LEDNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 2

OBS! En fullständig lösning måste innehålla en figur!

LP 2.1 Kroppen har en rotationshastighet. Kulan P beskriver en cirkelrörelse. För ren rotation gäller

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_P = 5b\omega\mathbf{e}_t$$

Eftersom $\boldsymbol{\omega}$ och $\mathbf{r}_{OP}$ är vinkelräta bestäms storleken av kryssprodukten med ”belopp gånger belopp”. Riktningen bestäms av högerregeln.

Accelerationen ges av $\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP})}$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{a}_P = 5b\dot{\omega}\,\mathbf{e}_t + 5b\omega^2\mathbf{e}_n = 5b\alpha\,\mathbf{e}_t + 5b\omega^2\mathbf{e}_n$$

Den första kryssprodukten bestäms på samma sätt som för hastigheten. Den dubbla kryssprodukten bestäms i två steg: först parentesen och sedan hela uttrycket.

LP 2.2 Kroppen har en ren rotationshastighet. Punkten P beskriver en cirkelrörelse. För ren rotation gäller

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_P = R\omega\,\mathbf{e}_t$$

där vinkelfarten fortfarande är okänd.
Accelerationen, som är känd,

ges av $\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP})}$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{a}_P = R\alpha\,\mathbf{e}_t + R\omega^2\mathbf{e}_n = (1.5\,\mathbf{e}_t + 4\,\mathbf{e}_n)\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\Rightarrow \qquad R\alpha = 1.5\,\mathrm{m/s^2}; \quad R\omega^2 = 4\ \mathrm{m/s^2}$$

Eftersom $R = 0.250\,\mathrm{m}$ fås resultatet

$\alpha = 6\ \mathrm{rad/s^2}$; $\omega = 4\,\mathrm{rad/s}$

LP 2.3 Punkten P har en acceleration som ges av

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP})}$$

Vi måste alltså ur det givna i princip bestämma vinkelaccelerationen $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ och vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$. En punkt på den lilla remskivans periferi måste ha farten v_B. Vi får då skivans vinkelhastighet ur

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad v_B = r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_B}{r} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2}{0.1}\ \text{rad/s} = 20\ \text{rad/s}$$

Accelerationen för en punkt på den stora skivans periferi ges av

$$\boxed{\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a} = R\dot{\omega}\,\mathbf{e}_t + R\omega^2 \mathbf{e}_n$$

Accelerationen i tangentialriktningen är den givna a_A.
Det betyder att

$$R\dot{\omega} = a_A \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\omega} = \frac{a_A}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{34}{0.33}\ \text{rad/s}^2$$

Resultatet blir

$$\mathbf{a}_P = \frac{R}{2} \cdot \frac{a_A}{R} \mathbf{e}_t + \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{v_B}{r}\right)^2 \mathbf{e}_n = \frac{a_A}{2} \mathbf{e}_t + \frac{R}{2r^2} v_B{}^2 \mathbf{e}_n = (17\mathbf{e}_t + 66\mathbf{e}_n)\text{m/s}^2$$

LP 2.4 Alla tre kropparna har ren rotationsrörelse. En punkt på en av de oelastiska remmarna har samma fart som alla andra punkter på remmen. En punkt på periferin av en remskiva måste ha samma fart som remmens fart. Detta leder till ekvationerna

$$3r\omega_A = r\omega_B \qquad \Rightarrow \qquad \omega_B = 3\omega_A$$
$$2r\omega_C = 4r\omega_B \qquad \Rightarrow \qquad \omega_C = 6\omega_A$$

LP 2.5 Punkten P har en acceleration som allmänt kan skrivas

$$\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P)$$

där lägevektorn börjar i centrum av skiva C. Med naturliga basvektorer blir det

$$\mathbf{a}_P = 2r\alpha_C \mathbf{e}_t + 2r\omega_C{}^2 \mathbf{e}_n \qquad (1)$$

Bestäm alltså först α_C och ω_C! Varje del av en rem har lika stor fart, men inte lika hastighet. Varje del av en rem har också lika stor fartökning per tid, dvs acceleration i hastighetsriktningen. Den vänstra remmens fart kan skrivas antingen som periferihastigheten för skivan A eller periferihastigheten för B. Motsvarande gäller också för den andra remmen. Låt ω vara vinkelhastigheten för A!

