3 = I_3(A_{ij}) = \det(A_{ij}) \quad (4.35)$$

Setzt man in das lineare Gleichungssystem Gl. 4.30 der Reihe nach die Eigenwerte λ ein, so erhält man für jeden λ -Wert ein System von drei homogenen linearen Gleichungen. Jedem Eigenwert λ ist somit ein *Eigenvektor* X_j zugeordnet. Aufgrund der Homogenität des linearen Gleichungssystems sind die Eigenvektoren nur der Richtung nach bestimmt, während ihre Beträge und ihre Orientierungen beliebig sein können, so dass man streng genommen nur von *Eigenrichtungen* sprechen kann. Hier sei auch auf D. Jou, J. Casas-Vázquez und M. Criado-Sanco [8], sowie auf S. Kessel [10], verwiesen.

4.2.4 *Isotropie, Anisotropie und Deviatoren*

Ein beliebiger Tensor zweiter Stufe A_{ij} , der nicht unbedingt *symmetrisch* oder *antisymmetrisch* ist, kann, wie in Kap. 4.2.2 erklärt, in einen *symmetrischen* A_{ij}^{sym} und *antisymmetrischen* Tensor A_{ij}^{anti} zerlegt werden. Ein anderes Charakteristikum eines Tensors zweiter Stufe ist seine *Isotropie* oder *Anisotropie*. Ein Tensor zweiter Stufe ist *isotrop*, wenn seine gemischten Indizes verschwinden und seine Diagonalelemente identisch sind, d.h. wenn

$$A_{ij} = 0 \quad \forall \quad i \neq j \quad \text{und} \quad A_{ii} = A_{jj} \quad \forall \quad i, j \quad (4.36)$$

gilt. *Isotrope* Tensoren A_{ij}^{iso} haben keine ausgezeichneten Richtungen und sind von einer beliebigen Drehung des Koordinatensystems unbeeinflusst. Ein Tensor zweiter Stufe gilt als *anisotrop*, wenn sich bei einer Drehung das Koordinatensystem ändert. Nun kann jeder *symmetrische* Tensor zweiter Stufe in einen *isotropen*, den sogenannten speziellen *Kugeltensor* A_{ij}^{Kug} , und den *anisotropen* Tensor, den sogenannten *Deviator*, zerlegt werden. Der spezielle *Kugeltensor* und der *Deviator* sind den folgenden Beziehungen gemäß definiert:

$$A_{ij} = A_{ij}^{Dev} + A_{ij}^{Kug} \quad (4.37)$$

$$A_{ij}^{Kug} := \frac{1}{3} A_{kk} \delta_{ij} \quad (4.38)$$

$$A_{ij}^{Dev} = A_{ij} - \frac{1}{3} A_{kk} \delta_{ij} \quad (4.39)$$

Der *Deviator* hat aufgrund seiner Definition (Gl. 4.39) die besondere Eigenschaft, dass seine Spur verschwindet:

$$A_{ii}^{Dev} = A_{ii} - \frac{1}{3} A_{kk} \delta_{ii} = A_{ii} - A_{kk} \equiv 0 \quad (4.40)$$

Für einen *Deviator* vereinfachen sich die unter Kapitel 4.2.3 hergeleiteten Beziehungen für die Invarianten. Aus den Gleichungen 4.33, 4.34 und 4.35 folgt damit:

$$I_1 = I_1(A_{ij}^{Dev}) = \delta_{ij} A_{ij}^{Dev} = A_{ii}^{Dev} = \text{Spur}(A_{ij}^{Dev}) = 0 \quad (4.41)$$

$$I_2 = I_2(A_{ij}^{Dev}) = \frac{1}{2} (A_{ii}^{Dev} A_{jj}^{Dev} - A_{ij}^{Dev} A_{ji}^{Dev}) = -\frac{1}{2} A_{ij}^{Dev} A_{ji}^{Dev} \quad (4.42)$$

$$I_3 = I_3(A_{ij}^{Dev}) = \det(A_{ij}^{Dev}) \quad (4.43)$$

Unter Heranziehung der Gleichung von *Cayley-Hamilton* kann die letzte Gleichung 4.43 in die Form

$$I_3 = I_3(A_{ij}^{Dev}) = \frac{1}{3} A_{ij}^{Dev} A_{jk}^{Dev} A_{ki}^{Dev} = \frac{1}{3} (A_{ij}^{Dev})^3 \quad (4.44)$$

gebracht werden.

4.3 Geschwindigkeitsgradiententensor

Im Rahmen dieser Arbeit sollen verschiedene Turbulenzeigenschaften der drallbehafteten Strömung in einem Rohr analysiert werden. Zu den wichtigsten Termen, die uns darüber Auskunft geben können, gehören der Geschwindigkeitsgradienten- und der Reynolds'sche Spannungstensor. Im Folgenden soll der Geschwindigkeitsgradiententensor in kartesischen Koordinaten und in zylindrischen Polarkoordinaten hergeleitet werden.

4.3.1 In kartesischen Koordinaten

Es sei ein Geschwindigkeitsfeld durch $\vec{u} = u_i(x_j)$ gegeben, wobei für $i, j = 1, 2, 3$ gilt. Für den Geschwindigkeitsgradiententensor gilt dann folgende Beziehung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = S_{ij} + W_{ij} \quad (4.45)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.46)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.47)$$

Hierbei ist S_{ij} der Deformationstensor und W_{ij} der Drehungstensor. Der Geschwindigkeitsgradiententensor $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ kann in Form einer (3,3)-Matrix dargestellt werden. Mit $i, j = 1, 2, 3$ und $u_1 = v_x$, $u_2 = v_y$ und $u_3 = v_z$, sowie $x_1 = x$, $x_2 = y$ und $x_3 = z$ ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Vollständigkeitshalber sollen hier die Ausdrücke für den Deformations- und Drehungstensor in kartesischen Koordinaten angegeben werden:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

4.3.2 In Polarkoordinaten

Analog zu den Formulierungen in kartesischen Koordinaten sollen nun Ausdrücke für den Deformationstensor S_{ij} und den Drehungstensor W_{ij} in Polarkoordinaten hergeleitet werden. Es gilt weiterhin für den Geschwindigkeitsgradienten die Beziehung aus Gleichung 4.45. Im Folgenden gilt $i, j = 1, 2, 3$ und $u_1 = v_x$, $u_2 = v_r$ und $u_3 = v_\varphi$, sowie $x_1 = x$, $x_2 = r$ und $x_3 = \varphi$. In zylindrischen Polarkoordinaten wird der *symmetrische* Teil des Geschwindigkeitsgradiententensors, der sogenannte Deformationstensor (*rate-of-strain tensor*), durch folgende Matrix ausgedrückt:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xr} & S_{x\varphi} \\ S_{xr} & S_{rr} & S_{r\varphi} \\ S_{x\varphi} & S_{r\varphi} & S_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

Nach G. K. Batchelor [1] sind die einzelnen Komponenten wie folgt definiert:

$$S_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (4.52)$$

$$S_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (4.53)$$

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \quad (4.54)$$

$$S_{xr} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial r} \quad (4.55)$$

$$S_{r\varphi} = \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \quad (4.56)$$

$$S_{x\varphi} = \frac{1}{2r} \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \quad (4.57)$$

Mit diesen Komponenten (Gln. 4.52 - 4.57) läßt sich der Deformationstensor S_{ij} wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) & \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Der *antimetrische* Teil des Geschwindigkeitsgradienten, der sogenannte Drehungstensor (*spinning tensor*), ist in Anlehnung an J. Piquet [19] durch

$$W_{ij} = -\epsilon_{ijk} \omega_k \quad (4.59)$$

gegeben. Das Ausschreiben des Drehungstensors ergibt:

$$W_{ij} = - \begin{pmatrix} \epsilon_{111} \omega_1 + \epsilon_{112} \omega_2 + \epsilon_{113} \omega_3 & \cdots & \epsilon_{131} \omega_1 + \epsilon_{132} \omega_2 + \epsilon_{133} \omega_3 \\ \epsilon_{211} \omega_1 + \epsilon_{212} \omega_2 + \epsilon_{213} \omega_3 & \cdots & \epsilon_{231} \omega_1 + \epsilon_{232} \omega_2 + \epsilon_{233} \omega_3 \\ \epsilon_{311} \omega_1 + \epsilon_{312} \omega_2 + \epsilon_{313} \omega_3 & \cdots & \epsilon_{331} \omega_1 + \epsilon_{332} \omega_2 + \epsilon_{333} \omega_3 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

Hierbei gilt für den ϵ -Tensor die allgemein bekannte Permutationsregel (Gl. 4.61):

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} +1 & \text{für } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{für } ijk = 321, 213, 132 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.61)$$

Nach Anwendung der Permutationsregel für den ϵ -Tensor bleibt für den Drehungstensor folgender Ausdruck übrig:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_\varphi & \omega_r \\ \omega_\varphi & 0 & -\omega_x \\ -\omega_r & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

Nach H. Schlichting und K. Gersten [25] sind die Winkelgeschwindigkeiten wie folgt definiert:

$$\omega_x = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \quad (4.63)$$

$$\omega_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \right) \quad (4.64)$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \quad (4.65)$$

Mit diesen Komponenten (Gln. 4.63 - 4.65) läßt sich der Drehungstensor wie folgt darstellen:

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Für den Geschwindigkeitsgradiententensor ergibt sich nach Gleichung 4.45 mit den ermittelten Tensoren (Gln. 4.58 und 4.66) folgende Matrix:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v_r}{\partial x} & \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} & \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

Unter der Annahme eines rotationssymmetrischen Strömungsverlaufes, von welchem wir bei unseren Messungen ausgehen, vereinfacht sich der Tensor zu:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial x} & \frac{\partial v_r}{\partial r} & -\frac{v_\varphi}{r} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} & \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & +\frac{v_r}{r} \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

4.4 Reynolds'scher Spannungstensor

Im Folgenden sollen ausgehend vom Spannungstensor Überlegungen für den Reynolds'schen Spannungstensor angestellt werden.

4.4.1 Spannungstensor in kartesischen Koordinaten

Bei zähen Fluiden wirken auf die Oberfläche eines Teilchens neben Normalkräften auch Tangentialkräfte. Die resultierende Oberflächenkraft steht daher im Allgemeinen schief auf der Fläche. Wie aus der Mechanik bekannt ist, wird der Spannungszustand in einem Kontinuum durch den Spannungstensor σ_{ij} beschrieben, der in Matrixform wie folgt definiert ist:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

Bei den Normalspannungen σ_{ij} ($i = j$) und Schubspannungen σ_{ij} ($i \neq j$) gibt der erste Index die Richtung des Normalenvektors der Fläche an, an der die Spannung angreift; der zweite Index gibt die Richtung an, in der die Schubspannung wirkt. Die Richtungen der Komponenten sind so festgelegt, dass auf einer Fläche mit positiv gerichtetem Normalenvektor auch die Spannungskomponenten in die positive Achsrichtung zeigen und umgekehrt.

Aufgrund des *Boltzmann-Axioms* gilt:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad (4.70)$$

Der Spannungstensor ist demnach *symmetrisch*:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

Bei zähen Fluiden hängen die auftretenden Spannungen von den Deformationsgeschwindigkeiten ab, ähnlich wie in elastischen Körpern die Spannungen den Deformationen selbst proportional sind. Solche Beziehungen nennt man *Stoffgesetze*. Sie sind, sofern sie nicht aus der Struktur der Stoffe hergeleitet werden, empirische Gesetze mit empirischen Stoffwerten. Bei analytischer Behandlung fordert man oft umgekehrt ein bestimmtes *Stoffgesetz*. Als *Newtonsches Fluid* bezeichnet man Fluide, deren *Stoffgesetze* die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Für verschwindende Zähigkeit müssen die Schubspannungen verschwinden.
- Die Beziehung zwischen den Spannungen und den partiellen Ableitungen der Geschwindigkeiten ist linear.
- Das Stoffgesetz muss unabhängig von der Lage des Koordinatensystems sein (*isotropes Medium*).

Der Spannungstensor enthält drei untereinander verschiedene Normalspannungen σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{zz} . Bei Verschwinden der Zähigkeit müssen entsprechend der ersten Bedingung die Schubspannungen verschwinden. Es ist bekannt, dass dann die Normalspannung nach allen Richtungen gleich ist:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \quad (4.72)$$

Der Einfluss der Zähigkeit kann sich demnach nur auf die Abweichung der tatsächlichen Spannung vom mittleren Druck

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (4.73)$$

beziehen. Der so definierte mittlere Druck erfüllt die dritte Bedingung der Unabhängigkeit von der Koordinatenrichtung, weil die Summe der Elemente der Hauptdiagonalen eines Tensors richtungsunabhängig ist. Die Zusatzspannungen $\tilde{\sigma}_{xx}$, $\tilde{\sigma}_{yy}$ und $\tilde{\sigma}_{zz}$ als Abweichung vom mittleren Druck sind dann durch folgende Gleichungen definiert:

$$\sigma_{xx} = -p + \tilde{\sigma}_{xx} \quad (4.74)$$

$$\sigma_{yy} = -p + \tilde{\sigma}_{yy} \quad (4.75)$$

$$\sigma_{zz} = -p + \tilde{\sigma}_{zz} \quad (4.76)$$

Somit läßt sich der Spannungstensor in die folgenden Tensoren aufspalten:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \tilde{\sigma}_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \tilde{\sigma}_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{Reibungstensor } \sigma_{ij}^R} \quad (4.77)$$

Der erste Tensor auf der rechten Seite beschreibt das Spannungsfeld in einem reibungsfreien Fluid. Der zweite Tensor, der sogenannte Reibungstensor σ_{ij}^R , tritt nur in zähen Medien auf. Deshalb kann sich auch das *Stoffgesetz* des zähen Fluids nur auf diesen Reibungstensor beziehen. Nach der zweiten Bedingung sollen die Spannungen eine lineare Funktion der Geschwindigkeitsgradienten sein.

4.4.2 Reynolds'scher Spannungstensor in Polarkoordinaten

Analog zu den Formulierungen in kartesischen Koordinaten für den Spannungstensor soll nun eine Beziehung für den Reynolds'schen Spannungstensor τ_{ij} in zylindrischen Polarkoordinaten hergeleitet werden.

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{v_x'^2} & \overline{v_x' v_r'} & \overline{v_x' v_\varphi'} \\ \overline{v_x' v_r'} & \overline{v_r'^2} & \overline{v_r' v_\varphi'} \\ \overline{v_x' v_\varphi'} & \overline{v_x' v_\varphi'} & \overline{v_\varphi'^2} \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

In Anlehnung an die Umformungen, die im kartesischen Koordinatensystem durchgeführt sind, soll versucht werden, den Reynolds'schen Spannungstensor zu gliedern, damit sein Zusammenhang mit dem Geschwindigkeitsgradiententensor untersucht werden kann. Der Reynolds'sche Spannungstensor enthält drei untereinander verschiedene Normalspannungen $\overline{v_x'^2}$, $\overline{v_r'^2}$ und $\overline{v_\varphi'^2}$. Bei Verschwinden der Zähigkeit müssen entsprechend der ersten Bedingung die Schubspannungen verschwinden. Es ist bekannt, dass dann die Normalspannung nach allen Richtungen gleich ist:

$$\overline{v_x'^2} = \overline{v_r'^2} = \overline{v_\varphi'^2} = \delta \quad (4.79)$$

Der Einfluss der Zähigkeit kann sich demnach nur auf die Abweichung der tatsächlichen Reynolds'schen Spannung von

$$\delta = \frac{1}{3} (\overline{v_x'^2} + \overline{v_r'^2} + \overline{v_\varphi'^2}) \quad (4.80)$$

beziehen. Mit Bildung einer Vergleichsspannung δ oder aber mit anderen mathematischen Operationen ist es möglich den Reynolds'schen Spannungstensor in

einen *isotropen* und *anisotropen* Tensor zu gliedern.

In Kapitel 5 wird der Vorgang, welcher hier angerissen ist, je nach zu analysierender Turbulenzeigenschaft fortgeführt.

Kapitel 5

Analyse der drallbehafteten turbulenten Strömung

In diesem Kapitel sollen nun die aufgenommenen Messwerte dahingehend ausgewertet und analysiert werden, dass verschiedene Turbulenzeigenschaften der drallbehafteten Strömung in einem Rohr zu erkennen sind. Diese Arbeit ist als eine Fortführung von früheren Arbeiten ([21], [27] und [28]) zu sehen und soll auch als Grundlage für weitere fungieren. In Kapitel 4 wurden die theoretischen Grundlagen gründlich ausgearbeitet. Es sei vorweg genommen, dass einige vorgeführte Analysen – aufgrund ihrer Komplexität – nicht vollkommen abzuschließen sind. Als Ergänzung zu vorherigen Arbeiten ist die Untersuchung des „laminarisieren“ Kernbereiches der drallbehafteten turbulenten Strömung (Kapitel 5.1) zu sehen. Im Gegensatz hierzu sind vorallem die Überlegungen und Auswertungen der Anisotropieeigenschaften des Reynolds’schen Spannungstensors (Kapitel 5.2), der dominanten Strukturen des Geschwindigkeitsgradiententensors (Kapitel 5.3) und der Ausrichtung des Deformations- und Reynolds’schen Spannungstensors (Kapitel 5.4) – zumindest für unsere Arbeitsgruppe – als Vorstöße in neue Richtungen zu betrachten.

5.1 Eigenschaften im Kernbereich der Strömung

Im Folgenden soll jener Bereich der drallbehafteten turbulenten Strömung in einem Rohr ermittelt werden, in welchem von einer „Laminarisierung“ gesprochen werden kann, d. h. in welchem die Reynolds’schen Schubspannungen ($\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad \forall \quad i \neq j$) in Relation zu den Reynolds’schen Normalspannungen ($\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad \forall \quad i = j$) als inaktiv betrachtet werden können. Um analog zu I. Schmitz [28] den „laminarisierten“ Kernbereich für verschiedene Rotations-Zahlen entlang der Strömungsrichtung darzustellen (Kap. 5.1.2), bedarf es der Kenntnis der Geschwindigkeitsprofile (Kap. 5.1.1), des Verlaufs des örtlichen Dralls über der Stromfunktion (siehe R. Örlü [18]), sowie der Grenzschichtdicke (Kap. 5.1.2.1). Anschließend soll ein von Frau Ji Nan [17] entwickeltes Simulationsprogramm anhand der experimentell gewonnenen Daten validiert werden (Kap. 5.1.3).

