LEDNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 1

Obs! Till en fullständig lösning krävs en figur!

LP 1.1 Systemets masscentrum G ligger hela tiden vid axeln. Kraftekvationen för hela systemet:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \quad \Rightarrow \quad P = (M + 2m)\ddot{x}_G$$

LP 1.2 Använd definitionen av kinetisk energi. Varje kula har en cirkelrörelse.

$$\boxed{T = \sum \frac{1}{2} m_k v_k{}^2} \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m(c\omega)^2 + \frac{1}{2} m\left(b^2 + c^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2} m\left(b^2 + c^2\right)\omega^2$$

LP 1.3 Lagen om kinetiska energins två delar kan användas. Sambandet $v = R\omega$ är givet.

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_G{}^2 + \sum \frac{1}{2} m_k v_{k\text{rel}}{}^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} 5mv^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} m(R\omega)^2 = \frac{9}{2} mv^2$$

LP 1.4 Den övre kulan har en fart $b\omega$ i masscentrumsystemet. Den absoluta hastigheten är vektorsumman av systemets hastighet och den relativa hastigheten $\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{\text{rel}}$. Rörelsemängd definieras $\mathbf{p} = \sum m_k \mathbf{v}_k$ men beräknas oftast enligt $\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}_G}$

$$\mathbf{p}_1 = m\left(v - b\omega \sin\theta,\, b\omega\cos\theta,\, 0\right)$$
$$\mathbf{p}_2 = m\left(v + b\omega \sin\theta,\, -b\omega\cos\theta,\, 0\right)$$
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2 = m\left(2v,\, 0,\, 0\right) = 2mv\mathbf{e}_x$$

LP 1.5 Kinetiska energin beräknas antingen som

$$\boxed{T = T^{\text{vagn}} + T^{\text{kulor}}} \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} m\left[(v - r\omega\sin\theta)^2 + (r\omega\cos\theta)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2} m\left[(v + r\omega\sin\theta)^2 + (-r\omega\cos\theta)^2\right] = \frac{1}{2}(M + 2m)v^2 + mr^2\omega^2$$

eller med lagen om kinetiska energins två delar:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_G{}^2 + \sum \frac{1}{2} m_k v_{k\text{rel}}{}^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}(M + 2m)v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} mr^2\omega^2$$

LP 1.6

LP 1.7 Rörelsemängdsmomentet för ett partikelsystem med avseende på origo definieras

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \sum \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k}$$

a) $$\mathbf{H}_O = b\mathbf{e}_x \times mb\omega\mathbf{e}_y + (b\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_z) \times mb\omega\mathbf{e}_y$$
$$= mb^2\omega\,\mathbf{e}_z + mb^2\omega\,\mathbf{e}_z - mb^2\omega\,\mathbf{e}_x$$
$$= -mb^2\omega\,\mathbf{e}_x + 2mb^2\omega\,\mathbf{e}_z$$

b) $$\mathbf{H}_A = b\mathbf{e}_z \times mb\omega\mathbf{e}_y = -mb^2\omega\mathbf{e}_x$$

c) $H_z = \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}_z = 2mb^2\omega$ eller $\mathbf{H}_z = 2mb^2\omega\mathbf{e}_z$

LP 1.8

LP 1.9 Rörelsemängdsmomentets två delar skrivs $\boxed{\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_{OG} \times m\mathbf{v}_G}$

Rörelsemängdsmomentet för ett partikelsystem med avseende på masscentrum kan beräknas i masscentrumsystemet enligt

$$\boxed{\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_{G\mathrm{rel}}}$$

$$\mathbf{H}_{G\mathrm{rel}} = 2mb^2\omega\,\mathbf{e}_z$$
$$\mathbf{H}_O = 2mb^2\omega\,\mathbf{e}_z - y_G \cdot 2mv\,\mathbf{e}_z = 2m(b^2\omega - y_G v)\mathbf{e}_z$$

LP 1.10 Inlämningsuppgift på T just nu.