$$\begin{cases} r\omega = 2r\omega_B \\ r\omega_B = 2r\omega_C \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \omega_C = \frac{1}{4}\omega \quad \Rightarrow \quad \omega_C = \frac{1}{4}\alpha t$$

b) Tidsderivering ger $\alpha_C = \dfrac{1}{4}\alpha$. Insättning i (1) ger

$$\mathbf{a}_P = 2r\frac{\alpha}{4}\mathbf{e}_t + 2r\left(\frac{\alpha t}{4}\right)^2 \mathbf{e}_n$$

Storleken blir då $\quad a_P = \sqrt{\left(\dfrac{r\alpha}{2}\right)^2 + 4r^2\left(\dfrac{\alpha^4 t^4}{4^4}\right)^2} = \dfrac{r\alpha}{2}\sqrt{1 + \dfrac{\alpha^2 t^4}{16}}$

LP 2.6 Stången OP har en rotationshastighet. Ändpunkten A har en cirkelrörelse. Hastigheten kan skrivas $\mathbf{v}_A = b\omega \mathbf{e}_\theta$. Hastighetskomponenten i x-riktningen kan skrivas $(\mathbf{v}_A)_x = b\omega \sin\theta$ och är densamma som hastigheten för stången BC.

Accelerationen för A är

$$\mathbf{a}_A = b\alpha \mathbf{e}_\theta - b\omega^2 \mathbf{e}_r$$

Stången BC får då en acceleration i x-riktningen som är

$$(\mathbf{a}_A)_x = b\alpha \sin\theta + b\omega^2 \cos\theta$$

Alternativt tecknas koordinaten för A. Två tidsderiveringar ger resultatet

LP 2.7 Skivans mittpunkt kallas G och sammanfaller med masscentrum för en homogen skiva. Hastighetsriktningarna i A och B är kända. Sambandsformeln för hastigheter

$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}}$$

kan projiceras på x- och y-axeln:

$$\rightarrow: \quad v_A \cos 60° = v_B - b\omega \cos 60° \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad -v_A \sin 60° = 0 - b\omega \sin 60° \qquad (2)$$

Ekv (2) ger $v_A = b\omega$ och (1) ger då $v_B = b\omega$

Mittpunktens hastighet fås enligt sambandsformeln

$$\boxed{\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BG}} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_G = b\omega\,\mathbf{e}_x - \frac{b\omega}{4}\mathbf{e}_x - \frac{b\omega\sqrt{3}}{4}\mathbf{e}_y \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_G = \frac{3}{4}b\omega\,\mathbf{e}_x - \frac{\sqrt{3}b\omega}{4}\mathbf{e}_y$$

LP 2.8 Sambandsformeln för hastigheter för vardera stången är

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{AC} \times \mathbf{r}_{CA} \qquad (1)$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{CB} \qquad (2)$$

Hastigheten $\mathbf{v}_C$ och vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}_{AC}$ skall bestämmas. Utnyttja att $\boldsymbol{\omega}_{BC} = -\boldsymbol{\omega}_{AC}$ och subtrahera ekv (1) och (2)!

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AC} \times (\mathbf{r}_{CA} + \mathbf{r}_{CB})$$

Tag y-komponenten!

$$\uparrow: \quad v_A - v_B = -\omega_{AC} \cdot 2b\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{AC} = \frac{v_B - v_A}{2b\sin\theta} \qquad (3)$$

Addition av ekv (1) och (2) ger

$$\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B = 2\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{AC} \times (\mathbf{r}_{CA} - \mathbf{r}_{CB}) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_C = \frac{v_A + v_B}{2}\mathbf{e}_y - \frac{1}{2}\omega_{AC} \cdot 2b\cos\theta\,\mathbf{e}_x$$

Insättning av (3) ger $\qquad \mathbf{v}_C = \dfrac{v_B - v_A}{2\tan\theta}\mathbf{e}_x + \dfrac{v_A + v_B}{2}\mathbf{e}_y$