5.1.1 Gemessene Geschwindigkeitsprofile

Die Abbildungen 5.1–5.3 zeigen den Axial- und Tangentialgeschwindigkeitsverlauf über dem Radius für verschiedene Stellen entlang der Strömungsrichtung. Da für spätere Auswertungen (siehe Kap. 5.3) eine analytische Referenzströmung hilfreich sein könnte, ist über jedes diskrete Geschwindigkeitsprofil eine stetige Näherungsfunktion gelegt. Hierbei handelt es sich um eine drallbehaftete Strömung, die in Strömungsrichtung vollausbildet ist und keine Geschwindigkeit in radialer Richtung besitzt. Der analytische Axial- und Umfangsgeschwindigkeitsverlauf wird im Folgenden kurz beschrieben.

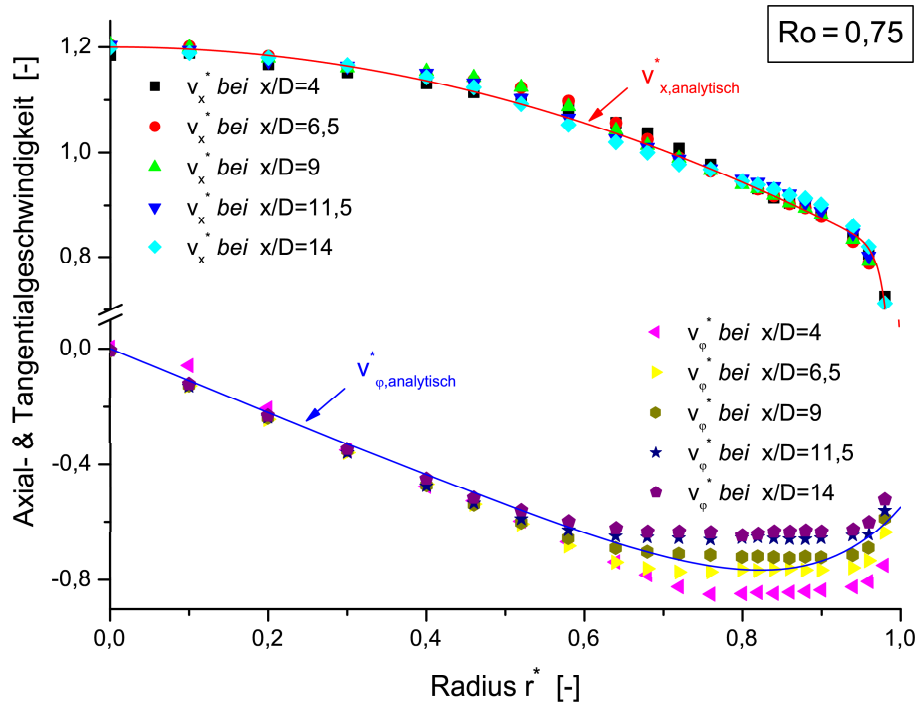


Abbildung 5.1: Axial- und Tangentialgeschwindigkeitsprofil für $Ro = 0,75$

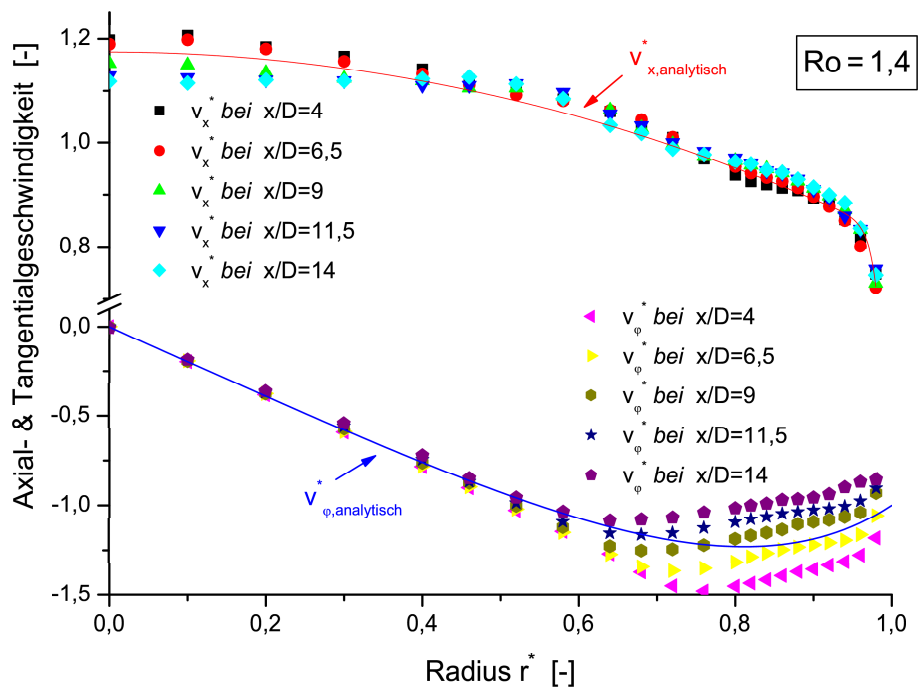
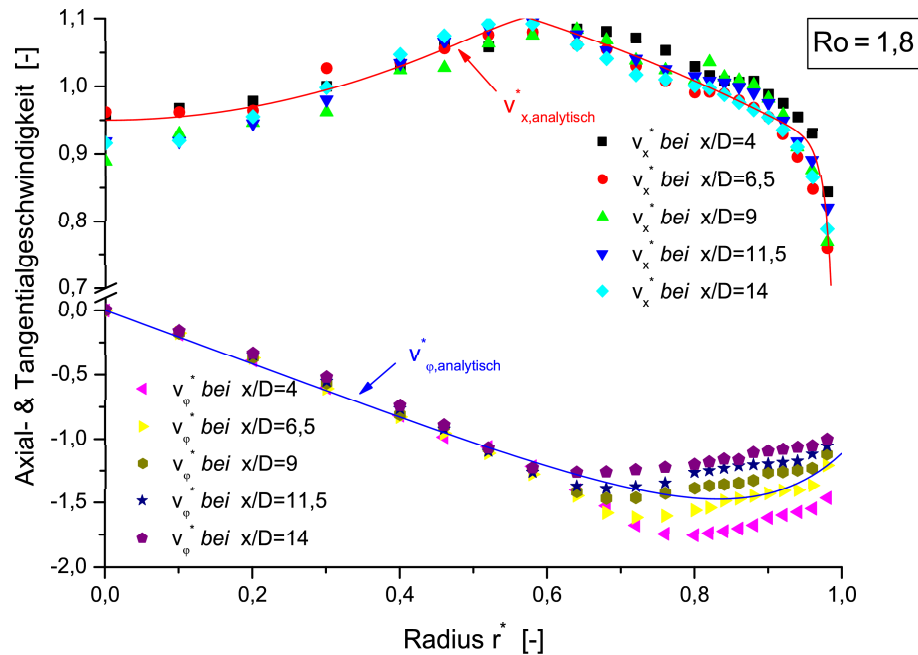


Abbildung 5.2: Axial- und Tangentialgeschwindigkeitsprofil für $Ro = 1,4$

Abbildung 5.3: Axial- und Tangentialgeschwindigkeitsprofil für $Ro = 1,8$

5.1.1.1 Umfangsgeschwindigkeitsverlauf

Für große Radien lässt sich der Verlauf durch einen Potentialwirbel wiedergeben, doch steigt dafür im Wirbelzentrum die Geschwindigkeit ins Unendliche. Durch Annahme einer Starr- bzw. Festkörperrotation ist der Verlauf im Zentrum des Wirbels, was auf den Drallerzeuger zurückzuführen ist (vgl. Kap. 2.2), wiedergegeben. Da diese Aufteilung in zwei verschiedene mathematische Modelle eine Unstetigkeit im Übergang von einer Starrkörperrotation bei kleinen Radien in einen Potentialwirbel bei großen Radien verursachen würde, erscheint die in Gleichung 5.1 dargestellte Geschwindigkeitsverteilung sinnvoller zu sein, da sie weder eine Unstetigkeitsstelle in der Ableitung, noch eine Unendlichkeit der Geschwindigkeit im Zentrum voraussagt. Die Koeffizienten aus Gleichung 5.1 sind empirisch ermittelt worden (Abbildung 5.4).

$$v_{\phi,analytisch}^* = -l r \cdot (m - n e^{-\frac{p-r}{q}}) \quad (5.1)$$

	l	m	n	p	q
Ro=0,75	1,1	1	0,5	1	0,15
Ro=1,4	2	1	0,5	1	0,26
Ro=1,8	1,9	1,1	1	1,1	0,15

Abbildung 5.4: *Empirisch ermittelte Koeffizienten des Umfangsgeschwindigkeitsverlaufes*

5.1.1.2 Axialgeschwindigkeitsverlauf

In Anlehnung an Gleichung 5.1 ergibt sich für die Axialgeschwindigkeit eine Überlagerung einer konstanten Geschwindigkeit mit einer Verteilung, welche den Drall beschreibt. Damit ergibt sich, mit den empirisch ermittelten Koeffizienten aus Abbildung 5.5, die Beziehung in Gleichung 5.2.

$$v_{x,analytisch}^* = (a + b r^2) \cdot (1 - e^{-\frac{1-cr}{d}}) \quad (5.2)$$

	a	b	c	d
Ro=0,75	1,2	-0,4	1	0,01
Ro=1,4	1,75	-0,35	1	0,01
Ro=1,8 $r^* \leq 0,6$	0,95	0,5	1,35	0,05
Ro=1,8 $r^* \geq 0,6$	1,2	-0,3	1	0,01

Abbildung 5.5: *Empirisch ermittelte Koeffizienten des Axialgeschwindigkeitsverlaufes*

5.1.2 „Laminarisierungseffekt“ in drallbehafteten Strömungen

Wie in den gezeigten Abbildungen 5.1–5.3 zu erkennen ist, klingt der Drall nur von der Rohrwand her ab. In der Mitte bleibt ein Bereich mit Starrkörperrotation bestehen. In diesem Bereich ist die Winkelgeschwindigkeit in radialer Richtung konstant. Diese Festkörperrotation im Kernbereich der Strömung dämpft die Turbulenz und die Strömung wird in einem Bereich um die Rohrachse nahezu laminar (vgl. [21], [27] und [28]). In der Arbeitsgruppe um Prof. Dr.-Ing. Vasanta Ram wird unter anderem versucht, die drallbehaftete turbulente Strömung in einem Rohr unter Annahme eines „laminarisierten“ Kernbereiches zu simulieren. Um zum einen analog zur Arbeit von I. Schmitz [28] mit den gemessenen Daten einen tendentiellen Verlauf des „laminarisierten“ Kernbereiches in Abhängigkeit von der Rotations-Zahl bereitzustellen und zum anderen die Verdrängungswirkung aus den Messungen für die numerische Simulation bereitzuhalten, ist die Kenntnis der Grenzschichtdicke und der Verdrängungswirkung bzw. der Verdrängungsdicke notwendig.

5.1.2.1 Verdrängungswirkung der Grenzschicht

Die Verdrängungswirkung ist nach Gleichung 5.3 definiert:

$$\delta_1 := \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{\bar{v}_{x,m}}\right) \quad (5.3)$$

Da in obiger Bestimmungsgleichung für die Verdrängungsdicke die Grenzschichtdicke die einzige Unbekannte ist, gilt es, anhand der Messdaten und der daraus resultierenden Geschwindigkeitsprofile, sowie anderer Verläufe (welche bei R. Örlü [18] dargestellt sind), Kriterien zu definieren, anhand derer entschieden werden kann, wann sich die Strömung im verwendeten Rohr in der Grenzschicht oder der Außenströmung (d. h. im laminarisierten Kernbereich) befindet. Die Verdrängungswirkung der Grenzschicht wurde anhand der folgenden drei Kriterien definiert und berechnet:

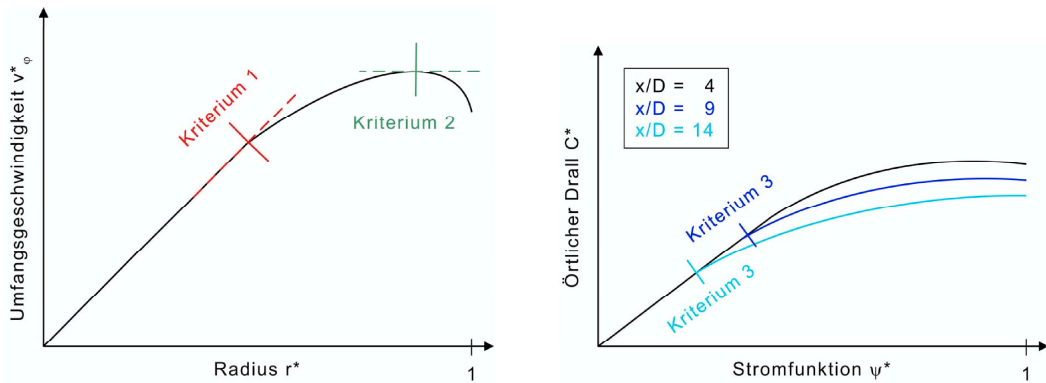


Abbildung 5.6: Grenzschicht-Kriterien 1, 2 und 3

- Kriterium 1: Der Grenzschichttrand beginnt dort, wo das lineare Umfangsgeschwindigkeitsprofil aufhört.
- Kriterium 2: Der Grenzschichttrand beginnt dort, wo das Profil der Umfangsgeschwindigkeit das Vorzeichen der Steigung ändert, d.h. wo $\frac{\partial v_\varphi^*}{\partial r} = 0$ ist.
- Kriterium 3: Der Grenzschichttrand wird im Gegensatz zu den Kriterien 1 und 2 nicht anhand des Umfangsgeschwindigkeitsprofils ermittelt, sondern anhand des Verlaufes des örtlichen Dralles über die Stromfunktion. Genau dort, wo der lineare Bereich des sogenannten $C = C(\psi)$ -Verlaufes aufhört und somit vom Verlauf bei $x = 4D$ abweicht, beginnt der Grenzschichttrand, wie in Abbildung 5.6 zu erkennen ist.

5.1.2.2 „Laminarisierter“ Kernbereich

Anlehnend an das Grenzschicht-Kriterium 3 sind die „laminarisierten“ Kernbereiche in Relation zum Verlauf von $x = 4D$ in der nachfolgenden Abbildung 5.7 dargestellt. Wie auch schon von I. Schmitz [28] erkannt, vergrößert sich der „laminarisierte“ Kernbereich bei steigender Rotations-Zahl und verkleinert sich mit zunehmendem Abstand vom Drallerzeuger. Mittels der anderen beiden

Grenzschicht-Kriterien sind ähnliche Verläufe zu gewinnen, welche aber nicht Gegenstand der Untersuchung sind. Mehr hierzu ist im Anhang B zu finden.

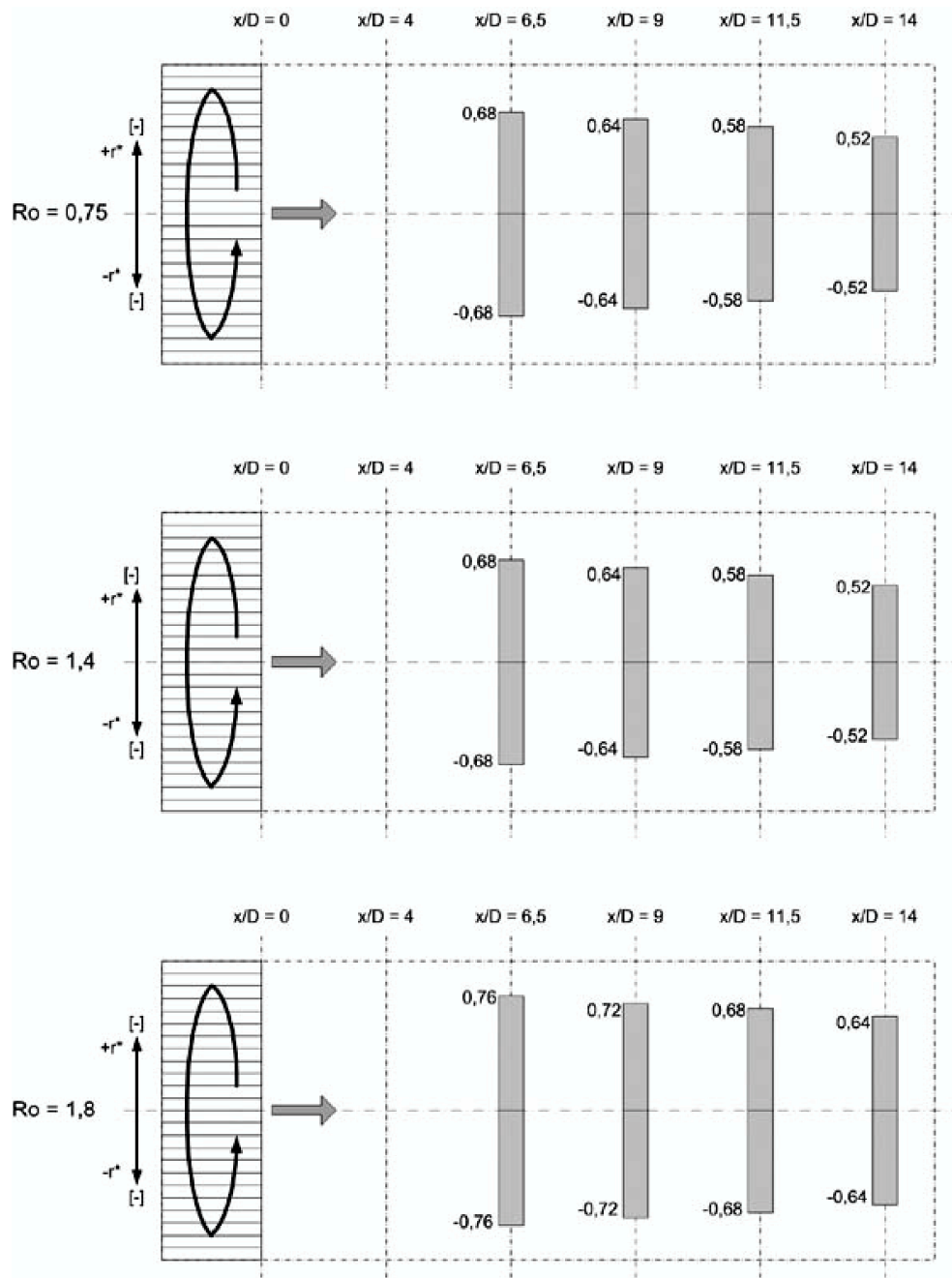


Abbildung 5.7: *Laminarisierter Kernbereich nach Kriterium 3*

5.1.3 Simulation der drallbehafteten Strömung

Wie bereits in Kapitel 5.1.2 erwähnt, hat Frau Ji Nan [17] im Rahmen ihrer *Master Thesis* ein Programm entwickelt, das die drallbehaftete turbulente und rotationssymmetrische Strömung in einem Rohr unter Annahme eines „laminierten“ Kernbereiches simuliert. Für Validierungszwecke wurden daher die in Kapitel 5.1.1 und 5.1.2 ermittelten Werte benötigt. Im Folgenden soll ein Vergleich der simulierten und der realen Strömung vollzogen werden, um Schwachpunkte des Programmes ausfindig zu machen. Zur Theorie und ihren Annahmen, zum Algorithmus des Programmes, sowie zur Benutzung des Programmes sei auf [17] verwiesen. Die Resultate der Gegenüberstellung werden in Abbildung 5.8 gezeigt:

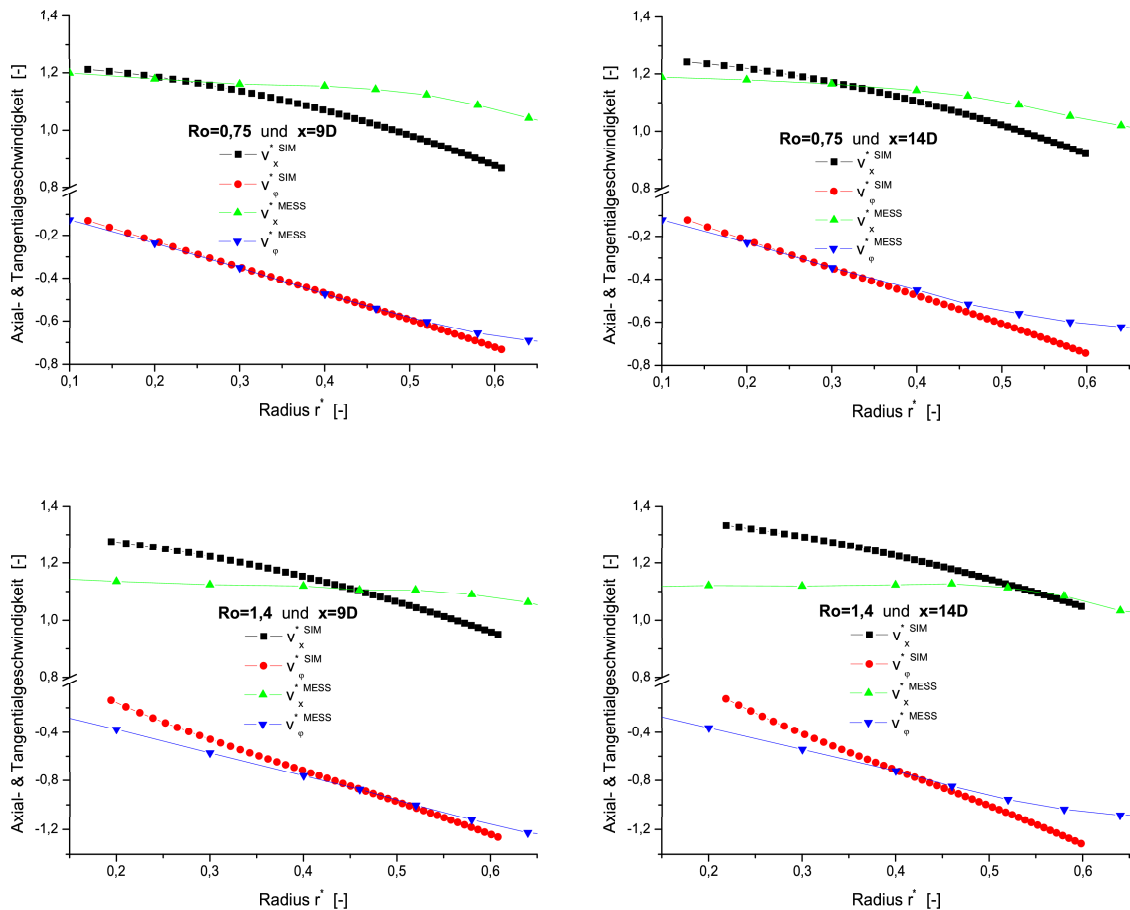


Abbildung 5.8: Gegenüberstellung von Simulation und Messung

Für das beschriebene Programm gelten folgende aufgelistete Ein- und Ausgangsdaten:

- Eingabe:
 - Geschwindigkeitsverteilung am Eintritt (Axial- und Umfangskomponente): $v_x(r)$ und $v_\varphi(r)$
 - Verlauf einer Stromlinie am Grenzbereich des „laminarisierten“ Kernbereiches $\psi(x)|_{Rand}$
- Ausgabe:
 - Geschwindigkeitsverteilungen an beliebigen Stellen entlang der Strömungsrichtung: $v_x(x, r)$ und $v_\varphi(x, r)$
 - Stromlinienverlauf: $\psi(x, r)$

Eine Analyse der Gegenüberstellung von Messung und Simulation soll in diesem Stadium noch nicht erfolgen, da aufgrund der in Abbildung 5.8 erkennbaren erheblichen Diskrepanzen, die Überarbeitung des Programmes – in Bezug auf die Eingangsdaten – andauert.

5.2 Anisotropieeigenschaften des Reynolds'schen Spannungstensors

Die unterschiedliche Verteilung der turbulenten Schwankungen auf die drei Raumrichtungen sind die grundlegenden Eigenschaften der Dynamik von turbulenten Strömungen, dem sich dieses Unterkapitel widmet. J. L. Lumley und G. R. Newman ([13], [14] und [15]) entwickelten ein Verfahren, die sogenannte Invariantentheorie, mit dem der Einfluss dieser Anisotropie berücksichtigt werden kann. Die Anisotropie der turbulenten Schwankungen wird hierbei in Form der Invarianten I_2 und I_3 des Reynolds'schen Spannungstensors parametrisiert. Werden diese beiden Größen gegeneinander aufgetragen, so ergibt sich die sogenannte *Anisotropie-Invariantenkarte* (vgl. Abbildung 5.9). Alle möglichen Zustände müssen hiernach innerhalb einer Fläche liegen und benachbarte Punkte in der *Anisotropie-Invariantenkarte* zeigen ein ähnliches physikalisches Verhalten auf. Ergänzend zu den Publikationen von J. L. Lumley und G. R. Newman sei vor allem noch die von J. Jovanović [9] und A. van Dijk [32] erwähnt, welche die Invariantentheorie aufgreifen und kurz zusammenfassen.

Im Folgenden sollen die aufgenommenen Messwerte nach der Invariantentheorie untersucht werden. In Kapitel 5.2.1 wird dafür die Bestimmung der Invarianten erklärt, um diese mit Hilfe der Invariantenkarte (Kap. 5.2.2) zu analysieren und die Ergebnisse (Kap. 5.2.3) zu deuten.

5.2.1 Invarianten des Reynolds'schen Spannungstensors

Aufbauend auf den theoretischen Grundlagen, die in Kapitel 4.2.3 und 4.2.4 behandelt worden sind, soll nun anlehnend auf der *Invariantentheorie* der *symmetrische* Reynolds'sche Spannungstensor in einen *isotropen* und *anisotropen* Teil zerlegt werden, um anschließend die Anzahl der Invarianten von drei auf zwei zu reduzieren, in dem der *Deviator* des Reynolds'schen Spannungstensors betrachtet wird.

Da der Reynolds'sche Spannungstensor *symmetrisch* ist, kann er (vgl. Kap. 4.2.4) in einen *isotropen* und *anisotropen* Tensor zerlegt werden. Der *Deviator* lässt sich unter Einbeziehung der kinetischen Energie k (Gl. 5.4), wie in Gleichung 5.5 gegeben, berechnen:

$$k = \frac{1}{2} \tau_{ii} = \frac{1}{2} \left(\overline{v_x'^2} + \overline{v_x' v_r'} + \overline{v_x' v_\varphi'} \right) \quad (5.4)$$

$$\tau_{ij}^{Dev} = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{ii} \delta_{ij} = \tau_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (5.5)$$

Zwar ist Gleichung 5.5 mathematisch korrekt, doch wird in allen Arbeiten ([4], [9], [13], [14], [15] und [32]), ausgehend von J. L. Lumley und G. R. Newman selbst, größtenteils die – durch die kinetische Energie normierte – Gleichung 5.6 bevorzugt. Es sei darauf hingewiesen, dass sich hierbei für die Invarianten nichts ändert.

$$\tau_{ij}^{Dev} = \frac{\tau_{ij}}{2\tau_{ii}} - \frac{1}{3} \delta_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (5.6)$$

Anlehnend an die Gleichungen 4.41 – 4.43 ergeben sich folgende Beziehungen für die drei Invarianten des *anisotropen* Teiles des normierten Reynolds'schen Spannungstensors:

$$I_1 = I_1(\tau_{ij}^{Dev}) = \delta_{ij} \tau_{ij}^{Dev} = \tau_{ii}^{Dev} = \text{Spur}(\tau_{ij}^{Dev}) = 0 \quad (5.7)$$

$$I_2 = I_2(\tau_{ij}^{Dev}) = \frac{1}{2} (\tau_{ii}^{Dev} \tau_{jj}^{Dev} - \tau_{ij}^{Dev} \tau_{ji}^{Dev}) = -\frac{1}{2} \tau_{ij}^{Dev} \tau_{ji}^{Dev} \quad (5.8)$$

$$I_3 = I_3(\tau_{ij}^{Dev}) = \det(A_{ij}^{Dev}) \quad (5.9)$$

Wie zu erkennen ist, besitzt der *Deviator* des normierten Reynolds'schen Spannungstensors maximal zwei von Null verschiedene Invarianten, da die 1. Invariante *per* Definition identisch Null ist.

5.2.2 Die *Anisotropie-Invariantenkarte*

Die nicht entfallenden Invarianten, welche in Kapitel 5.2.1 berechnet wurden, lassen sich in einem 2-D Plot darstellen. Zurückgehend auf J. L. Lumley wird die 3. Invariante (I_3) als horizontale und der Betrag der 2. Invariante ($|I_2|$) als senkrechte Achse aufgetragen (Abb. 5.9).

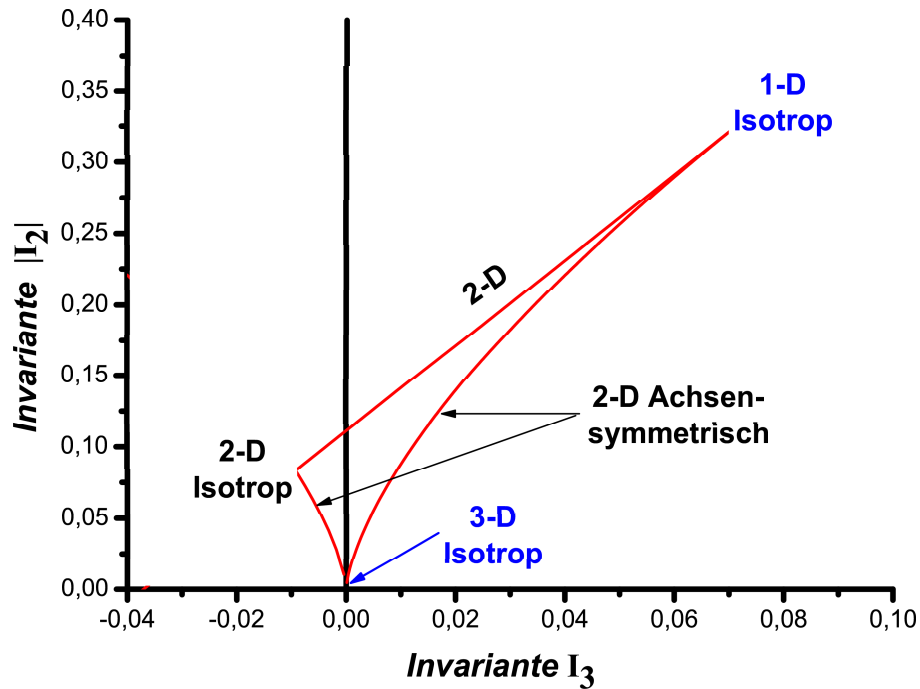


Abbildung 5.9: Anisotropie-Invariantenkarte

Das *Lumley-Diagramm* bzw. die *Anisotropie-Invariantenkarte* gibt Aufschluss über den Einfluss der Anisotropie der turbulenten Schwankungen. Die Fläche, welche alle möglichen Zustände in diesem Diagramm begrenzt, ist durch folgende Funktionen gegeben:

$$|I_2| = \frac{1}{9} + 3 I_3 \quad \text{für } 2 - D \quad (5.10)$$

$$|I_2| = 3 \left(\frac{I_3}{2} \right)^{\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \text{für } 2 - D \text{ achsensym. } I_3 \geq 0 \quad (5.11)$$

$$|I_2| = 3 \left(\frac{-I_3}{2} \right)^{\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \text{für } 2 - D \text{ achsensym. } I_3 \leq 0 \quad (5.12)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass diese Funktionen auf die Definition des normierten Reynolds'schen Spannungstensors (Gl. 5.6) bezogen sind und von daher nur für diesen Fall Geltung haben. Gleichung 5.10 kennzeichnet eine 2-D Strömung und die Gleichungen 5.11 und 5.12 eine achsensymmetrische 2-D Strömung.

5.2.3 Ergebnisse

Basierend auf den obigen Ausführungen sind im Folgenden die *Anisotropie-Invariantenkarten* für alle Rotations-Zahlen und Stellen entlang der Strömungsrichtung geplottet. Anhand dieser Diagramme können nicht nur Aussagen darüber gemacht werden, ob die betrachtete Strömung bei einer bestimmten Rotations-Zahl und einer bestimmten Stelle in Strömungsrichtung in *isotroper* $1 - D$, $2 - D$ oder $3 - D$ Form, oder aber in $2 - D$ Form – mit oder ohne Achsensymmetrie –, vorliegt. Vielmehr ist es, aufgrund der Kennzeichnung aller Messpunkte in radialer Richtung, möglich, gezielt für den Wandbereich und den „laminarisierten“ Kernbereich Annahmen bezüglich ihrer Anisotropie zu machen.

Die Analyse der *Anisotropie-Invariantenkarten* für die Rotations-Zahlen $Ro = 0,75$ (Abb. 5.10) und $Ro = 1,4$ (Abb. 5.11) zeigen in Strömungsrichtung und in radialer Richtung gleiche Tendenzen auf. Ausgehend von einer zerstreuten Verteilung der Werte im Intervall von $-0,003 \leq I_3 \leq 0,0075$ formieren sich die Punkte mit zunehmendem Abstand vom Drallerzeuger und einer Steigerung der Rotations-Zahl parallel an der, die $2 - D$ Achsensymmetrie kennzeichnenden, Linie und nehmen ein viel zusammenliegenderes Spektrum ($0,001 \leq I_3 \leq 0,0085$) ein. Auch erkennt man, unter Beachtung des „laminarisierten“ Kernbereiches (vgl. Abb. 5.7), dass sich die Werte des Wandbereiches von denen des Kernbereiches auseinanderhalten lassen.

Bei Betrachtung der *Anisotropie-Invariantenkarten* für die Rotations-Zahl $Ro = 1,8$ fällt auf, dass, abgesehen von einer Aufteilung in Wand- und Kernbereich, keine der oben beschriebenen Tendenzen zu beobachten ist. Viel augenscheinlicher ist aber, dass sich der „laminarisierte“ Kernbereich von der $2 - D$ Achsensymmetrie zur $2 - D$ Linie hinbewegt.

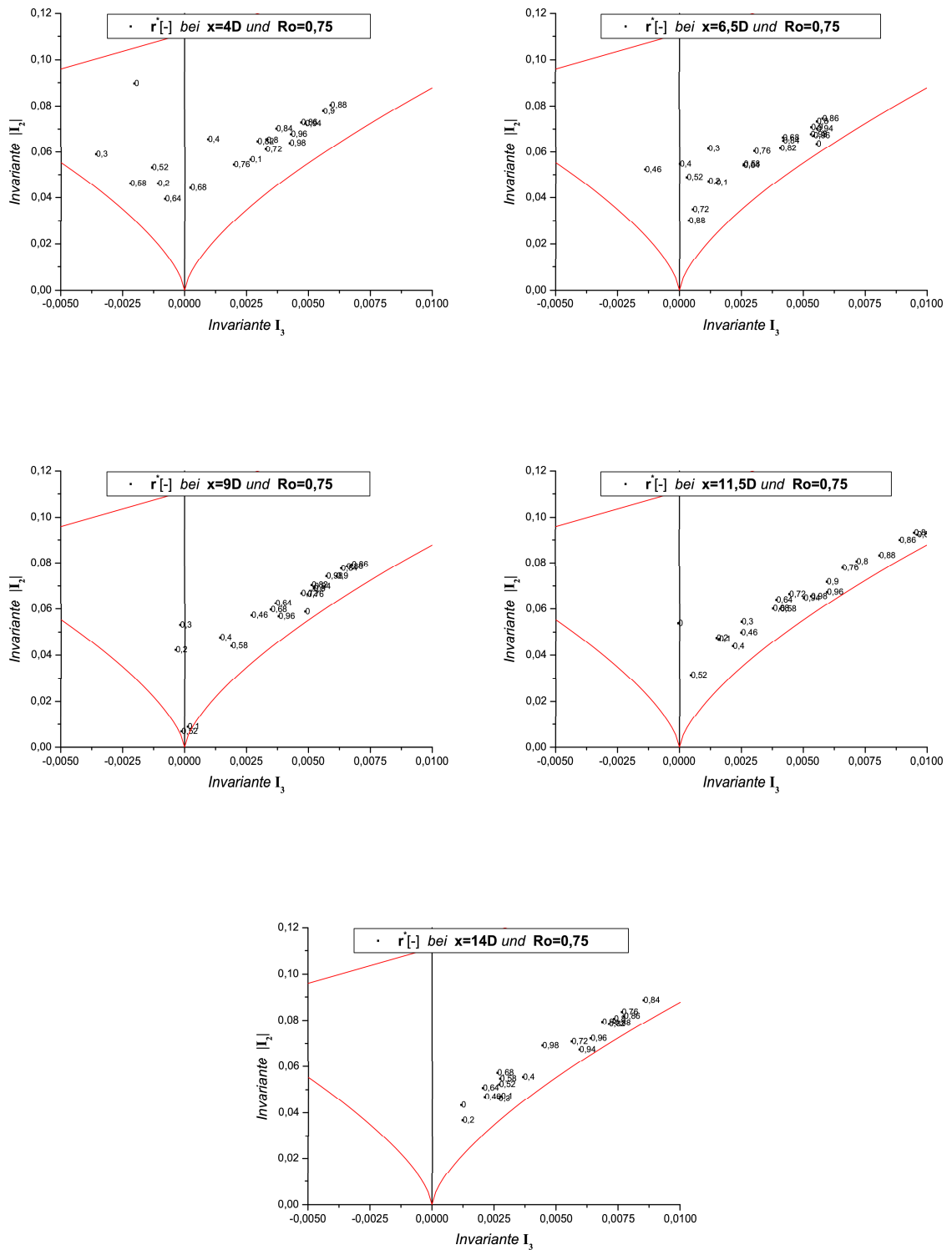


Abbildung 5.10: Anisotropie-Invariantenkarte entlang der Strömungsrichtung bei $Ro = 0,75$