LP 1.11 Begynnelsevillkoret är $t=0$ $\begin{cases} x=0 \\ \dot{x}=0 \end{cases}$

Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F}=m\mathbf{a}_G}$ ger om trådkraften kallas S

för massan m: $\rightarrow$: $S-kx=m\ddot{x}$
för massan M: $\downarrow$: $Mg-S=M\ddot{x}$

Adderas dessa två ekvationer elimineras den inre kraften S.
Resultatet är en svängningsekvation:

$$Mg-kx=(M+m)\ddot{x}$$

som kan skrivas på standardformen

$$\ddot{x}+\frac{k}{M+m}x=\frac{Mg}{M+m}$$

eller $$\ddot{x}+\omega_n{}^2x=\frac{Mg}{M+m}$$

Den allmänna lösningen är

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t+\frac{Mg}{k}$$
$$\dot{x}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t$$

Begynnelsevillkoret ger

$$0=A\cos 0+B\sin 0+\frac{Mg}{k} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{Mg}{k}$$
$$0=-A\omega\sin 0+B\omega\cos 0 \quad \Rightarrow \quad B=0$$

Lösningen är alltså $$x=\frac{Mg}{k}(1-\cos\omega t)$$

LP 1.12 a) I masscentrumsystemet syns bara rotationen

$$\mathbf{v}_{A\mathrm{rel}}=R\omega\,\mathbf{e}_\theta=R\omega\cos\theta\mathbf{e}_x-R\omega\sin\theta\mathbf{e}_y$$

b) Den absoluta hastigheten är $\mathbf{v}_A=\mathbf{v}_G+\mathbf{v}_{A\mathrm{rel}}$

$$\mathbf{v}_A=(v+R\omega\cos\theta)\mathbf{e}_x-R\omega\sin\theta\mathbf{e}_y$$

LP 1.13 Om vagnens förflyttning är x åt höger blir lådans förflyttning x åt vänster. Trådkraften S på lådan gör lika stort arbete som trådkraften S på vagnen. Det totala arbetet blir därför noll.

Lagen om arbetet $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

$$Px - \mu mgx - \mu mgx = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(P - 2\mu mg)x}{M + m}}$$

Resultatet blir detsamma som när man räknar friktionskraftens arbete vid den relativa förflyttningen $2x$.

LP 1.14 Om plattformens förflyttning är x åt höger blir lådans förflyttning $2x$ åt vänster. Trådkraften S på lådan gör då lika stort arbete som trådkraften $2S$ på plattformen. Det totala trådkraftarbetet blir därför noll.

Lagen om arbetet $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

$$Px - [\mu mg + \mu(M + m)g]x - \mu mg \cdot 2x = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(2\dot{x})^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2[P - \mu(4m + M)g]x}{M + 4m}}$$

LP 1.15 Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ för hela systemet:

$$\uparrow: \quad P + 2N - 2mg = 2m \cdot 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = mg - \frac{P}{2}$$

Lagen om arbetet $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

Kraften P är konstant.

$$P \cdot (b\sin\theta - b\sin\beta) = 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{Pb}{m}(\sin\theta - \sin\beta)}$$

LP 1.16 Om stora lådans förflyttning neråt är x blir lilla lådans förflyttning $2x$. Trådkraften $2S$ på stora lådan gör då lika stort arbete som trådkraften S på lilla vagnen. Det totala arbetet blir noll.

Lagen om arbetet $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

$$kmg \cdot x \sin\beta + mg \cdot 2x \sin\beta = \frac{1}{2}km\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(2\dot{x})^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(k+2)gx\sin\beta}{k+4}}$$

Observera att för $k \to \infty$ (lilla lådan finns ej) blir $\dot{x} = \sqrt{2gx\sin\beta}$

LP 1.17

LP 1.18 Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ projicerad i

tangentialriktningen: $3mc\ddot{\theta} = R_t - 3mg\sin\theta$ (1)

normalriktningen: $3mc\dot{\theta}^2 = R_n - 3mg\cos\theta$ (2)

Nu måste $\ddot{\theta}$ och $\dot{\theta}^2$ bestämmas på annat sätt!