LP 2.9 Den högra och vänstra vajern tangerar trissorna i C respektive D. C har liksom B hastigheten noll och D har liksom A hastigheten v_A uppåt. Sambandsformeln för hastigheter

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{CD}$$

Men $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A$ och $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ ger

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{CD} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{v_A}{3r} \text{ medurs}$$

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{CO} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_O = \mathbf{0} + 2r\cdot\frac{v_A}{3r}\mathbf{e}_y \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_O = \frac{2v_A}{3}\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{OP} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_P = \frac{2v_A}{3}\mathbf{e}_y + 2r\cdot\frac{v_A}{3r}\mathbf{e}_x \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_P = \frac{2v_A}{3}\mathbf{e}_x + \frac{2v_A}{3}\mathbf{e}_y$$

LP 2.10 Både stången OA och hjulet vid C har ren rotationshastighet. A och B beskriver var sin cirkelrörelse. Antag att hjulet har en vinkelhastighet Ω medurs!

$$\mathbf{v}_A = b\omega\mathbf{e}_\theta = -b\omega\sin\theta\,\mathbf{e}_x + b\omega\cos\theta\,\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{v}_B = -r\Omega\mathbf{e}_x$$

Sambandsformeln för hastigheter

$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{BA}}$$

kan projiceras på x- och y-axeln:

$$\rightarrow: \quad -b\omega\sin\theta = -r\Omega + 0 \qquad (1)$$
$$\uparrow: \quad b\omega\cos\theta = 0 + c\omega_{AB} \qquad (2)$$

Ekv (2) ger $\omega_{AB} = \dfrac{b\omega}{c}\cos\theta$ och (1) ger då $\Omega = \dfrac{b\omega}{r}\sin\theta$

LP 2.11 Inlämningsuppgift på T just nu

LP 2.12 Antag att vinkelhastigheterna är ω_{AB} och ω_{BC} moturs. Sambandsformeln för hastigheter för stången AB

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{BA}$$

$$\rightarrow: \quad 0 = c\omega_{BC} - b\omega_{AB}\cos\theta \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad -v_A = 0 - b\omega_{AB}\sin\theta \qquad (2)$$

Ekv (2) ger $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{b\sin\theta}$ och ekv (1) ger då $\omega_{BC} = \dfrac{v_A}{c\tan\theta}$

LP 2.13 Både stången OA och CB har ren rotationshastighet. A och B beskriver var sin cirkelrörelse med hastigheterna

$$\mathbf{v}_A = -3b\omega\,\mathbf{e}_y; \qquad \mathbf{v}_B = 2b\Omega\mathbf{e}_x$$

Stången AB, som tillfälligtvis har längden $\sqrt{13}\,b$ och bildar vinkeln θ med vertikalen, är inte stel. Sambandsformeln gäller ej för hastighetskomponenter i stångens riktning. Vi kan ändå tillämpa sambandsformeln i en riktning vinkelrätt mot stången. Alltså,

$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{BA}} \qquad \Rightarrow$$

$$3b\omega\sin\theta = -2b\Omega\cos\theta + \sqrt{13}\,b\omega_{AB} \quad \Rightarrow$$

$$\omega_{AB} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\omega\sin\theta + 2\Omega\cos\theta)$$

Figurens geometri ger $\sin\theta = 3/\sqrt{13}$ och $\cos\theta = 2/\sqrt{13}$

$$\Rightarrow \qquad \omega_{AB} = \frac{1}{13}(9\omega + 4\Omega) \qquad \text{(moturs)}$$

LP 2.14 Eftersom D betraktas som en fix punkt beskriver B en cirkelrörelse. Punkten A har en vertikal hastighet.

$$\mathbf{v}_A = v\,\mathbf{e}_y; \qquad \mathbf{v}_B = b\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi = b\dot{\varphi}\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + b\dot{\varphi}\sin\varphi\,\mathbf{e}_y \tag{1}$$

Vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ skall bestämmas.
Sambandsformeln för hastigheter för skopan AB

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{BA}$$

$$\rightarrow: \quad 0 = b\dot{\varphi}\cos\varphi + c\dot{\theta}\sin\theta \tag{2}$$

$$\uparrow: \quad v = b\dot{\varphi}\sin\varphi - c\dot{\theta}\cos\theta \tag{3}$$