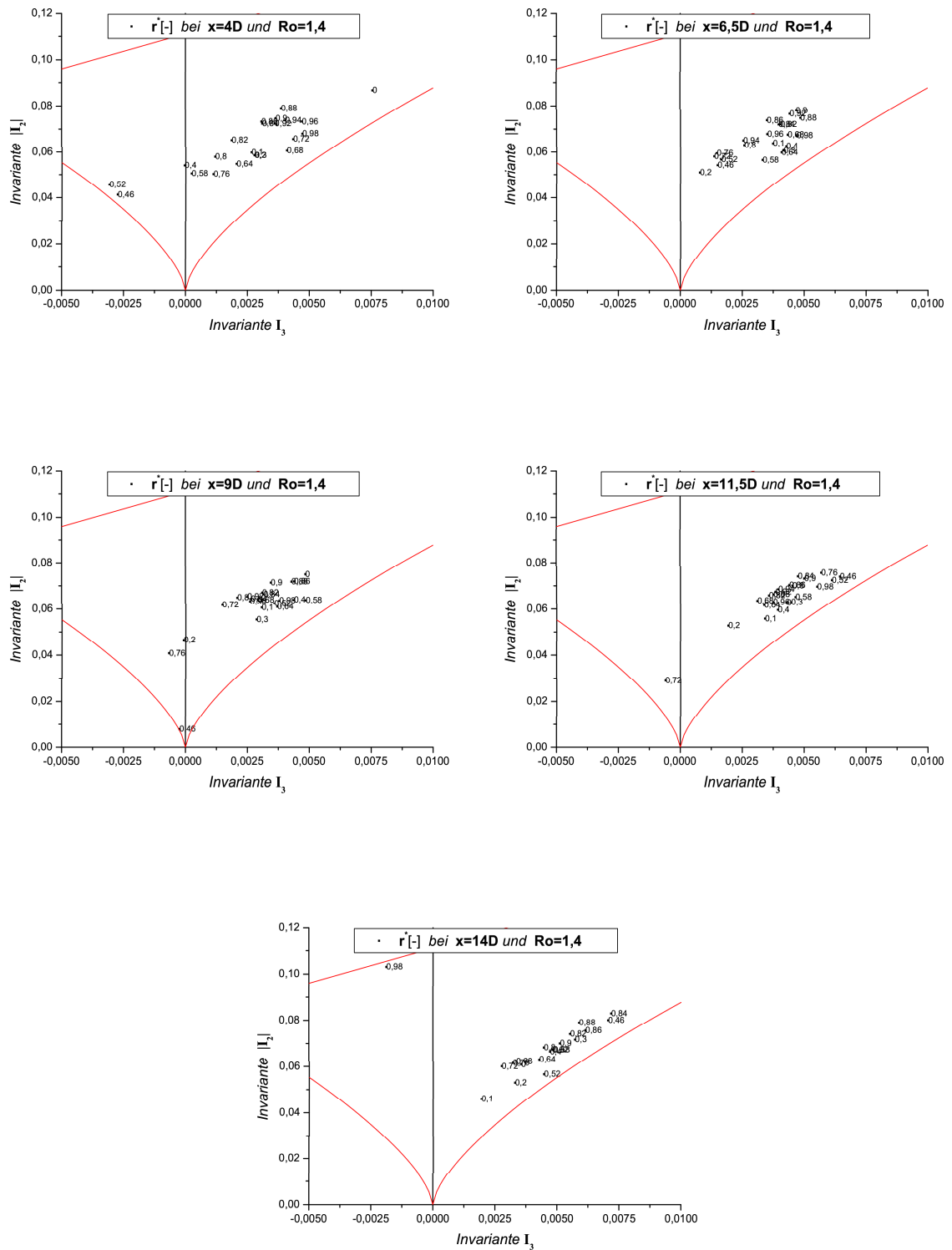


Abbildung 5.11: Anisotropie-Invariantenkarte entlang der Strömungsrichtung bei $Ro = 1,4$

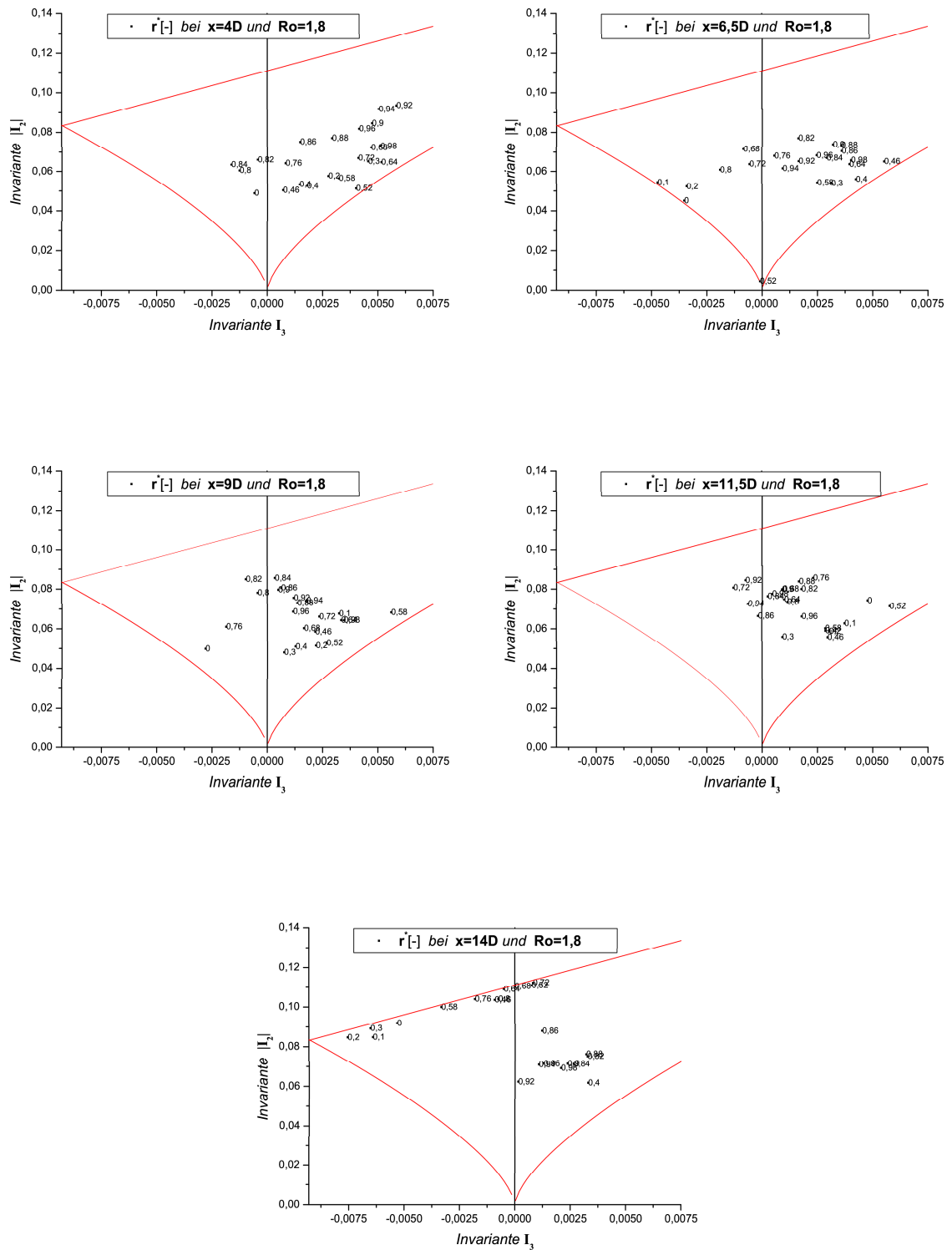


Abbildung 5.12: Anisotropie-Invariantenkarte entlang der Strömungsrichtung bei $Ro = 1,8$

Ein Vergleich der Anisotropieeigenschaften einer drallbehafteten Strömung mit einer drallfreien Strömung (Abb. 5.13) zeigt auf, dass sich die beobachteten Phänomene – die in Kern- und Wandbereich geordnete Wanderung der Messpunkte in Richtung der $2 - D$ Achsensymmetrie oder der $2 - D$ Strömung – ausschließlich auf den Drall zurückführen lassen, auch wenn eine Formierung zu erkennen ist. Die Daten für die drallfreie Strömung $Ro = 0$ entstammen der Arbeit von G. Rocklage-Marliani [21] und sind bei einer Reynolds-Zahl von $Re = 2,8 \cdot 10^5$ gemessen.

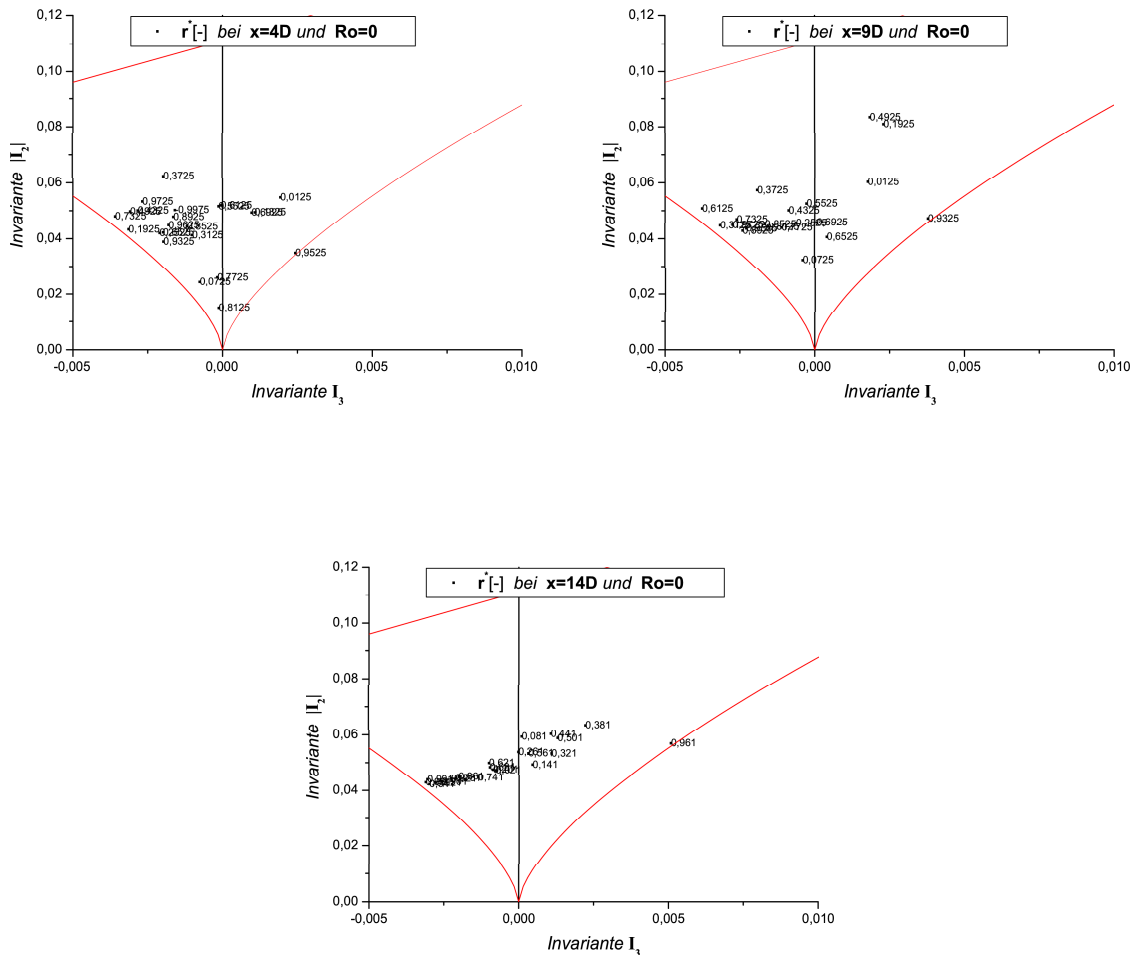


Abbildung 5.13: Anisotropie-Invariantenkarte entlang der Strömungsrichtung bei $Ro = 0$ und $Re = 2,8 \cdot 10^5$

5.3 Dominante Strukturen des Geschwindigkeitsgradiententensors

Im Gegensatz zu den Anisotropieeigenschaften des Reynolds'schen Spannungstensors lässt sich keine andere Quelle außer jene von J. Piquet [19] finden, in der eine Theorie zur Erkennung dominanter Strukturen des Geschwindigkeitsgradiententensors, welcher sich nach Gleichung 4.45 in einen Deformations- und Drehungstensor spalten lässt (vgl. Kap. 4.3), vorliegt. Mit dominanter Struktur ist hier die Tendenz des Geschwindigkeitsgradienten zu einer Deformation oder Drehung gemeint. J. Piquet unterteilt sein Diagramm zur Veranschaulichung der dominanten Strukturen (Abb. 5.14) in den Bereich der drehungsfreien Dissipation (*irrotational dissipation*), der Wirbelflächen (*vortex sheets*) und der Wirbelröhrchen (*vortex tubes*).

5.3.1 Zweite Invariante des Deformations- und Drehungstensors

Zur Veranschaulichung der dominanten Strukturen des Geschwindigkeitsgradienten ist die Kenntnis der 2. Invariante des Deformations- und Drehungstensors notwendig. Die Bestimmung dieser 2. Invariante erfolgt nach J. Piquet wie folgt:

$$I_2^S = -\frac{1}{2} S_{ij} S_{ji} \quad (5.13)$$

$$I_2^W = -\frac{1}{2} W_{ij} W_{ji} \quad (5.14)$$

Zwar ist das Diagramm zur Veranschaulichung dominanter Strukturen (Abb. 5.14) bei J. Piquet [19] abgedruckt, doch lassen sich weder Erklärungen zur Analyse des Diagrammes noch Hinweise zu den Bestimmungsgleichungen 5.13 und 5.14 bei ihm finden. Die allgemeine Definition der 2. Invariante des Deformations- und Drehungstensors lautet (vgl. Kap. 4.2.3):

$$I_2^S = \frac{1}{2} (S_{ii} S_{jj} - S_{ij} S_{ji}) \quad (5.15)$$

$$I_2^W = \frac{1}{2} (W_{ii} W_{jj} - W_{ij} W_{ji}) \quad (5.16)$$

Da der Drehungstensor W_{ij} per Definition alle Elemente seiner Spur mit Null besetzt (vgl. Gln. 4.50 und 4.66), ist der Minuend der 2. Invariante des Drehungstensors (I_2^W) identisch Null und Gleichung 5.16 geht in Gleichung 5.14 über. Gleichung 5.15 lässt sich aber nur dann in Gleichung 5.13 überführen, wenn die Spur des Deformationstensors gleich Null ist (was aber nur für *anisotrope* Tensoren, also *Deviatoren*, gegeben ist) oder aber

- in Strömungsrichtung vollausgebildet ($\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$) und
- in Umfangsrichtung rotationssymmetrisch ($\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0$) ist, sowie
- keine Geschwindigkeit in radialer Richtung ($v_r = 0$) aufweist.

Da aber keine dieser Bedingungen bei J. Piquet Erwähnung findet, ist unklar, wieso er die Gleichung 5.13 verwendet. Für die in Kapitel 5.1.1 erwähnten analytischen Referenzströmungen ändert sich in Bezug auf diese Unklarheit nichts, da diese – aufgrund der mathematischen Einfachheit – die drei Bedingungen im Ansatz bereits erfüllt haben. Bei den Messwerten werden sich aber bezüglich der 2. Invariante des Drehungstensors Diskrepanzen ergeben, auf welche aber noch im Rahmen der Ergebnisse eingegangen wird.

5.3.2 Veranschaulichung der dominanten Strukturen

Nach J. Piquet [19] werden die dominanten Strukturen des Geschwindigkeitsgradienten durch das folgende Diagramm in Abbildung 5.14 veranschaulicht. Wie aus dem Diagramm hervorgeht, sind drei dominierende Strukturen zu erkennen, je nach dem, welche der beiden 2. Invarianten relativ zur anderen größer ist.

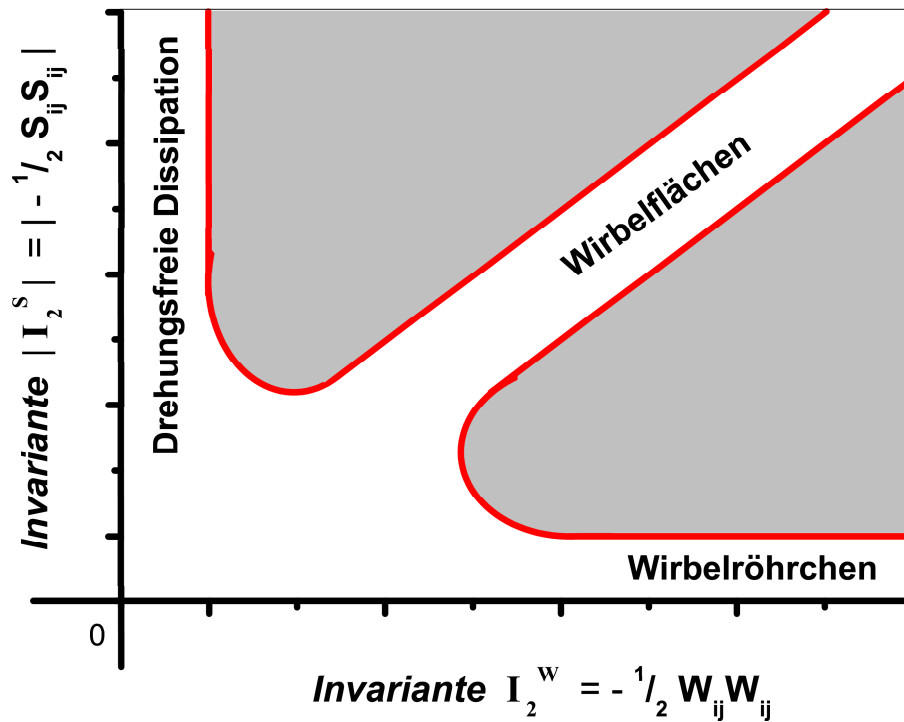


Abbildung 5.14: *Diagramm zur Veranschaulichung der dominanten Strukturen*

5.3.3 Ergebnisse

Das obige Diagramm als Grundlage nehmend, werden zur Untersuchung des Geschwindigkeitsgradienten im Folgenden die Diagramme für alle Rotations-Zahlen und alle Stellen entlang der Strömungsrichtung geplottet. Hierbei werden wiederum alle Messpunkte durch ihre Stelle auf der radialen Achse gekennzeichnet, damit auch Einblicke in die unterschiedliche Struktur des Kern- und Wandbereiches möglich sind. Die analytische Referenzströmung dient zur Orientierung und basiert auf den Informationen in Kapitel 5.1.1.