Momentekvationen $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$ ger

$$-3mgc\sin\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mc^2\dot{\theta} + 2m\left(b^2 + c^2\right)\dot{\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \quad -3mgc\sin\theta = m\left(2b^2 + 3c^2\right)\ddot{\theta} \quad (3)$$

Lagen om mekaniska energins bevarande $\boxed{T + V = T_0 + V_0}$:

$$\frac{1}{2}mc^2\dot{\theta}^2 + 2\cdot\frac{1}{2}m\left(b^2 + c^2\right)\dot{\theta}^2 - 3mgc\cos\theta = 0 + 0$$

$$\Rightarrow \quad m\left(2b^2 + 3c^2\right)\dot{\theta}^2 = 6mgc\cos\theta \quad (4)$$

Sätt in (3) och (4) i (1) och (2)!

$$R_t = \frac{6b^2}{2b^2 + 3c^2}mg\sin\theta; \qquad R_n = \frac{2b^2 + 9c^2}{2b^2 + 3c^2}\cdot 3mg\sin\theta$$

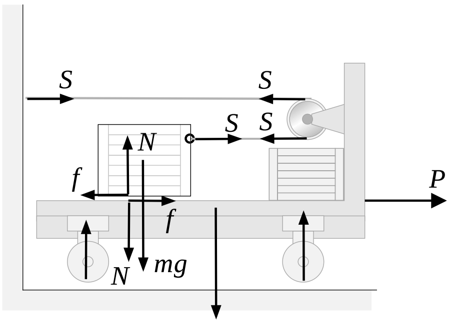
LP 1.19 De krafter som verkar är tyngdkraft och kontaktkraft. Kontaktkraften gör inget arbete vid rullning. Den mekaniska energin bevaras alltså för hela systemet:: $\boxed{T + V = T_0 + V_0}$

$$\frac{1}{2}\cdot 5mv^2 + 4\cdot\frac{1}{2}m(R\omega)^2 - 5mgx\sin\beta = 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{10}{9}g\sin\beta\, x}$$

LP 1.20 Om vagnens förflyttning åt höger är x, blir lådans förflyttning $2x$ åt samma håll. Avvikelsen från utgångsläget kallas x. Trådkraften S på lådan gör då lika stort arbete men med motsatt tecken som trådkraften $2S$ på vagnen. Det totala trådkraftarbetet blir därför noll. Friktionskraften mellan lådan och vagnen är vid glidning $f = \mu N = \mu mg$

Lagen om arbetet $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

$$Px + \mu mg \cdot x - \mu mg \cdot 2x = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(2\dot{x})^2$$



$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2(P - \mu mg)x}{M + 4m}}$$

Eftersom lådans relativa förflyttning är x blir resultatet

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(P - \mu mg)d}{M + 4m}}$$

LP 1.21 Om alla förluster försummas är det bara tyngdkraften som gör arbete. Systemet är konservativt och den mekaniska energin bevaras:

$\boxed{T + V = T_0 + V_0}$ för hela systemet:

Låt den potentiella energin vara noll i slutläget 1.

$$\frac{1}{2}mv_1^{\ 2} + 0 = \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} + mg \cdot y_G$$

Tågets masscentrum beräknas som masscentrum för en kurvbåge.

Masscentrum för en kurvbåge motsvarande en vinkel 2β är

$y_G = \dfrac{\sin\beta}{\beta}R$. Här är $R \cdot 2\beta = l \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{l}{2R}$

Insättning ger $v_1 = \sqrt{v_0^{\ 2} + 4g\dfrac{R^2}{l}\sin\left(\dfrac{l}{2R}\right)}$

LP 1.22 Om prismats förflyttning är x blir cylinderns höjdändring $x\tan\beta$. Motsvarande hastigheter är då $\dot{x}$ respektive $\dot{x}\tan\beta$. Om all friktion försummas är det bara tyngdkraften som gör arbete. Normalkrafterna gör tillsammans inget arbete.