Ekv (2) ger $\dot{\varphi} = -\dfrac{c\sin\theta}{b\cos\varphi}\dot{\theta}$ och ekv (1) ger $\dot{\theta} = \dfrac{b\dot{\varphi}\sin\varphi - v}{c\cos\theta}$ $\Rightarrow$

$$\dot{\theta} = -\frac{bc\sin\theta\sin\varphi}{bc\cos\varphi\cos\theta}\dot{\theta} - \frac{v}{c\cos\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta} = -\frac{v\cos\varphi}{c\cos(\theta-\varphi)}$$

LP 2.15 Sambandsformeln för hastigheter för stången AB

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CB}$$

$$\rightarrow: \quad 0 = -v + b\omega \sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{v}{b\sin\theta}$$

Sambandsformeln igen: $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CA} \quad \Rightarrow$

$$\mathbf{v}_A = -v\mathbf{e}_x - b\omega \sin\theta\, \mathbf{e}_x + b\omega \cos\theta\, \mathbf{e}_y \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_A = -\left(v + b \cdot \frac{v}{b\sin\theta} \sin\theta\right)\mathbf{e}_x + b \cdot \frac{v}{b\sin\theta} \cos\theta\, \mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{v}_A = -2v\,\mathbf{e}_x + \frac{v}{\tan\theta}\mathbf{e}_y$$

LP 2.16 Momentancentrums läge bestäms geometriskt av skärningspunkten av de två räta linjer som går genom hastighetsvektorernas fotpunkter respektive spetsar. Momentancentrum C ligger alltså någonstans på stången eller dess förlängning. Antag att C ligger på stången på avståndet x ifrån den vänstra ändpunkten. Då gäller

$$\begin{cases} v_A = (b-x)\omega \\ v_B = (2b-x)\omega \end{cases} \Rightarrow \quad v_B(b-x) = v_A(2b-x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{v_B - 2v_A}{v_B - v_A} b$$

För det givna hastighetsförhållandet fås $x = \dfrac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$ m

Vinkelhastigheten fås då ur det första sambandet

$$\omega = \frac{v_A}{b-x} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{2v_A}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = 10 \text{ rad/s}$$

LP 2.17 Enligt konstruktionsmetoden för momentancentrums läge ligger den punkten C på stången eller dess förlängning. Antag att C ligger på avståndet x ifrån den vänstra ändpunkten. Då gäller

$$v_A = (x-b)\omega \quad \Rightarrow \quad x = b + \frac{v_A}{\omega} \quad \Rightarrow \quad x = b + \frac{v_A}{\omega} \quad \Rightarrow \quad x = 3 \text{ m}$$

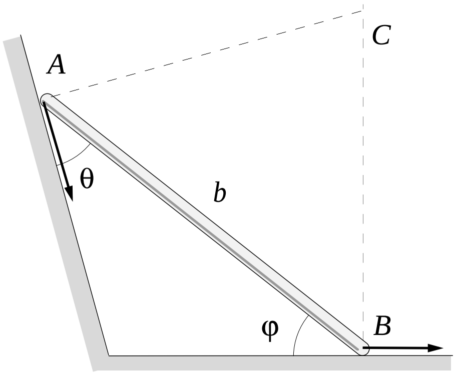
Hastigheten i B blir då med hjälp av momentancentrum

$$v_B = (x-2b)\omega \quad \Rightarrow \quad v_B = \left(b + \frac{v_A}{\omega} - 2b\right)\omega$$

$$\Rightarrow \; v_B = v_A - b\omega \; \Rightarrow \quad v_B = 5 \text{ m/s}$$

LP 2.18

LP 2.19



Hastighetsriktningarna i A och B är kända. Drag räta linjer genom A och B vinkelrätt mot hastighetsvektorerna. Skärningspunkten är momentancentrum C. I det betraktade ögonblicket kan man säga att skivan roterar kring momentancentrum.

A och B ser ut att ha en cirkelrörelse kring C. Farten är radien gånger vinkelhastigheten:

$$v_A = |\mathbf{r}_{CA}|\omega; \quad v_B = |\mathbf{r}_{CB}|\omega$$

Avstånden $|\mathbf{r}_{CA}|$ och $|\mathbf{r}_{CB}|$ motsvarar sidorna i triangeln ABC.