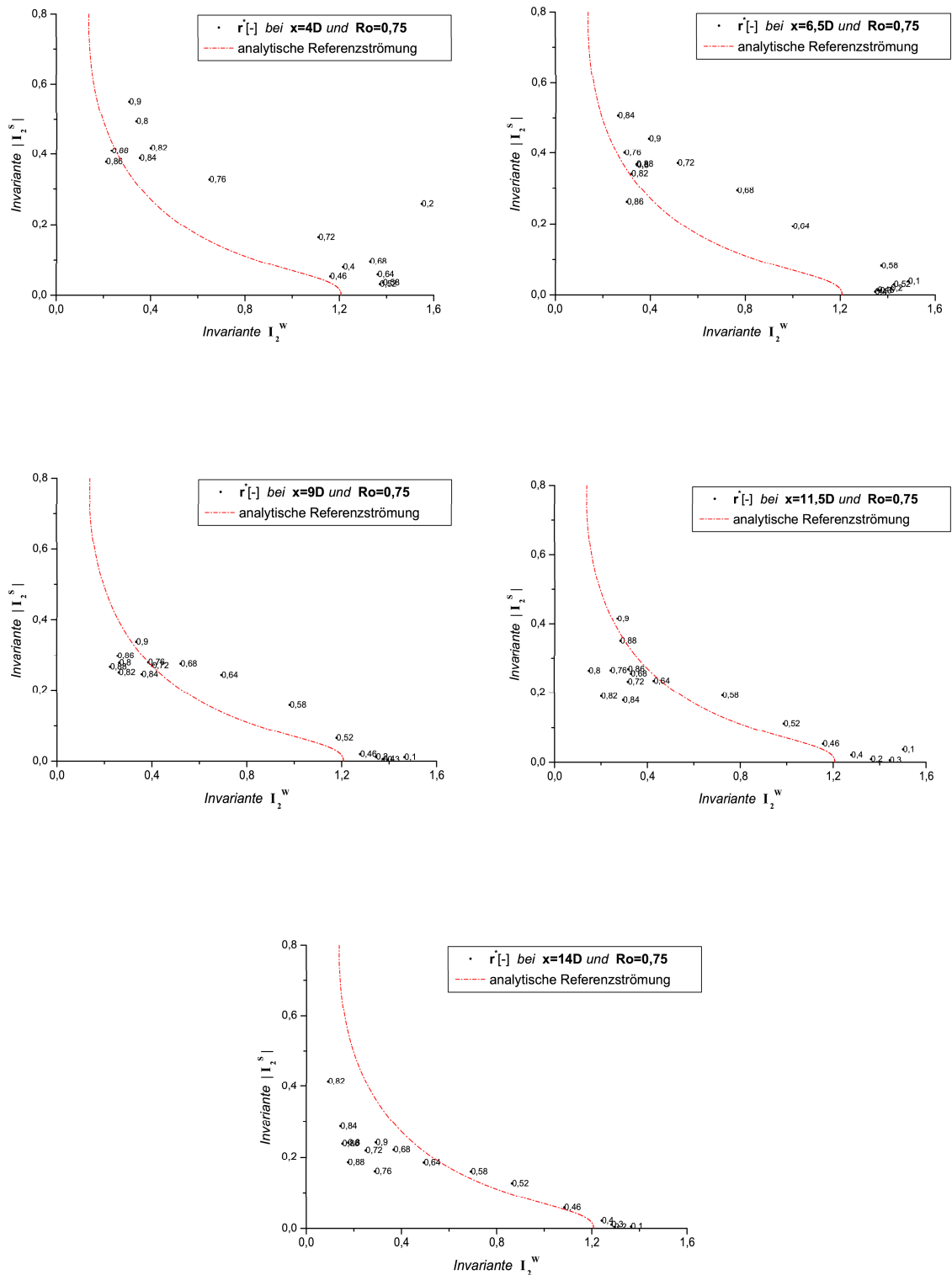


Abbildung 5.15: Diagramme entlang der Strömungsrichtung zur Veranschaulichung der dominanten Strukturen bei $Ro = 0,75$

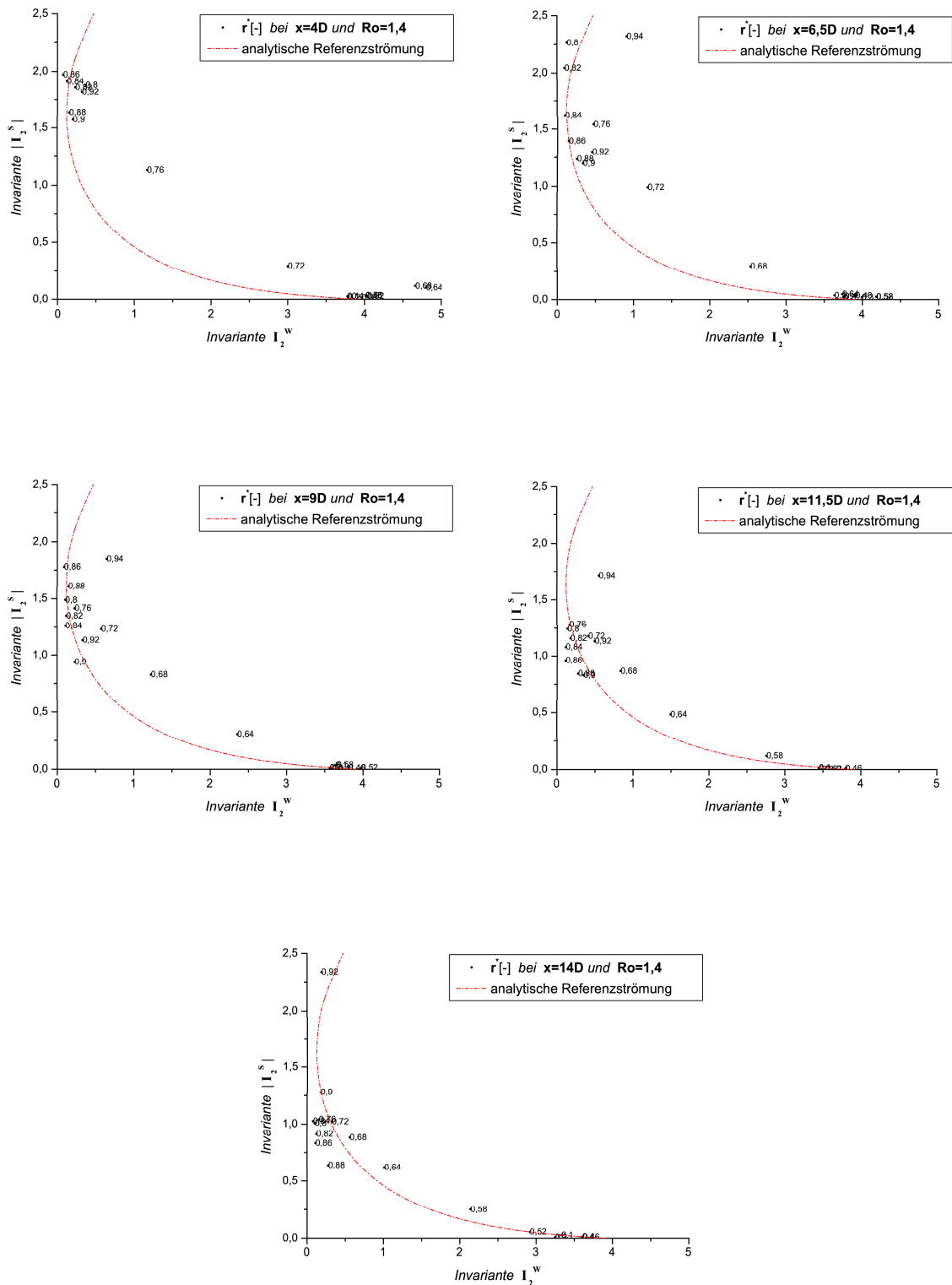


Abbildung 5.16: Diagramme entlang der Strömungsrichtung zur Veranschaulichung der dominanten Strukturen bei $Ro = 1,4$

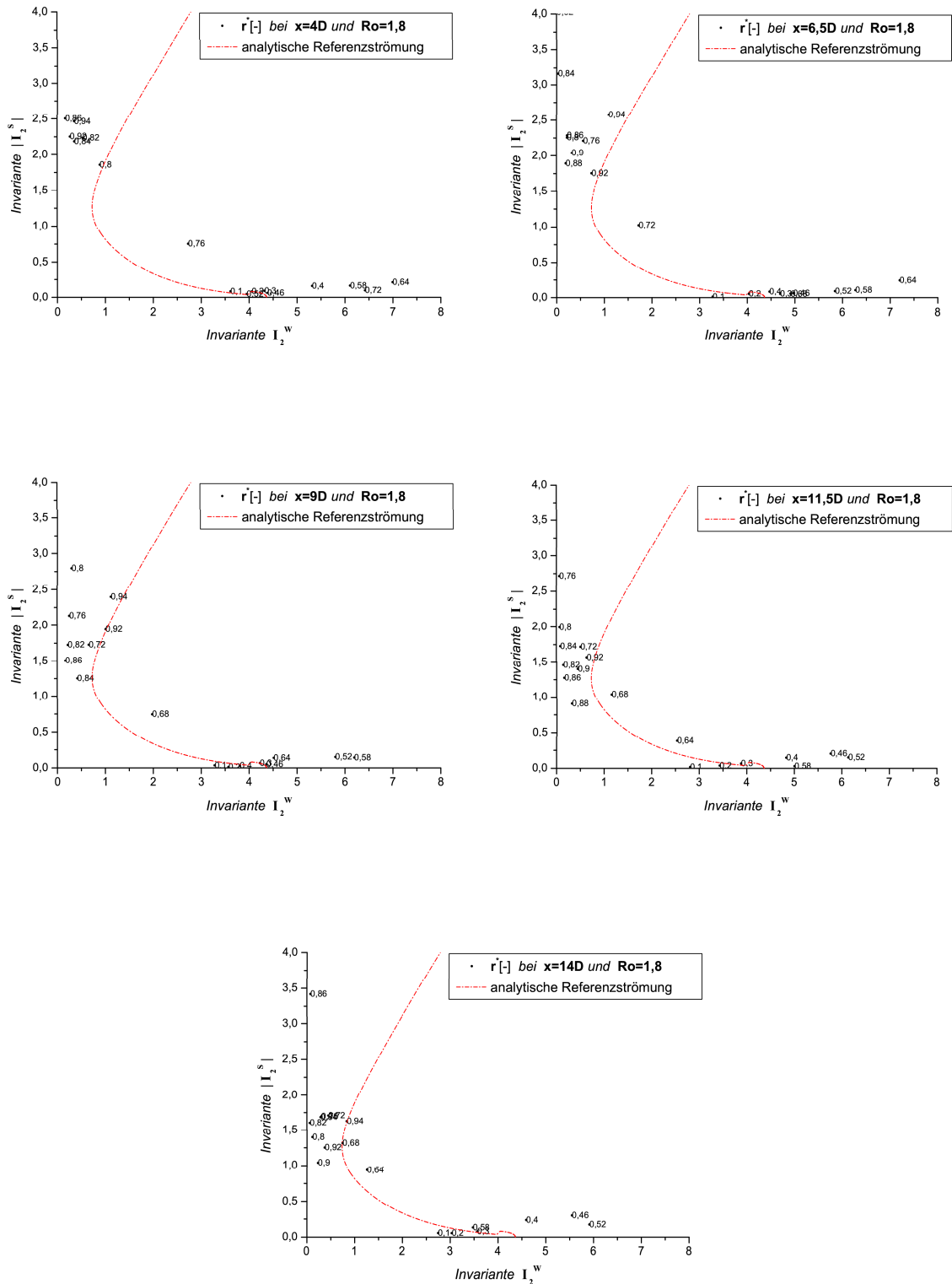


Abbildung 5.17: Diagramme entlang der Strömungsrichtung zur Veranschaulichung der dominanten Strukturen bei $Ro = 1,8$

Die Analyse der Diagramme in den Abbildungen 5.15 – 5.17 zeigen für jede konkrete Rotations-Zahl mit zunehmendem Abstand zum Drallerzeuger, dass sich die Messwerte der Referenzströmung leicht nähern, was eventuell mit Hilfe der Untersuchung der Spur des Deformationstensors in Abbildung 5.21 zu deuten ist. Viel auffälliger ist aber, dass sich die Messpunkte in zwei sich voneinander deutlich abgrenzende „Wolken“ separieren.

Mit Hilfe des ermittelten „laminarisierten“ Kernbereiches (Abb. 5.1.2.2) stellt sich heraus, dass diese erwähnten „Wolken“ mit dem Kern- bzw. Wandbereich übereinstimmen. Auch eine Tendenz des Auseinanderdriftens dieser beiden „Wolken“ ist mit zunehmender Rotations-Zahl erkennbar. So bewegen sich die, den „laminarisierten“ Kernbereich kennzeichnenden, Messpunkte von einem kleinen Bereich ($0,8 \leq I_2^W \leq 1,6$) auf der horizontalen Achse bei einer Rotations-Zahl von $Ro = 0,75$, über ein Intervall von $2,5 \leq I_2^W \leq 5$ bei $Ro = 1,4$ bis zum Intervall $3 \leq I_2^W \leq 7$ bei $Ro = 1,8$. Die Messpunkte, die sich im Wandbereich befinden, zeigen ein ähnliches Verhalten auf der senkrechten Achse. Hier wandern die Messpunkte mit zunehmender Rotations-Zahl von einem Gebiet im Intervall $0,2 \leq |I_2^S| \leq 0,4$ bei $Ro = 0,75$ über $0,6 \leq |I_2^S| \leq 2,25$ bis $1,25 \leq |I_2^S| \leq 2,75$ bei $Ro = 1,8$.

Ein Manko dieses Diagrammes ist aber, dass keine Skalierungen bezüglich der Achsen gegeben sind, weshalb nicht eindeutig gesagt werden kann, wo sich die Messpunkte im Diagramm zur Veranschaulichung der dominanten Strukturen (Abb. 5.14) jeweils befinden. Mit Vorsicht kann aber davon ausgegangen werden, dass mit zunehmendem Drall, also steigender Rotations-Zahl, der Bereich des „laminarisierten“ Kernbereiches immer deutlicher die Struktur eines Wirbelröhrchens (*vortex tubes*) annimmt. Was die Messpunkte im Wandbereich betrifft, so ist es aufgrund des fehlenden Verhältnisses der beiden Achsen schwer, etwas mit Sicherheit über die Struktur des Geschwindigkeitsgradienten zu sagen. Unter der Annahme eines äquivalenten Verhältnisses der beiden Achsen zeigt zumindest der Verlauf der analytischen Referenzströmung in Richtung der Winkelhalbierenden, d. h. in Richtung der Wirbelflächen (*vortex sheets*). Da aber die Messwerte der senkrechten Achse ($|I_2^S|$) um einen Faktor von 2 – 4 kleiner sind als jene der

horizontalen Achse (I_2^W), ist nicht eindeutig zu erkennen, ob sich die Werte des Wandbereiches aus der Umgebung des Ursprungs des Diagrammes in Richtung der Wirbelflächen oder der drehungsfreien Dissipation (*irrotational dissipation*) bewegen.

In den folgenden Abbildungen 5.18 – 5.20 sind – im Gegensatz zu den Abbildungen 5.15 – 5.17 – die Werte der 2. Invarianten nach J. Piquet (Gl. 5.13) und nach der allgemeinen Definition (Gl. 5.15) geplottet. Die Analyse der Diagramme zeigt auf, dass sich die Werte größtenteils überdecken, doch sind auch einzelne Werte in Richtung der 2. Invariante des Deformationstensors $|I_2^S|$ verschoben. Es lässt sich anhand der vorliegenden Diagramme kein eindeutiges Muster mit zunehmender Rotations-Zahl oder zunehmendem Abstand vom Drallerzeuger erkennen. Doch anhand der identischen Skalierung der Achsen für eine konkrete Rotations-Zahl kann zumindest gedeutet werden, dass sich die Werte im Wandbereich nicht in Richtung der Wirbelflächen, sondern in Richtung der drehungsfreien Dissipation bewegen.

Am Beispiel der Komponenten der Spur des Deformationstensors (Abb. 5.21) bei einer Rotations-Zahl von $Ro = 1,4$ wird nach einer Antwort für die Diskrepanzen gesucht. Die Tendenz zur Vollausbildung der Strömung kann als Erklärung für die Verschiebung der Werte in die senkrechte Richtung ausgeschlossen werden, da $S_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$ um zwei Größenordnungen kleiner ist als S_{rr} und $S_{\varphi\varphi}$. Außerdem ist anhand der Diagramme in Abbildung 5.21 zu erkennen, dass im Wandbereich S_{rr} und im Kernbereich $S_{\varphi\varphi}$ ausschlaggebend und somit für die Diskrepanzen verantwortlich ist. Da von einer rotationssymmetrischen Strömung ausgegangen wird, bleibt nur noch die Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung v_r , sowie ihre Ableitung in radialer Richtung ($\frac{\partial}{\partial r}$) übrig.