Den mekaniska energin bevaras:

$\boxed{T+V=T_0+V_0}$ för hela systemet:

$$\frac{1}{2}M(\dot{x}\tan\beta)^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2-Mgx\tan\beta=0+0$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x}=\sqrt{\frac{2Mgx\tan\beta}{M\tan^2\beta+m}}$$

LP 1.23 Kropparna rör sig friktionsfritt. Det finns då ingen yttre horisontell kraft på hela systemet. Kraftekvationen säger då att systemets rörelsemängd är en rörelsekonstant.
Kraftekvationen

$$\boxed{\mathbf{F}=m\mathbf{a}_G} \quad\Rightarrow\quad \boxed{F_x=m\ddot{x}_G} \quad\Rightarrow\quad \boxed{0=m\ddot{x}_G} \quad\Rightarrow\quad \boxed{m\dot{x}_G=\text{konstant}}$$

$$\rightarrow:\quad -pmv_0+mv_0=-(1+p)mv_1 \quad\Rightarrow\quad v_1=\frac{p-1}{p+1}v_0 \qquad (1)$$

Här har antagits att v_1 är masscentrums hastighet åt vänster då fjäderförkortningen är maximal.

Eftersom fjäderkraften är den enda kraft som gör arbete bevaras också den mekaniska energin

$\boxed{T_1+V_1=T_0+V_0}$ för hela systemet:

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+\frac{1}{2}pmv_0{}^2=2\cdot\frac{1}{2}k\delta^2+\frac{1}{2}(p+1)mv_1{}^2 \qquad \Rightarrow$$

$$(1+p)mv_0{}^2=2k\delta^2+(p+1)mv_1{}^2 \qquad (2)$$

Insättning av (1) i (2)! $\quad\Rightarrow\quad \delta=\sqrt{\dfrac{2pm}{(p+1)k}}\,v_0$

LP 1.24 Kulan A har en cirkelrörelse. Farten kan då skrivas radien gånger vinkelhastigheten: $v_A = \sqrt{b^2+c^2}\cdot\dot{\theta}$. Bestäm alltså $\dot{\theta}$ som funktion av tiden!

Momentekvationen med avseende på den fixa punkten O

$\boxed{\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O}$ kan projiceras på z-axeln $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$, vilket ger

$$M_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mc^2\dot{\theta} + 2\cdot m\left(b^2+c^2\right)\dot{\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad M_1 = m\left(2b^2+3c^2\right)\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\theta} = \frac{M_1}{m\left(2b^2+3c^2\right)}$$

$\ddot{\theta}$ är alltså konstant och tidsintegrering ger $\dot{\theta} = \dfrac{M_1 t}{m\left(2b^2+3c^2\right)}$

$$\Rightarrow \qquad v_A = \frac{\sqrt{b^2+c^2}\; M_1 t}{m\left(2b^2+3c^2\right)}$$

Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ projicerad i

tangentialriktningen: $R_t = 3mc\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad R_t = \dfrac{3cM_1}{m\left(2b^2+3c^2\right)}$

normalriktningen: $R_n = 3mc\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad R_n = \dfrac{3cM_1^{\,2}t^2}{m\left(2b^2+3c^2\right)^2}$

LP 1.25 Krafterna på systemet är tyngdkraft $5mg$, normalkraft N och friktionskraft f.

Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ i rörelseriktningen:

$$5mg\sin\beta - f = 5m\ddot{x}_G \quad \Rightarrow \tag{1}$$

Momentekvationen $\boxed{\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G}$

med avseende på en horisontell axel genom G $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$ ger

$$f\cdot R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(4R\cdot mR\dot{\theta}\right) \text{ eller } \quad f = 4mR\ddot{\theta} \tag{2}$$

Eliminera friktionskraften f addera ekvationerna (1) och (2).