Hastighetsförhållandet kan bestämmas med hjälp av sinussatsen för triangeln ABC:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{|\mathbf{r}_{CB}|\omega}{|\mathbf{r}_{CA}|\omega} = \frac{|\mathbf{r}_{CB}|}{|\mathbf{r}_{CA}|} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}$$

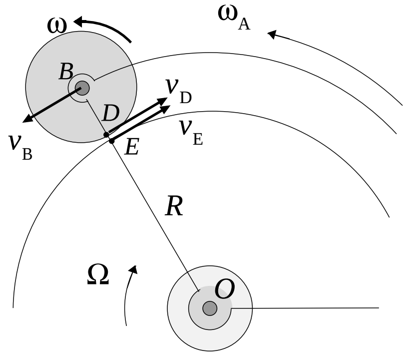
Lösningen fås mycket enklare om man inser att projektionen av de två hastigheterna $\mathbf{v}_A$ och $\mathbf{v}_B$ på skivans riktning måste vara lika om skivan är stel:

$$\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{e}_{AB} = \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{e}_{AB} \qquad \Rightarrow \qquad v_A \cos\theta = v_B \cos\varphi$$

LP 2.20 Inlämningsuppgift på T just nu

LP 2.21 Lösning finns i boken

LP 2.22



Antag att vinkelhastigheten är ω moturs. Punkten B har en cirkelrörelse kring O:

$$v_B = (R+r)\omega_A$$

Punkten E har också en cirkelrörelse kring O:

$$v_E = R\Omega$$

Eftersom rullning förutsätts är hastigheten i D och E lika: $v_D = v_E$

Sambandsformeln för hastigheter $\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{DB}}$

kan projiceras på tangentialriktningen snett neråt:

$$v_B = -v_D + r\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{v_B + v_D}{r} \qquad \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{(R+r)\omega_A + R\Omega}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \omega_A + \frac{R}{r}(\omega_A + \Omega)$$

LP 2.23 Tyngdens hastighet uppåt måste vara lika stor som handens hastighetskomponent i den övre tråddelens riktning. Bestäm alltså hastigheten i C och projicera den på trådens riktning där. Med ett koordinatsystem med x-axeln åt höger och y-axeln uppåt fås

$\mathbf{v}_B = b\omega_{AB}\mathbf{e}_y$

Sambandsformeln för hastigheter $\boxed{\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{BC}}$ ger

$$\mathbf{v}_C = b\omega_{AB}\mathbf{e}_y + c\omega_{BC}\mathbf{e}_\theta \qquad \text{eller}$$

$$\mathbf{v}_C = b\omega_{AB}\mathbf{e}_y + c\omega_{BC}(-\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_y)$$

Projicera denna hastighet i trådens riktning som kallas $\mathbf{e}$.
Då gäller sambanden (Här krävs förstås en tydlig figur.)

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e} = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$$

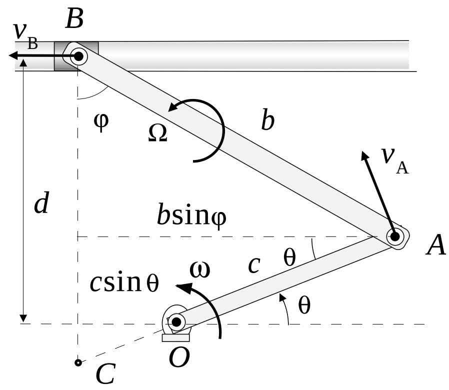
$$\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e} = b\omega_{AB}\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e} + c\omega_{BC}(-\sin\theta\,\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e} + \cos\theta\,\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}) \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e} = b\omega_{AB}\sin\varphi + c\omega_{BC}(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) \qquad \Rightarrow$$

Tyngdens fart uppåt är $\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{e} = b\omega_{AB}\sin\varphi + c\omega_{BC}\sin(\theta + \varphi)$

LP 2.24



Inlämningsuppgift på T just nu

Punkten B har en cirkelrörelse kring O:

Sambandsformeln för hastigheter

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{AB}}$$

b) kan projiceras på den horisontella och vertikala riktningen. Antag att vinkelhastigheten för AB är Ω moturs.

c) Drag konstruktionslinjer vinkelrätt mot hastighetsvektorerna i A och B genom deras fotpunkter. Punkten C är

d) Hastigheten v_B fås antingen ur (1) eller med hjälp av momentancentrum. B ser ju ut att ha en cirkelrörelse kring C.