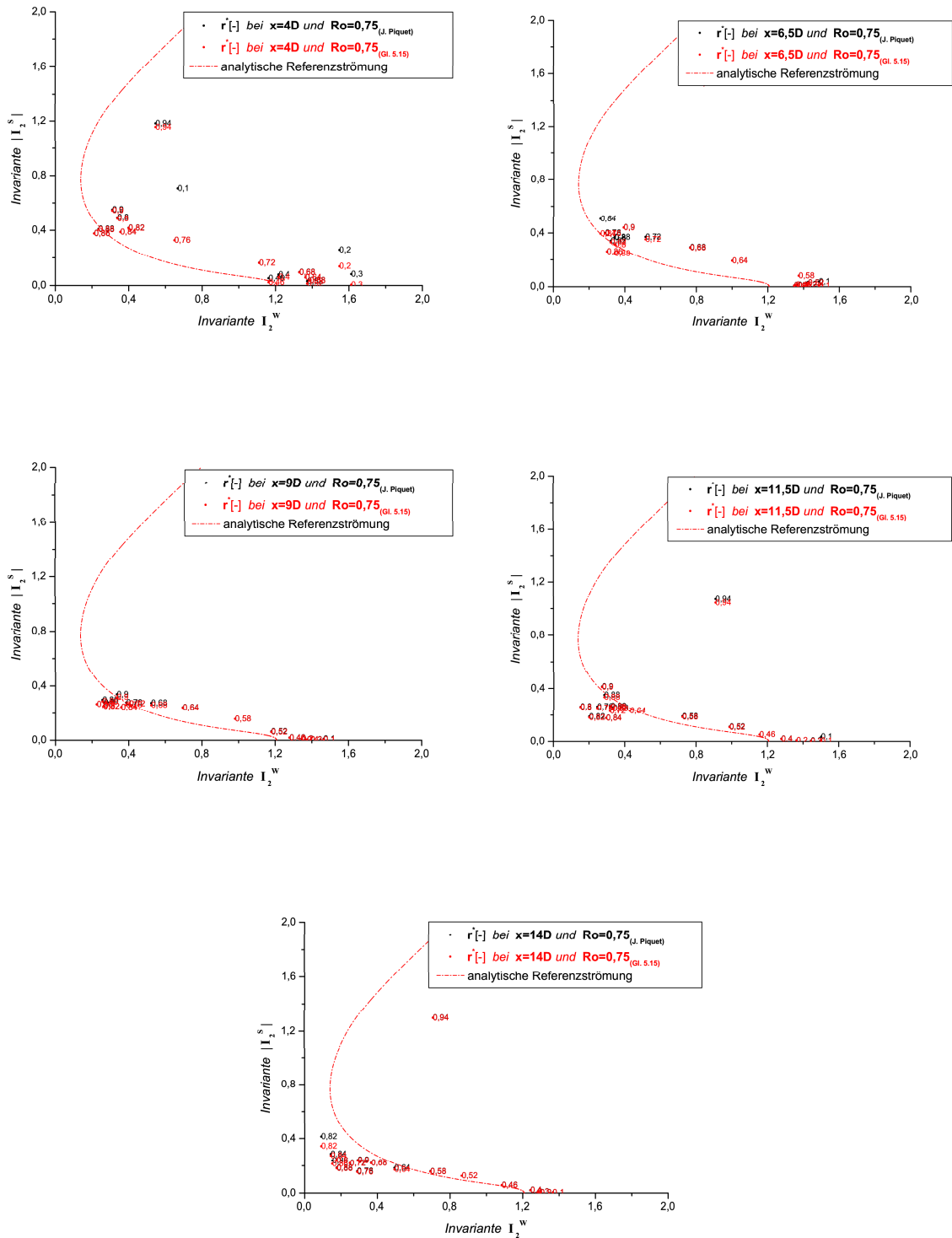


Abbildung 5.18: Vergleich der dominanten Strukturen bei $Ro = 0,75$ nach J. Piquet und Gl. 5.15

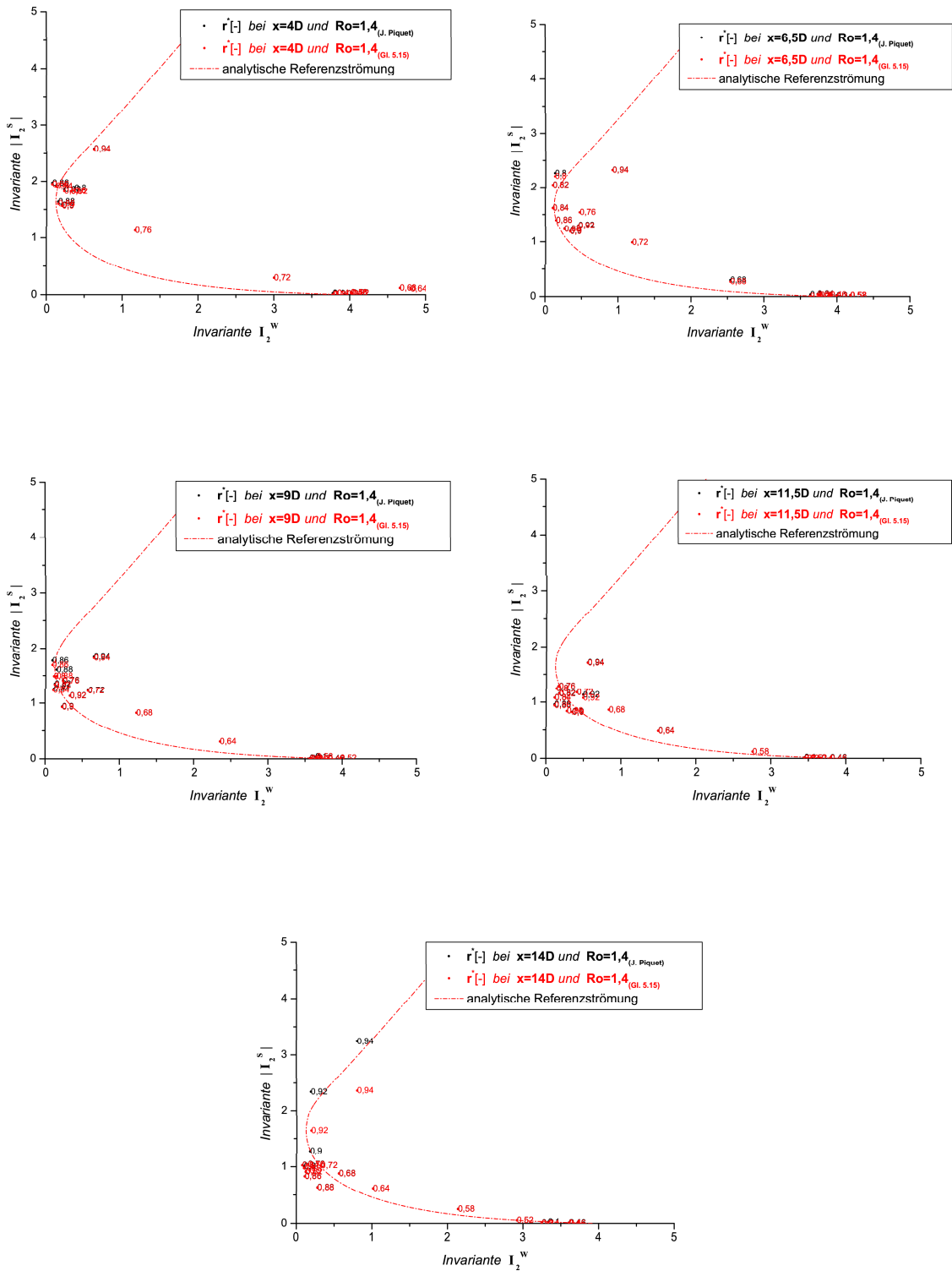


Abbildung 5.19: Vergleich der dominanten Strukturen bei $Ro = 1,4$ nach J. Piquet und Gl. 5.15

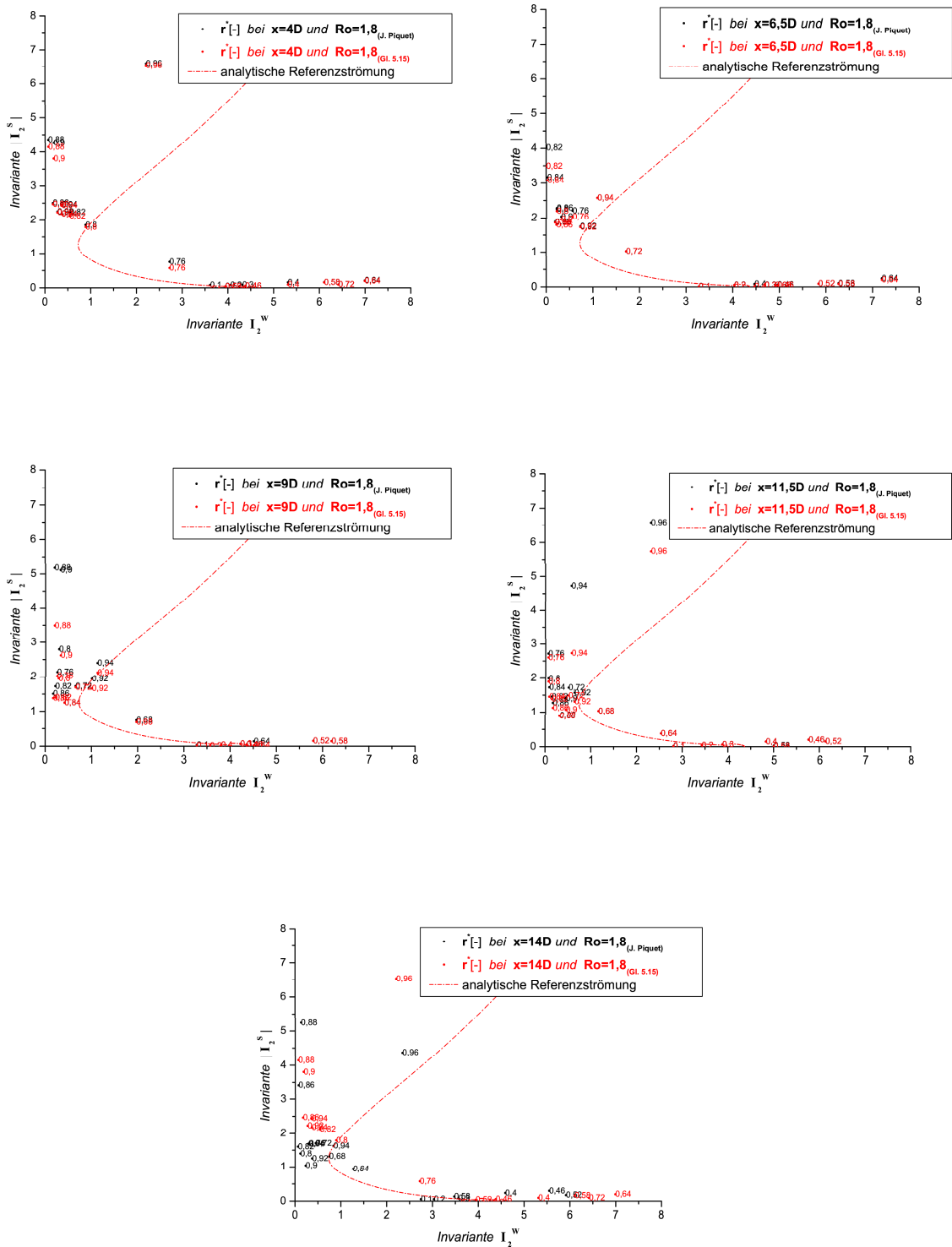


Abbildung 5.20: Vergleich der dominanten Strukturen bei $Ro = 1,8$ nach J. Piquet und Gl. 5.15

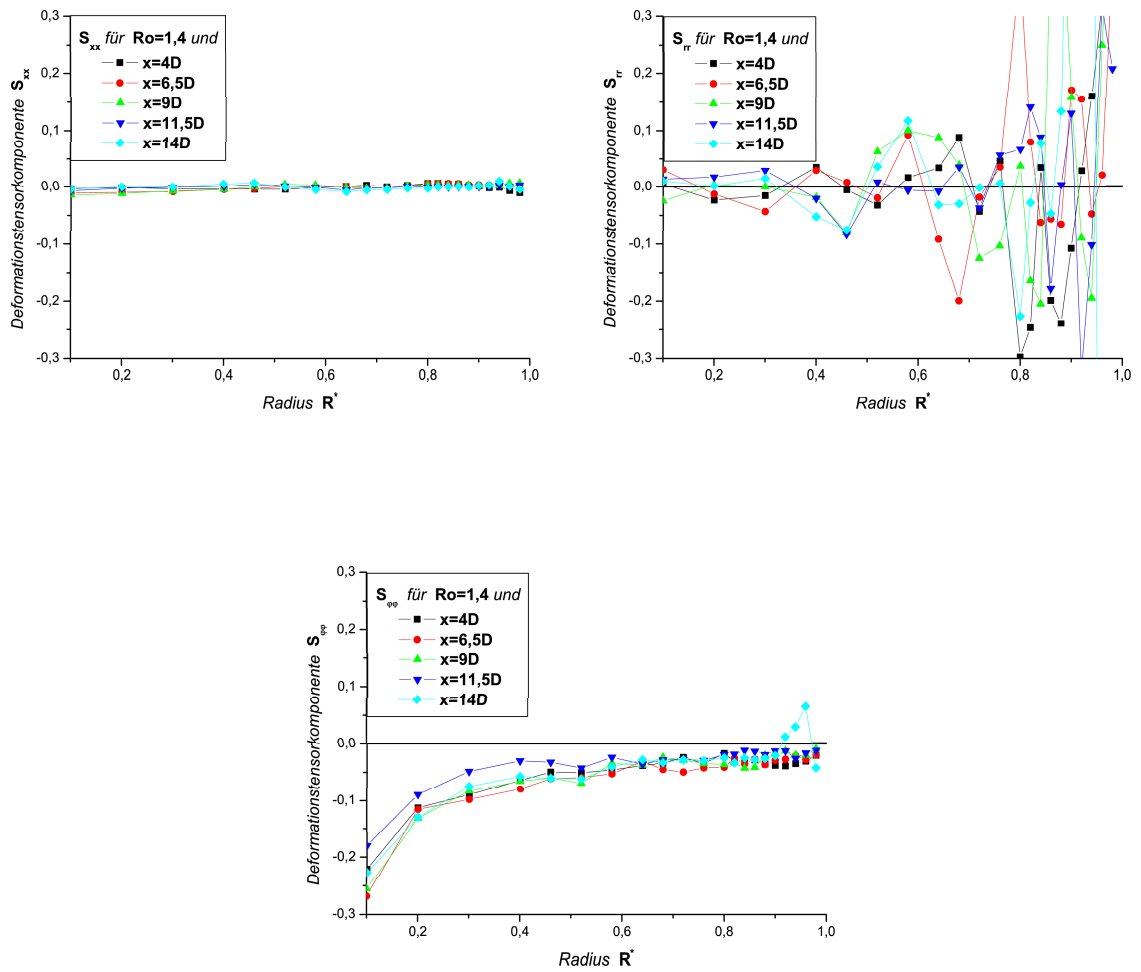


Abbildung 5.21: Untersuchung der Spur des Deformationstensors

5.4 Ausrichtung des Deformations- und Reynolds'schen Spannungstensors

Dieses Unterkapitel dient lediglich einer kurzen Einführung in ein Gebiet das aufgrund seiner Komplexität und Aktualität noch relativ unergründet ist. Der Fokus der Analyse, welche angeregt werden soll, bezieht sich auf die Ausrichtung des Deformations- und Reynolds'schen Spannungstensors. Geometrische Beziehungen zwischen den Eigenvektoren bzw. Eigenrichtungen der zu untersuchenden Tensoren geben Auskunft über ihre Beschaffenheit. Daher sind Eigenvektoren im Allgemeinen und Eigenvektoren des Deformations- und Reynolds'schen Spannungstensors im Speziellen sehr wichtige Anhaltspunkte und Charakteristiken der Dynamik von turbulenten Strömungen. Neben den Eigenvektoren sind Eigenwerte der betrachteten Tensoren im gleichen Ausmaße aussagekräftig, da sie Hinweise über die relative Wichtigkeit von besonderen Eigenvektoren geben können.

Da im Rahmen der hier vorliegenden Diplomarbeit für die Analyse der Anisotropieeigenschaften und der dominanten Strukturen bereits aus den Messdaten der Geschwindigkeitsgradiententensor, gebildet aus Deformations- und Drehungstensor, und der Deviator des Reynolds'schen Spannungstensors, berechnet wurde, regte deren Kenntnis zu neuen Überlegungen an. Wie im Anhang C erwähnt, lassen sich für symmetrische Tensoren 2. Stufe stets Hauptachsensysteme finden, welche durch die Eigenwerte der Ausgangsmatrix gegeben sind. Andererseits ist die Ausrichtung eines Tensors 2. Stufe durch Berechnung der Eigenvektoren bzw. Eigenrichtungen einer Matrix bekannt.

Das Ziel einer weitergehenden Forschung im Zusammenhang mit der Ausrichtung des Deformations- und Reynolds'schen Spannungstensors ist es also, einen Zusammenhang in der Ausrichtung zwischen den beiden Tensoren ausfindig zu machen und ihr Verhältnis (falls vorhanden) zu beschreiben. In diesem Zusammenhang sind auch die Überlegungen im Anhang C von großem Nutzen. Da für jeden symmetrischen Tensor 2. Stufe jeweils drei Eigenwerte und drei Eigenvektoren, mit wiederum drei Komponenten, berechenbar sind, ist nicht offensichtlich, welcher der Eigenwerte bzw. Eigenvektoren des Deformationstensors mit welchem

des Reynolds'schen Spannungstensors zu vergleichen ist, um Schlüsse aus dieser Betrachtung ziehen zu können. Anhand der analytischen Beispiele sind für bestimmte Ausgangsbedingungen (Umfangs- und/oder Axialgeschwindigkeit) verschiedene Ausprägungen der Eigenwerte und -vektoren erkennbar. Diese könnten Aufschluß über prägnante Eigenwerte und -vektoren geben und somit zur Analyse der Ausrichtung des Deformations- und Reynolds'schen Spannungstensors beitragen.

Wichtige Schritte auf dem Weg zur Ergründung des beschriebenen Problems sind vor allem die Veröffentlichungen von K. Horiuti [6] und [7], sowie jene von B. Tao, J. Katz und C. Meneveau [31].

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen meiner Studien- und Diplomarbeit wurden mit einer brechungsindexangepassten 3-D Laser-Doppler-Velozimetrie Profilmessungen an einer rotationssymmetrischen, drallbehafteten und turbulenten Strömung entlang der Strömungsrichtung durchgeführt. Dabei wurden jeweils für jede Rotations-Zahl von $Ro = 0,75$, $Ro = 1,4$ und $Ro = 1,8$ die Geschwindigkeiten und Schwankungskorrelationen an den Stellen $\frac{x}{D} = 4$, $\frac{x}{D} = 6,5$, $\frac{x}{D} = 9$, $\frac{x}{D} = 11,5$ und $\frac{x}{D} = 14$ bei einer Reynolds-Zahl von $Re = 2,24 \cdot 10^5$ gemessen.

Nachdem nun die experimentellen Daten erfasst, die grundlegenden Gleichungen (Kap. 4) aufgestellt, geeignete mathematische Beziehungen zur Analyse der drallbehafteten Strömung in einem Rohr hergeleitet, auf die Messwerte angewendet und ausführlich untersucht sind (Kap. 5), sollen im Folgenden die Erkenntnisse festgehalten werden:

- Die Strömung verhält sich im kernnahen Bereich wie bei einer Starrkörperrotation (Kap. 5.1.1)
- Im kernnahen Bereich der drallbehafteten turbulenten Strömung wird der „Laminarisierungseffekt“ festgestellt. Dieser „laminarisierte“ Kernbereich ist umso kleiner, je weiter man vom Drallerzeuger entfernt ist und umso größer, je stärker die Strömung mit einem Drall beaufschlagt ist (Kap. 5.1.2.1 und Anhang B).
- Die Strömung tendiert bei Rotations-Zahlen von $Ro = 0,75$ und $Ro = 1,4$

mit zunehmendem Abstand vom Drallerzeuger deutlich in Richtung einer 2-D Achsensymmetrie. Im Gegensatz dazu ist bei $Ro = 1,8$ ein entgegengesetzter Trend in Richtung einer 2-D Strömung zu erkennen. Durch Vergleich mit einer drallfreien Strömung kann angenommen werden, dass die beschriebenen Tendenzen ausschließlich auf den Drall zurückzuführen sind (Kap. 5.2).