Rullningsvillkoret är givet i texten: $\dot{x} = R\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = R\ddot{\theta}$ (3)

Insättning av (2) och (3) i (1) ger $\ddot{x}_G = \dfrac{5}{9}g\sin\beta$

LP 1.26 Vagnarna rör sig friktionsfritt. Det finns då ingen yttre horisontell kraft på hela systemet. Kraftekvationen säger då att systemets rörelsemängd är en rörelsekonstant. Kraftekvationen

$$\boxed{\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_x = \dot{p}_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = \dot{p}_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_x = \text{rörelsekonstant}}$$

Antag att den vänstra vagnens nya hastighet är v_1 åt höger och den högra vagnens nya hastighet är v_2 åt vänster.
Rörelsemängden är hela tiden densamma:

$$\rightarrow: \quad (2m+M)v_0 - (M+m)v_0 = (M+m)v_1 + mv - (M+m)v_0 \quad \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{1}{M+m}\left[(M+2m)v_0 - mv\right] \qquad (1)$$

$$\rightarrow: \quad (2m+M)v_0 - (M+m)v_0 = (M+m)v_1 - (M+2m)v_2$$

Om (1) sätts in i denna ekvation fås

$$v_2 = \frac{1}{M+2m}\left[(M+m)v_0 - mv\right]$$

Om massorna är lika : $M = m$ fås $v_1 = \frac{1}{2}\left[3v_0 - v\right];\ v_2 = \frac{1}{3}\left[2v_0 - v\right]$

Den nya relativa farten för vagnarna blir då

$$v_{\text{rel}} = v_1 + v_2 = \frac{13v_0 - 5v}{6}$$

LP 1.27 Det finns inget yttre kraftmoment med avseende på en vertikal axel genom den fixa punkten O som verkar på hela systemet.

Momentekvationen $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$ för hela systemet:

$$0 = \dot{H}_z \qquad \Rightarrow \qquad H_z \text{ är en rörelsekonstant:}$$

$$m(l\sin\beta)^2\omega_0 + km(l\sin\beta)^2\omega_0 = km(2l\sin\beta)^2\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{1+k}{4k}\omega_0$$

b) Friktionskrafter saknas. Normalkrafterna på partikel och rör gör tillsammans inget arbete. Endast tyngdkraften gör arbete och den mekaniska energin bevaras för hela systemet .

$\boxed{T_0 + V_0 = T_1 + V_1}$ ger om u är den relativa hastigheten.

$$\frac{1}{2}m(l\sin\beta\omega_0)^2 + \frac{1}{2}km(l\sin\beta\omega_0)^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}km\left[u^2 + (2l\sin\beta\omega_1)^2\right] + mgl\cos\beta - kmgl\cos\beta$$

$$\Rightarrow \qquad u = \sqrt{(l\sin\beta\omega_0)^2\left[1 - \frac{1+k}{4k}\right] + \frac{2(k-1)}{k+1}gl\cos\beta}$$

LP 1.28

LP 1.29 Trådkraft S, normalkraft N, friktionskraft f och tyngdkraft mg verkar på kroppen på planet. Den hängande kroppen påverkas av trådkraft S och tyngdkraft Mg. De båda trådkrafterna gör lika stort arbete så att det totala trådkraftarbetet blir noll. Friktionskraften är vid glidning $f = \mu N = \mu mg$. Tyngdkraftens och friktionskraftens arbete bestäms som kraft gånger väg medan fjäderkraftens arbete måste bestämmas med integrering eftersom fjäderkraften ej är konstant.

Lagen om kinetiska energin $\boxed{U = T - T_0}$

för hela systemet:

$$Mgx - \mu mgx - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - 0$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = \sqrt{\frac{1}{M+m}\left(2Mgx - 2\mu mgx - kx^2\right)}$$

LP 1.30 Friktionskrafter saknas. Det totala trådkraftarbetet blir noll eftersom tråden är oelastisk. Normalkraften på kropp A gör inget arbete. Endast tyngdkraften gör arbete och den mekaniska energin bevaras.

Lagen om mekaniska energins bevarande $\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0}$

för hela systemet ger för de två tillstånd då farten är noll

$$0 + m_A gR(1-\cos\beta) + 0 = 0 + 0 + m_B g\left[R\sqrt{2} - 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right)}{1-\cos\beta}$$

LP 1.31 Till en början är förflyttningarna för kropparna lika. Trådkraften S är densamma i hela den övre tråden. Trådkrafternas totala arbete är då noll. Samma resonemang gäller den korta tråden. Tyngdkraften är den enda kraft som gör arbete för den första fasen av rörelsen och systemet är konservativt.

Lagen om mekaniska energins bevarande $\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0}$
för hela systemet ger för begynnelsetillståndet och tillståndet strax innan den undre vikten stöter mot golvet

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kmv_1^2 + kmgh - 2mgh = 0 + 0$$

$$\Rightarrow \qquad v_1^2 = \frac{4-2k}{2+k}gh$$

Nu är den undre vikten i vila och har förlorat energi vid stöten mot golvet. Efter stöten gäller dock lagen om mekaniska energins bevarande för resten av systemet. Låt v_2 vara farten just innan vikterna nuddar varandra.

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kmv_2^2 + kmgl - mgl = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kmv_1^2 + 0$$

$$\Rightarrow \qquad v_2^2 = \frac{2(1-k)}{1+k}gl + \frac{(1+k)(4-2k)}{(1+k)(2+k)}gh$$

Villkoret $v_2 = 0$ ger då $\qquad l = \dfrac{(1+k)(k-2)}{(1-k)(2+k)}h$

LP 1.40 ”Raketekvationen” med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Strömningen är stationär. Den ser likadan ut vid alla tidpunkter och alla tidsderivator är därför noll. Massflödet in är lika med massflödet ut och kan skrivas $q \equiv q_i = q_u = \rho Q$. Vattnet i sjön har hastigheten noll. Insättning ger

$$\begin{cases} \leftarrow: \quad S + q \cdot 0 - qv\cos\beta = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v + m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \qquad \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q - q \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$S - qv\cos\beta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S = \rho Q v\cos\beta$$

LP 1.41 ”Raketekvationen” med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Strömningen är stationär. Den ser likadan ut vid alla tidpunkter och alla tidsderivator är noll. Massflödet in är lika med massflödet ut och kan skrivas $q \equiv q_i = q_u$. Flygplanets hastighet är konstant. Antag att motståndskraften är F_D. Avgasernas absoluta hastighet framåt är $v - u$. Insättning ger

$$\begin{cases} \rightarrow: \quad -F_D + q \cdot 0 - q(v-u) = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v + m \cdot 0 \\ \qquad \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q - q \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$F_D = q(u - v)$$

Detta gäller om bränslets andel av avgasernas massa försummas.

LP 1.42 ”Raketekvationen” med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Strömningen är stationär. Den ser likadan ut vid alla tidpunkter och alla tidsderivator är noll. Massflödet in är lika med massflödet ut och kan skrivas $q \equiv q_i = q_u = \rho\pi r^2 u$. Insättning ger

$$\begin{cases} \uparrow: \quad -mg + N + q_i(-u) - q_u(-v\cos\beta) = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \quad 0 = q_i - q_u \end{cases} \Rightarrow$$

$$-mg + N - qu + qv\cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg + q(u - v\cos\beta) \quad \Rightarrow$$
$$N = mg + \rho\pi r^2 u(u - v\cos\beta)$$

LP 1.45 ”Raketekvationen” med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Det finns ingen yttre kraft i rörelseriktningen. Massflödet in har en vertikal hastighet. Massflödet ut är noll. Insättning ger

$$\begin{cases} \rightarrow: \quad 0 + q\cdot 0 - 0 = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \quad \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q - 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad mv = m_0 v_0 \quad \text{(en rörelsekonstant)} \quad \Rightarrow$$

$$v = \frac{v_0 m_0}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0 m_0}{m} \quad \Rightarrow \quad \text{(kedjeregeln)} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}x = \frac{v_0 m_0}{m}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}m \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{v_0 m_0}{q}\frac{\mathrm{d}m}{m} \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{v_0 m_0}{q}\ln\frac{m_0 + m_1}{m_0}$$