- Mit zunehmender Rotations-Zahl weist die Strömung im Wandbereich eine Tendenz in Richtung der drehungsfreien Dissipation und im Bereich des „laminarisierten“ Kernbereiches in Richtung der Wirbelröhrchen auf. Im Gegensatz dazu weist eine analytisch vollausgebildete Strömung, welche keine Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung aufweist, eine Tendenz zu Wirbelflächen auf (Kap. 5.3).
- Die von J. Piquet vorgeschlagene Untersuchungsmethode zur Analyse der dominanten Strukturen des Geschwindigkeitsgradienten mit ihren Gleichungen erweist sich nur für rotationssymmetrische, vollausgebildete Strömungen ohne Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung als aussagekräftig. Anderenfalls ergeben sich hauptsächlich für den Wandbereich falsche Schlüsse (Kap. 5.3).

Für zukünftige Arbeiten könnten folgende experimentelle und analytische Schritte angegangen werden:

- Die Maschenweite in Strömungsrichtung könnte dichter belegt werden, um somit den Gradienten in x -Richtung genauer zu bestimmen, was die Analyse des Geschwindigkeitsgradienten präzisieren würde.
- Mehrere Messungen bei gleicher Reynolds-Zahl an der Stelle $\frac{x}{D} = 14$ und den Rotations-Zahlen im Intervall von $1,6 \leq Ro \leq 2,0$ könnten Aufschluss über den entgegengesetzten Trend in Richtung einer 2-D Strömung in der *Anisotropie-Invariantenkarte* geben. Hierzu müssten aber der Frequenzrichter und die Kühlvorrichtung verändert werden (vgl. Kapitel 3).

-
- Was die Ausrichtung des Deformations- und Reynolds'schen Spannungstensors betrifft, stellt diese Arbeit nur den Beginn dar (vgl. Kapitel 5.4). In diesem Bereich ist anhand der Publikationen von K. Horiuti [6] und [7], B. Tao, J. Katz und C. Meneveau [31] noch viel anhand vorhandener Messwerte zu berechnen. Hier kann die Bestimmung der Hauptachsen für verschiedene analytische Strömungsfälle behilflich sein (Anhang C).

Literaturverzeichnis

- [1] G. K. Batchelor: *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1970
- [2] J. Betten: *Elementare Tensorrechnung für Ingenieure*, Braunschweig: Vieweg, 1977
- [3] D. Braess: *Numerische Mathematik für Ingenieure*, Ausarbeitung einer Vorlesung für Bauingenieure und Maschinenbauer, Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, 1997
- [4] J. Derksen: *Confined and Agitated Swirling Flows with Applications in Chemical Engineering*, Flow, Turbulence and Combustion 69: 3-33, 2002.
- [5] F. Durst, A. Melling, J. H. Whitelaw: *Theorie und Praxis der Laser-Doppler-Anemometrie*, Braun, Karlsruhe, 1987
- [6] K. Horiuti: *A classification method for vortex sheet and tube structures in turbulent flows*, Physics of Fluids, Vol. 13, Number 12 (2001)
- [7] K. Horiuti: *Roles of non-aligned eigenvectors of strain-rate and subgrid-scale stress tensors in turbulence generation*, J. Fluid Mech. 491 (2003) 65-100
- [8] D. Jou, J. Casas-Vázquez, M. Criado-Sanco: *Thermodynamics of Fluids Under Flow*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001
- [9] J. Jovanović, I. Otic und P. Bradshaw: *On the Anisotropy of Axisymmetric Strained Turbulence in the Dissipation Range*, J. Fluid Engineering, Vol. 125 (2003) 401-413

-
- [10] S. Kessel: *Skriptum zur Vorlesung Kontinuumsmechanik I*, Lehrstuhl für Mechanik, Universität Bochum, 2000
- [11] H. Kocherscheidt: *3D LDV-Messungen der Strömungsgrößen in einem Rohr mit instationärem Drall*, Diplomarbeit Nr. 190, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum
- [12] H. Kocherscheidt, M. Schmidts: *Zusatzskript zur LDA-Versuchsanlage*, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum
- [13] J. L. Lumley: *Computational Modeling of Turbulent Flows*, Adv. Appl. Mech. 18 (1978) 123-176
- [14] J. L. Lumley and G. R. Newman: *The return to isotropy of homogeneous turbulence*, J. Fluid Mech. 82 (1978) 161-178
- [15] J. L. Lumley: *Stochastic Tools in Turbulence*, Appl. Mathematics and Mech., Vol. 12 (1970)
- [16] J. Micheel: *3D LDV-Messungen und deren Analyse in einer turbulenten Rohrströmung mit Drall*, Diplomarbeit Nr. 198, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, 2003
- [17] Ji Nan: *Computation of the Effect of Area Change on the Flow Quantities in Inviscid Swirling Flow Making Explicit Use of the Invariants in This Problem*, Master Thesis im Studiengang Computational Engineering, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, 2003
- [18] R. Örlü: *Messung und Analyse der stationären drallbehafteten Strömung in einem Rohr bei hohen Reynolds- und Rotations-Zahlen*, Studienarbeit Nr. 301, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, 2003

-
- [19] J. Piquet: *Turbulent Flows, Models and Physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999
- [20] D. Rist: *Dynamik realer Gase; Grundlagen, Berechnungen und Daten für Thermogasdynamik, Strömungsmechanik und Gastechnik*, Springer
- [21] G. Rocklage-Marliani: *Dreidimensionale Laser-Doppler Anemometrie in drallbehafteter turbulenter Rohrströmung*, Dr.-Ing.-Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, 1998
- [22] B. Rogg: *Einführung in die Strömungsmechanik*, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, SS 2000
- [23] J. C. Rotta: *Turbulente Strömungen*, B. G. Teubner, Stuttgart 1972
- [24] B. Ruck: *Laser-Doppler-Anemometrie*, AT-Verlag GmbH, Stuttgart 1987
- [25] H. Schlichting und K. Gersten: *Grenzschicht-Theorie*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997
- [26] F. Schlottmann: *Meßmethoden in der Wärme- und Strömungstechnik II*, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Ruhr-Universität Bochum, SS 2003
- [27] M. Schmidts: *Analyse der Wirkung des Dralls in der turbulenten Strömung*, Diplomarbeit Nr. 184, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, 1998
- [28] I. Schmitz: *3D LDV-Messungen der Strömungsgrößen in einem Rohr mit turbulenter Strömung und stationärem Drall*, Studienarbeit Nr. 299, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Institut für Thermo- und Fluidodynamik, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, 2002
- [29] G. Schweiger: *Skript zur Vorlesung Lasermesstechnik*, Lehrstuhl für Laseranwendungstechnik und Meßsysteme, Fakultät für Maschinenbau, Ruhr-Universität Bochum, SS 2003

-
- [30] J. H. Spurk *Strömungslehre -Einführung in die Theorie der Strömungen*, Springer-Verlag, 1996
- [31] B. Tao, J. Katz and C. Meneveau: *Statistical geometry of subgrid-scale stresses determined from holographic particle image velocimetry measurements*, J. Fluid Mech. 457 (2002) 35-78
- [32] A. van Dijk: *Aliasing in one-point turbulence measurements*, Thesis, Technische Universiteit Delft
- [33] J. Wiedemann: *Laser-Doppler-Anemometrie*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1984
- [34] *Betriebsanleitung Burst Spectrum Analyser*, Dantec
- [35] *Betriebsanleitung Umrichter Antriebe, Reihe 8200/8210*, Lenze Antriebstechnik, 1995

Danksagung



Die vorliegende Diplomarbeit, die am Lehrstuhl für Strömungsmechanik des Institutes für Thermo- und Fluidodynamik der Ruhr-Universität Bochum entstand, stellt zugleich den Abschluss meines Maschinenbaustudiums dar. Daher möchte ich an dieser Stelle sämtlichen Personen meinen Dank aussprechen, die mir bei der Durchführung dieser Diplomarbeit behilflich waren, aber auch während meines Studiums hilfreich zur Seite standen.

Herrn Professor Dr.-Ing. V. Vasanta Ram möchte ich meinen ganz speziellen Dank dafür aussprechen, dass er mir nicht nur im Rahmen meiner Studien- und Diplomarbeit, sondern vor allem in den letzten zwei Jahren stets lehr- und hilfreich zur Seite stand.

Jörn Micheel soll in dieser Danksagung ebenfalls Erwähnung finden, da er mit mir am aufwendigen Prozess der Messdatengewinnung arbeitete. Neben ihm sei auch Frau Ji Nan gedankt, die zeitgleich an ihrer *Master Thesis* arbeitete. Beide waren Bestandteil unserer kleinen Arbeitsgruppe um Prof. Dr.-Ing. V. Vasanta Ram.

Besonderer Dank soll auch all denjenigen gelten, die mit ihrem Wissen und ihren Erfahrungen die Messungen ermöglichten. In diesem Zusammenhang seien die Herren Dr.-Ing. M. Ludwig, Dipl.-Ing. I. Schmitz, Dipl.-Ing. H. Kocherscheidt, H. Meyer und D. Schönhoff erwähnt.

Neben diesen am experimentellen Teil der Arbeit behilflichen Personen spreche

ich Frau Prof. Dr.-Ing. S. Reese und Herrn Dipl.-Ing. G. Kotucha für ihre Hilfe bei Problemen in der Tensorrechnung und den Herren Dr. W. Volgmann und Dr.-Ing. S. Wirtz für die Unterstützung in der Einarbeitung in CFD-Software, wie FLUENT und STAR-CD, meinen Dank aus.

Herrn Dr.-Ing. F. Schlottmann sei für die wiederholte Übernahme des 2. Fachprüfers und Frau U. Beitz für die Hilfe in der Institutsbibliothek und die fröhliche Natur gedankt.

Abschließend möchte ich meiner Lebensgefährtin Wera und meiner Familie für ihre Geduld, ihre psychische und finanzielle Unterstützung von ganzem Herzen danken.

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Lateinische Zeichen

C	$[\frac{m^2}{s}]$:	örtlicher Drall
D	$[m]$:	Rohrdurchmesser
I	$[-]$:	Invariante
n	$[-]$:	Brechungsindex
N	$[\frac{1}{min}]$:	Drehzahl des Drallerzeugers
O	$[-]$:	Größenordnung
p	$[\frac{N}{m^2}]$:	Druck
Q	$[\frac{m^2}{s}]$:	Volumenstrom
r	$[m]$:	Zylinderkoordinate in radialer Richtung
R	$[m]$:	Rohrradius
Re	$[-]$:	Reynolds-Zahl
Ro	$[-]$:	Rotations-Zahl
S	$[\frac{1}{s}]$:	Deformationstensor
t	$[s]$:	Zeit
T	$[Nm^2]$:	gesamter Spannungstensor
u	$[\frac{m}{s}]$:	Geschwindigkeit (allg.)
v	$[\frac{m}{s}]$:	Geschwindigkeit
W	$[\frac{1}{s}]$:	Drehungstensor
x	$[m]$:	kartesische Koordinate in Strömungsrichtung
X	$[m]$:	Eigenvektor
y	$[m]$:	kartesische Koordinate
z	$[m]$:	kartesische Koordinate

Griechische Zeichen

δ	$[m]$:	Grenzschichtdicke
δ_1	$[m]$:	Verdrängungsdicke
λ	$[-]$:	Eigenwert
μ	$[\frac{kg}{ms}]$:	dynamische Viskosität
ν	$[\frac{m^2}{s}]$:	kinematische Viskosität
ρ	$[\frac{kg}{m^3}]$:	Dichte
σ	$[\frac{N}{m^2}]$:	Spannungstensor
τ	$[\frac{N}{m^2}]$:	Reynolds'scher Spannungstensor
φ	$[-]$:	Zylinderkoordinate in tangentialer Richtung
ψ	$[\frac{m^3}{s}]$:	Stromfunktion
ω	$[\frac{1}{s}]$:	Winkelgeschwindigkeit des Drallerzeugers

Indizes

$-$	$[-]$:	zeitlich gemittelte Größe
$'$	$[-]$:	Schwankungsgröße
$*$	$[-]$:	entdimensioniert
<i>anti</i>	$[-]$:	antisymmetrisch
<i>Dev</i>	$[-]$:	deviatorisch bzw. anisotrop
<i>Kug</i>	$[-]$:	isotrop
<i>m</i>	$[-]$:	über den Querschnitt gemittelt Größe
<i>r</i>	$[-]$:	in radialer Richtung
<i>sym</i>	$[-]$:	symmetrisch
<i>S</i>	$[-]$:	des Deformationstensor
<i>W</i>	$[-]$:	des Drehungstensors
<i>x</i>	$[-]$:	in Strömungsrichtung
<i>y</i>	$[-]$:	in y -Richtung
<i>z</i>	$[-]$:	in z -Richtung
φ	$[-]$:	in tangentialer Richtung

Teil III

Anhänge

Anhang A

Dateiformate des Messprogrammes

Der vorliegende Text soll verdeutlichen, welche Daten vom Messprogramm an der *LDV*-Anlage aufgezeichnet werden und in welchen Formaten sie dem Benutzer vorliegen.

Vor der Messung

Vor Beginn der Messung wird eine PTS-Datei erzeugt, welche die anzufahrenden Koordinaten (im kartesischen Koordinatensystem) beinhaltet. Die Datei beinhaltet keinerlei Text, außer den Koordinaten, welche durch eine Leerzeile getrennt werden. Zur Veranschaulichung werden die ersten 5 Zeilen einer (3-spaltigen) PTS-Datei gezeigt:

146	0	0
146	0	5
146	0	10
146	0	15
146	0	20

Abbildung A.1: *Auszug aus der Datei 4DR075.PTS*

Wie leicht zu erkennen ist, werden die Koordinaten in der Reihenfolge x , y , z eingegeben.

Während der Messung

Nach Beginn einer Messreihe wird Messpunkt (exakt: Messvolumina) für Messpunkt angefahren. Bei jedem Messpunkt werden alle koinzidenten Messungen in einer TDR-Datei abgelegt. Diese TDR-Datei wird aus Gründen der Speicherkapazität in binärer Form abgespeichert, weshalb sie ohne weiteres nicht zu „lesen“ ist.

Nach der Messung

Nach Beendigung einer Messreihe wird vom Messprogramm eine DAT-Datei erzeugt, welche

- die Koordinaten x , y , z ,
- die mittleren Geschwindigkeiten $\overline{v_x}$, $\overline{v_\varphi}$, $\overline{v_r}$ und
- die Korrelationsgrößen $\overline{v'_x v'_x}$, $\overline{v'_x v'_\varphi}$, $\overline{v'_x v'_r}$, $\overline{v'_\varphi v'_\varphi}$, $\overline{v'_\varphi v'_r}$, $\overline{v'_r v'_r}$

beinhaltet. Diese Daten werden aus der in der TDR-Datei beinhalteten Information berechnet und sind über die Messzeit (an einem Messvolumen) gemittelte

Werte. Zur Veranschaulichung werden die ersten 5 Zeilen einer (12-spaltigen) DAT-Datei gezeigt:

X	Y	Z	TCAvg0	TCAvg1	TCAvg2
146	0	0	3,400032	0,016025	-0,039732
146	0	5	3,411054	-0,166317	0,320838
146	0	10	3,349974	-0,587931	0,071504
146	0	15	3,306279	-1,00371	-0,036018

TCCor00	TCCor01	TCCor02	TCCor11	TCCor12	TCCor22
0,004117	-0,000045	0,000171	0,001342	-0,002498	0,006075
0,004265	-0,000053	0,000361	0,001851	0,000279	0,008775
0,004998	-0,000027	0,000137	0,001615	-0,000813	0,007354
0,006662	-0,000266	0,000632	0,00169	-0,002094	0,007759

Abbildung A.2: *Auszug aus der Datei 4DR075.DAT*

Anhand der obigen Reihung der DAT-Datei sind die Bezeichnungen der Spaltenüberschriften mit den Geschwindigkeitskorrelationen ersichtlich. Vollständigkeitshalber werden diese im Folgenden aufgeführt:

$$\begin{aligned}
 X, Y, Z & \implies x, y, z \\
 TCAvg0, TCAvg1, TCAvg2 & \implies \overline{v_x}, \overline{v_\varphi}, \overline{v_r} \\
 TCCor00, TCCor01, TCCor02 & \implies \overline{v'_x v'_x}, \overline{v'_x v'_\varphi}, \overline{v'_x v'_r} \\
 TCCor11, TCCor12, TCCor22 & \implies \overline{v'_\varphi v'_\varphi}, \overline{v'_\varphi v'_r}, \overline{v'_r v'_r}
 \end{aligned}$$

Weitergehende Auswertung

Falls nicht die gemittelten Daten im Sichtfeld des Benutzers stehen, sondern die „Rohdaten“ - welche durch die BSA (Burst Spectrum Analyser) koinzident aufgenommen und unverändert durch ein Auswertungsprogramm in „lesbare“ Form gebracht werden - muss das Programm AA.EXE benutzt werden. Durch folgenden (in einer MS-DOS Ebene ausgeführten) Befehl

- **AA dateiname.TDR >> dateiname_aa.DAT**

wird die TDR-Datei in doppelt so viele DAT-Dateien wie Messpunkte vorhanden gesplittet. Für jeden Messpunkt werden zwei Dateien erzeugt, die identische Werte beinhalten. Der Unterschied ist lediglich der, dass einmal das „,“ (Komma) und zum anderen der „.“ (Punkt) als Dezimaltrennzeichen vorzufinden ist.

Die erzeugten DAT-Dateien sind fortlaufend von 0 beginnend (nach Anzahl der Messpunkte) nummeriert. Der Anhang `_k` (z.B. `0.k.DAT`) kennzeichnet die Datei, in welcher das Komma als Trennzeichen dient. Zur Veranschaulichung werden die ersten 5 Zeilen einer solchen (4-spaltigen) DAT-Datei (z.B. `0.k.DAT`) gezeigt:

0,00603733	3,52587	-0,0699905	-0,0207745
0,006272	3,52361	-0,0535427	-0,0647111
0,006784	3,51867	-0,0502262	-0,0559822
0,00853333	3,43338	0,0289976	-0,170592
0,0122667	3,38256	-0,0174024	0,0241079

Abbildung A.3: *Auszug aus der Datei 0_k.DAT*

Die erste Spalte ist die Zeit t , zu welcher die Daten vom BSA aufgenommen wurden. Bei den folgenden drei Spalten handelt es sich um die ungemittelten Geschwindigkeiten der Streuteilchen („Seeding“), d.h. um die axialen v_x , tangentialen v_φ und radialen v_r Geschwindigkeiten.