LP 1.46 ”Raketekvationen” med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i\mathbf{v}_i - q_u\mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Om granaterna skjuts iväg framåt kommer flygplanets hastighet att minska om inget görs. Antag att det krävs en extra dragkraft F_1 för att hålla hastigheten konstant! Systemets totala massa betecknas m. Varje granat har den absoluta hastigheten $v + v_{\mathrm{rel}}$, där v är flygplanets hastighet. Insättning ger

$$\begin{cases} \leftarrow: \quad F_1 + 0 - q_u\left(v + v_{\mathrm{rel}}\right) = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \qquad\quad \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0 - q_u \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$F_1 + 0 - \left(-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)\left(v + v_{\mathrm{rel}}\right) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m \cdot 0 \qquad \Rightarrow$$

$$F_1 + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(v + v_{\mathrm{rel}}\right) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v \qquad \Rightarrow$$

$$F_1 = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v_{\mathrm{rel}} \qquad \Rightarrow$$

$$F_1 = n\Delta m \cdot v_{\mathrm{rel}} \quad \Rightarrow \quad F_1 = 70 \cdot \left(0.640\ \mathrm{kg}\right) \cdot \left(900\ \mathrm{m/s}\right) \approx 40.3\ \mathrm{kN}$$

LP 1.47 ”Raketekvationen” med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Insättning ger

$$\begin{cases} \uparrow: \quad -mg + S + 0 - q(-u\sin\beta) = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v + m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0 - q \end{cases} \quad \Rightarrow$$

I första ögonblicket är farten noll och accelerationen a_1. Det totala massflödet ut ifrån hinken är q.

$$-mg + S + qu\sin\beta = -q\cdot 0 + ma_1 \quad \Rightarrow \quad S = mg - qu\sin\beta + ma_1$$

$$\Rightarrow \quad S = (m_0 + m_1)(g + a_1) - qu\sin\beta$$

LP 1.48 ”Raketekvationen” med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Betrakta kedjan som ligger på hyllan. Låt det vara ”systemet”. Antag att hyllan påverkar kedjan med kraften N. Insättning ger

$$\begin{cases} \uparrow: \quad -mg + N + q_i - 0 = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v + m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q_i - 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Systemet har accelerationen a och hastigheten $\dot{y} = at$. Den översta länken, liksom de andra ovanför systemet, faller fritt så att $\dot{x} = gt$. Hur lång är den kedja som per tid kommer in i systemet? Den är $\dot{x} + \dot{y}$. Massflödet in i systemet är alltså $q_i = \rho(\dot{x} + \dot{y})$.

$$\Rightarrow \quad -\rho(x+y)g + N + \rho(\dot{x}+\dot{y})(-gt) - 0 = \rho(\dot{x}+\dot{y})at + \rho(x+y)a$$

$$\Rightarrow \quad N = \rho(gt + at)(g + a)t + \rho(x+y)(g+a)$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{3}{2}\rho(g+a)^2 t^2$$

LP 1.49 ”Raketekvationen” med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Insättning ger

$$\begin{cases} \uparrow: \quad -mg + 0 - q(v-u) = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v + m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0 - q \end{cases} \Rightarrow$$

$$-mg - q(v-u) = -qv + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad -mg + qu = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow$$

$$-mg + qu = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} = \frac{g}{q} - \frac{u}{m} \quad \Rightarrow$$

$$v = -\frac{g}{q}(m_0 + m_1 - m) + u\ln\frac{m_0 + m_1}{m}$$

LP 1.50 ”Raketekvationen” med bivillkor skrivs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F} + q_i \mathbf{v}_i - q_u \mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{p}} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = q_i - q_u \end{cases}}$$

Insättning ger

$$\begin{cases} \uparrow: \quad -mg + 0 - q(v-u) = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v + m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0 - q \end{cases} \Rightarrow$$

$$-mg - q(v-u) = -qv + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad -mg + qu = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow$$

$$-mg + qu = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} = \frac{g}{q} - \frac{u}{m} \quad \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{g}{q}(m_1 - m_0) - u\ln\frac{m_1}{m_0}$$