Anhang B

Ergänzungen zu den Grenzschicht-Kriterien

Da zum einen das Grenzschicht-Kriterium 1 und 2 aufgrund von Schwierigkeiten bei der Auswertung nicht für jede Rotations-Zahl Ergebnisse liefert, sind die Ergebnisse nicht in Kapitel 5.1.2.2 präsentiert. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass die Werte in den Abbildungen mit Vorsicht betrachtet werden sollen, da eine exakte Bestimmung des „laminarisierten“ Kernbereiches mit der vorhandenen Maschenweite der Messpunkte nicht möglich ist.

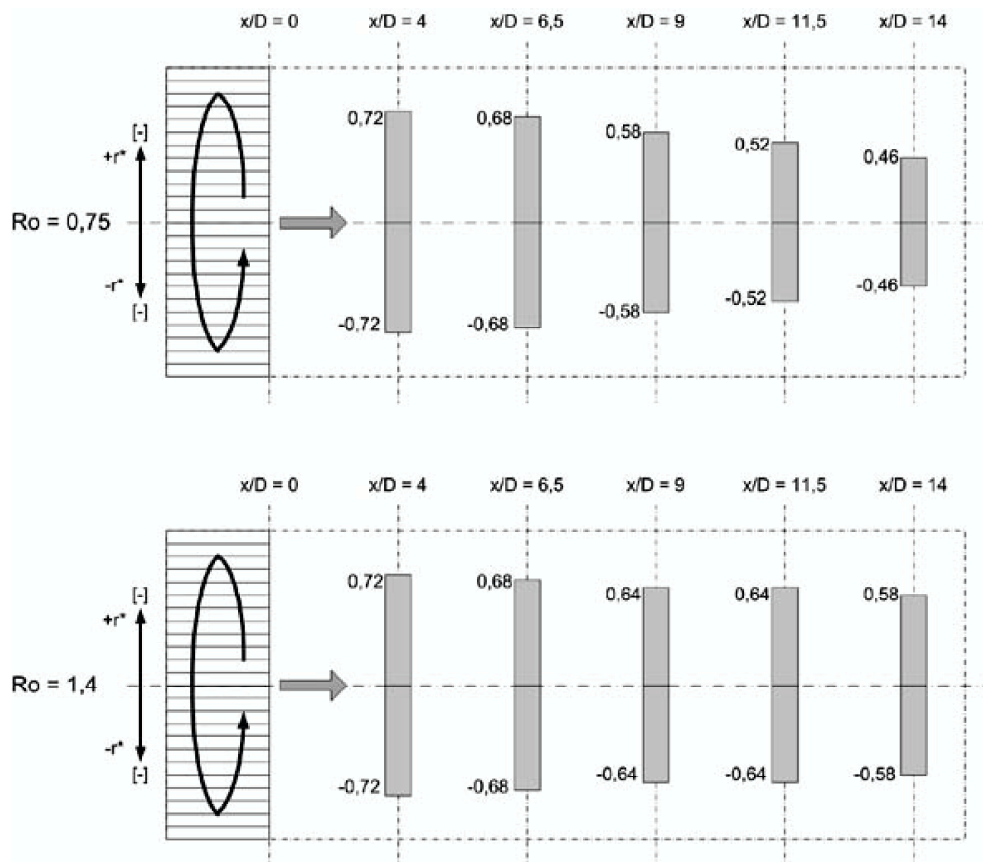


Abbildung B.1: *Laminarisierter Kernbereich nach Kriterium 1*

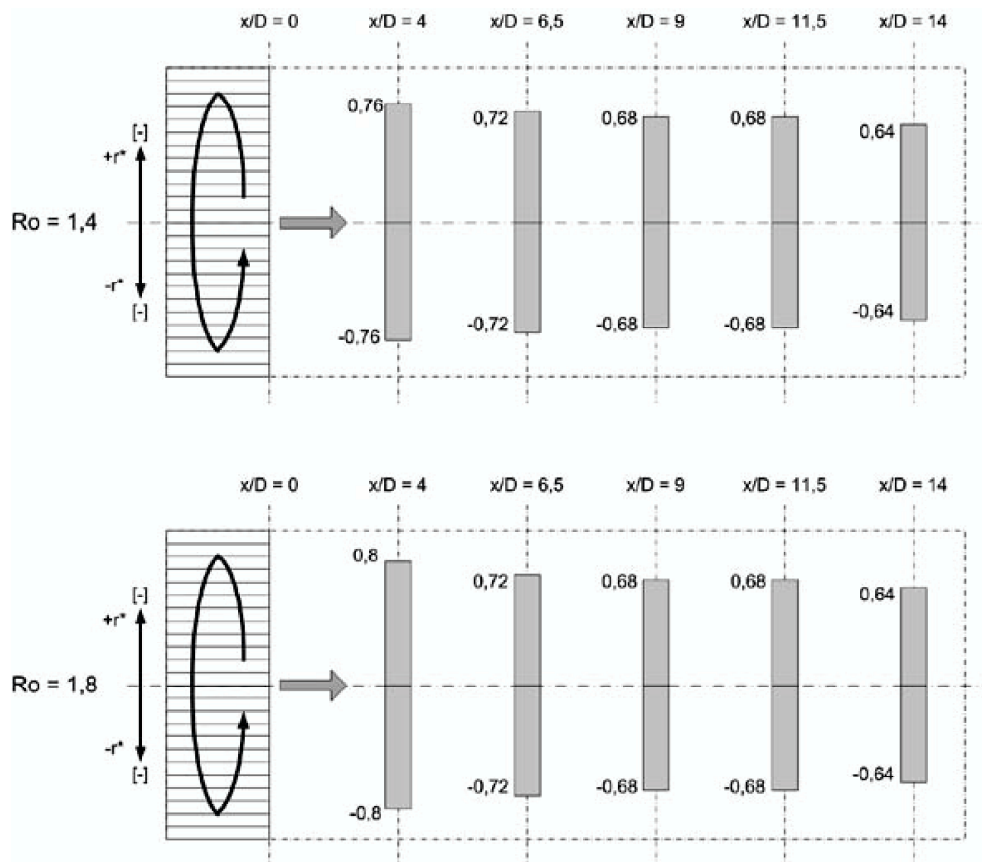


Abbildung B.2: *Laminarisierter Kernbereich nach Kriterium 2*

Anhang C

Beispiele für Hauptachsen des Deformationstensors

In diesem Abschnitt sollen für einfache Beispiele analytisch die Eigenwerte und -vektoren des Deformationstensors S_{ij} berechnet werden, um somit die Gestalt der Hauptachsen ausfindig zu machen. Hier sollen ausschließlich ebene (in kartesischen Koordinaten $\frac{\partial}{\partial z}$) bzw. rotationssymmetrische (in Zylinderkoordinaten $\frac{\partial}{\partial \varphi}$) und vollausgebildete ($\frac{\partial}{\partial x}$) Strömungen behandelt werden. Anhand der berechneten Hauptachsen soll sich die Bedeutung dieses mathematischen Begriffes in Bezug auf die betrachtete Strömung ergeben. Daher wurde die Entdimensionierung der Geschwindigkeit und der Länge kommentarlos vollzogen und auf eine gesonderte Darstellung dimensionsloser Größen verzichtet.

Im Folgenden werden im Falle kartesischer Koordinaten die *Couette*-Strömung (Schlepp-Strömung) und die *Poiseuille*-Strömung (Druck-Strömung) und im Falle der zylindrischen Polarkoordinaten die *Hagen-Poiseuille*-Strömung (Druck-Strömung in einem Rohr) betrachtet. Dazu werden analytisch einfache Geschwindigkeitsprofile ausgewählt, die Aufschluss darüber geben sollen, welche Geschwindigkeitskomponente sich in welcher Weise auf die Eigenwerte, -vektoren und Hauptachsen auswirkt.

Strömungen in einem Kanal

Die x -Koordinate beschreibt die Strömungsrichtung und y die Richtung senkrecht zur Strömungsrichtung parallel zu den Wänden, welche parallel zur x -Achse verläuft. Für diesen ebenen Fall vereinfacht sich der Deformationstensor aus Gleichung 4.49 zu

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Couette-Strömung

Mit dem Geschwindigkeitsprofil $v_x = y$ vereinfacht sich der Deformationstensor zu

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Der Eigenwert λ berechnet sich nach Gleichung 4.30 aus der folgenden charakteristischen Gleichung:

$$\det(\lambda_i \delta_{ij} - S_{ij}) = 0 \quad (\text{C.3})$$

Hierbei ist δ_{ij} das Kronecker-Symbol und stellt die Einheitsmatrix in tensorieller Form dar. Für das Kronecker-Symbol gilt folgende Regel:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

λ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_{S_{ij}}$ von S_{ij} :

$$p_{S_{ij}} = \det(\lambda \delta_{ij} - S_{ij}) = \lambda \left(\frac{1}{4} - \lambda^2 \right) \quad (\text{C.5})$$

Aus den folgenden Eigenwerten

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 0 \text{ und } \lambda_3 = +\frac{1}{2} \quad (\text{C.6})$$

ergeben sich aus der Gleichung $S_{ij} x_j = \lambda x_i$, die für jedes einzelne λ aufgestellt wird, folgende zugehörige Eigenvektoren:

$$x_1 = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \text{ und } \quad x_3 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbf{R}) \quad (\text{C.7})$$

Für symmetrische Tensoren 2. Stufe lassen sich stets Koordinaten, Hauptachsen genannt, finden, so dass die Matrix der Komponenten des Tensors Diagonalform besitzt. Die Matrix der Hauptachsen ist somit durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Poiseuille-Strömung

Analog zur obigen Vorgehensweise werden für eine Poiseuille-Strömung die Eigenwerte und -vektoren berechnet, um somit die Matrix der Hauptachsen aufzustellen.

- Geschwindigkeitsprofil:

$$v_x = 1 - y^2$$

- Deformationstensor:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -y & 0 \\ -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

- Eigenwerte:

$$\lambda_1 = -y \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = y \quad (\text{C.10})$$

- Eigenvektoren:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbf{R}) \quad (\text{C.11})$$

- Matrix der Hauptachsen:

$$\begin{pmatrix} -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Strömungen in einem Rohr

Für eine rotationssymmetrische vollausbildete Strömung, bei der keine radialen Geschwindigkeitskomponenten auftreten, vereinfacht sich der Deformationstensor aus Gleichung 4.58 zu

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial r} & \frac{1}{2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial r} & \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) & \frac{v_r}{r} \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

Hagen-Poiseuille-Strömung

Die Strömung durch ein gerades Rohr mit kreisförmigem Querschnitt ist das rotationssymmetrische Gegenstück zur oben erwähnten ebenen Poiseuille-Strömung. Dem Problem sind Zylinderkoordinaten angepasst. Die Rechnung wird wiederum analog zu den Berechnungen in einem Kanal durchgeführt:

- Geschwindigkeitsprofil:

$$v_x = 1 - r^2$$

- Deformationstensor:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

- Eigenwerte:

$$\lambda_1 = -r \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = r \quad (\text{C.15})$$

- Eigenvektoren:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbf{R}) \quad (\text{C.16})$$

- Matrix der Hauptachsen:

$$\begin{pmatrix} -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \quad (\text{C.17})$$

Strömung mit reiner Umfangskomponente

- Geschwindigkeitsprofil:

$$v_\varphi = r(1 - r)$$

- Deformationstensor:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r}{2} \\ 0 & -\frac{r}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.18})$$

- Eigenwerte:

$$\lambda_1 = -\frac{r}{2} \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = \frac{r}{2} \quad (\text{C.19})$$

- Eigenvektoren:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbf{R}) \quad (\text{C.20})$$

- Matrix der Hauptachsen:

$$\begin{pmatrix} -\frac{r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

Strömung mit Umfangskomponente

- Geschwindigkeitsprofil:

$$v_x = 1 - r^2 \quad v_\varphi = r(1 - r)$$

- Deformationstensor:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ -r & 0 & -\frac{r}{2} \\ 0 & -\frac{r}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

- Eigenwerte:

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}r \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}r \quad (\text{C.23})$$

- Eigenvektoren:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ \sqrt{5}a \\ a \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -2a \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} -2a \\ \sqrt{5}a \\ -a \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbf{R}) \quad (\text{C.24})$$

- Matrix der Hauptachsen:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2}r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2}r \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

Anhang D

Numerische Differentiation und Integration

Numerische Differentiation

Bei der Auswertung von partiellen Differentialgleichungen stehen nur an den diskreten Punkten Informationen zur Verfügung. Die Differenzenausdrücke, die die Differentiale an einem bestimmten Punkt approximieren, sind Funktionen der umgebenden Nachbarwerte. Die Entwicklung von Differenzenausdrücken für die abhängige Variable erfolgt mit Hilfe von Taylorreihen um den Aufpunkt. In Gleichung D.1 ist eine Vorwärts- und in Gleichung D.2 eine Rückwärtsentwicklung der Taylorreihe um u_i^n gegeben.

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i^n \Delta y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_i^n \Delta y^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_i^n \Delta y^3 + O(\Delta y^4) \quad (\text{D.1})$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i^n \Delta y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_i^n \Delta y^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_i^n \Delta y^3 + O(\Delta y^4) \quad (\text{D.2})$$

Approximationen der Differenzenausdrücke durch Kombination obiger Taylorreihenentwicklungen sind für $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n$ in den Gleichungen D.3 – D.6 dargestellt:

- Vorwärtsdifferenz:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{x_{i+1} - x_i} \quad (\text{D.3})$$

- Rückwärtsdifferenz:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{x_i - x_{i-1}} \quad (\text{D.4})$$

- Zentralsdifferenz:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{(x_i - x_{i-1})^2(u_{i+1}^n - u_i^n) + (x_{i+1} - x_i)^2(u_i^n - u_{i-1}^n)}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})} \quad (\text{D.5})$$

- Zentralsdifferenz für konstante Schrittweiten:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (\text{D.6})$$

Der Abbruchfehler liegt im Falle der Vorwärts- und Rückwärtsentwicklung bei $O(\Delta y)$ und bei einer Differenzenapproximation, wie es bei den Zentralsdifferenzen der Fall ist, bei $O(\Delta y^2)$. Aufgrund nicht konstanter Abstände in radialer Richtung wurden die Terme in radialer Richtung für $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n$ mittels der Gleichung D.5 und in Strömungsrichtung, wegen der konstanten Abstände, für $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n$ mittels Gleichung D.6 approximiert. An den Eckpunkten des Definitionsbereiches wurde von den Gleichungen D.3 – D.4 Gebrauch gemacht.

Numerische Integration

Das Integral einer stetigen Funktion kann als Fläche im Intervall unter der Funktion gedeutet werden. Falls die Stetigkeit nicht gegeben ist, muss auf numerische Integrationsverfahren ausgewichen werden. Diese numerischen Integrationsverfahren führen eine punktweise Berechnung der Stammfunktion unter Verwendung spezieller Näherungsverfahren durch. Im Folgenden sollen die bei der Auswertung benutzten Integrationsverfahren kurz aufgezeigt werden. Hierbei ist n die Anzahl der Teilintervalle im Intervall $[a, b]$ und h die Länge des Teilintervalles, so dass $h = \frac{b-a}{n}$ gilt.

- Trapez-Regel:

$$\int_a^b f(y)dx = \sum_{k=1}^n \frac{h}{2} [f(y_{k-1}) + f(y_k)] \quad (\text{D.7})$$

- Simpson-Regel:

$$\int_a^b f(y)dx = \sum_{k=1}^n \frac{h}{3} [f(y_{2k-2}) + 4f(y_{2k-1}) + f(x_{2k})] \quad (\text{D.8})$$

Zur Berechnung des Volumenstromes aus den gemessenen Daten wurde die Simpson-Regel benutzt. Zur Darstellung der Stromfunktion ist es angebrachter, alle Messpunkte zu verwenden und nicht nur die Stützstellen aus der numerischen Integration mittels der Simpson-Regel. Daher war es vonnöten, die Stützstellen zwischen den durch die Simpson-Regel verwendeten Stützstellen durch die Trapez-Regel zu berechnen. Dadurch konnte die Auflösung verbessert werden.

Anhang E

Inhalt der beiliegenden CD

Dieser Arbeit liegt eine CD mit allen aufgenommenen Messwerten und Auswertungen bei. Die durch das Messprogramm selbst erzeugten Datei-bezeichnungen sind an die Informationen in Anhang A angelehnt. Zum Zwecke der Übersichtlichkeit werden die Datei-Ordner in Abbildung E.1 schematisch dargestellt.

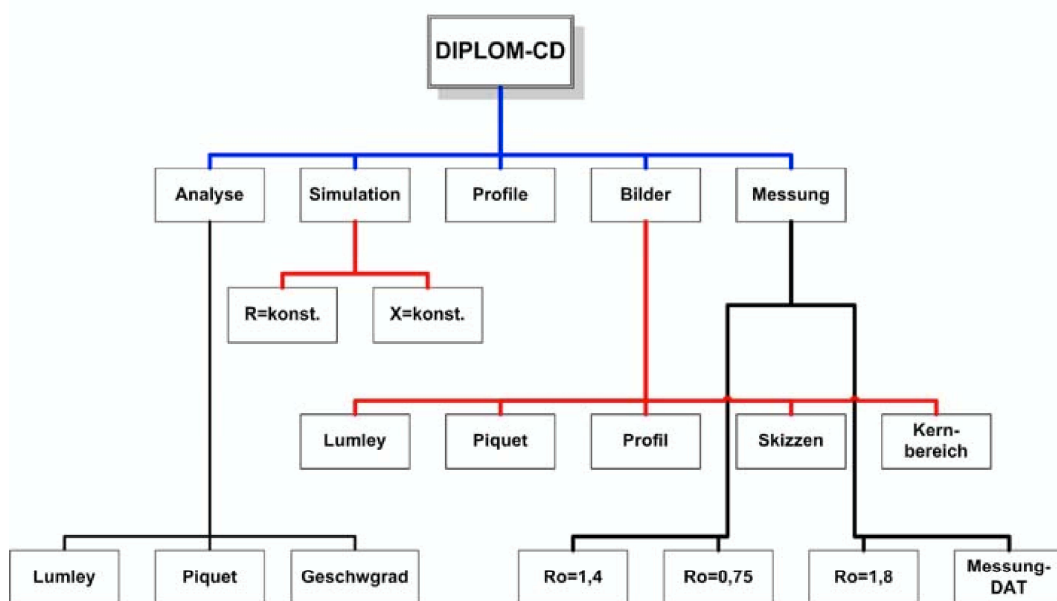


Abbildung E.1: Schematischer Aufbau des CD Inhaltes