LP 2.25 Lägg in ett koordinatsystem med x-axeln åt höger och y-axeln uppåt. Punkten A har en cirkelrörelse kring O:

$$\mathbf{v}_A = b\omega_{OA}\,\mathbf{e}_\theta \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_A = b\omega_{OA}\left(-\cos\theta\,\mathbf{e}_x - \sin\theta\,\mathbf{e}_y\right)$$

Sambandsformeln för hastigheter $\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{BA} \times \mathbf{r}_{AB}}$

kan projiceras på den horisontella och vertikala riktningen. Om hastigheten för C är horisontell måste det även gälla B, annars förändras längden av stången BC.

$$\rightarrow: \quad v_B = -b\omega_{OA}\cos\theta + 0$$

$$\uparrow: \quad 0 = -b\omega_{OA}\sin\theta - c\omega_{BA} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{BA} = -\frac{b\sin\theta}{c}\omega_{OA}$$

Sambandsformeln för hastigheter $\boxed{\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{BC}}$

$$\rightarrow: \quad v_C = -b\omega_{OA}\cos\theta + d\omega_{BC}$$

LP 2.26 Antag att bakhjulet har vinkelhastigheten ω och kedjekransen eller pedalarmen vinkelhastigheten Ω. Centrumpunkten på hjulet har hastigheten v. Den punkt på hjulet som råkar vara i kontakt med vägen har hastigheten noll och är momentancentrum. Detta kan utnyttjas för att bestämma vinkelhastigheten:

$$v = R\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

Varje länk på kedjan har samma hastighet i kedjans riktning. Om kuggkransen och kedjekransen har radien r_1 respektive r_2 gäller alltså att periferihastigheterna måste vara lika:

$$r_1\omega = r_2\Omega$$

Kuggkransen har ju samma vinkelhastighet som bakhjulet.
Men antalet kuggar är proportionellt mot omkretsen, dvs radien.

$$\Omega = \frac{r_1\omega}{r_2} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega = \frac{N_1\omega}{N_2} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega = \frac{N_1 v}{N_2 R}$$

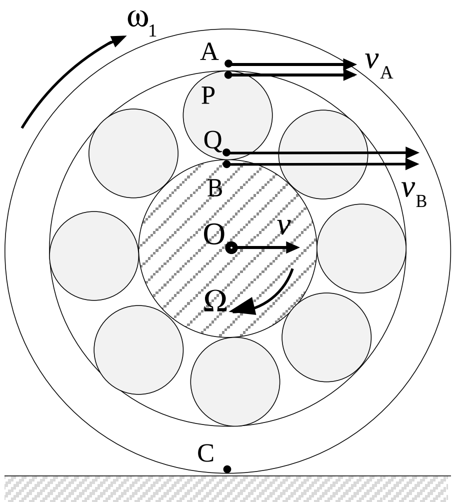
LP 2.27 I vissa fall kan det vara enklast att ställa upp koordinaten för punkten i fråga och tidsderivera för att få hastigheten.

$$y_B = b\sin\theta + \sqrt{c^2 - b^2\sin^2\theta} \qquad \Rightarrow$$

$$\dot{y}_B = -b\sin\theta\dot{\theta} + \frac{1}{2}\left(c^2 - b^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-b^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\dot{y}_B = -b\omega\left(1 + \frac{b\cos\theta}{\sqrt{c^2 - b^2\sin^2\theta}}\right)\sin\theta$$

LP 2.28



Punkten C är den yttre lagerringens momentancentrum. Antag att motsvarande vinkelhastighet är ω_1

$$\Rightarrow \qquad v = 5r\omega_1 \qquad (1)$$

Punkten A tillhör samma ring

$$\Rightarrow \qquad v_A = 9r\omega_1 \qquad (2)$$

Ekv (1) och (2) ger

$$v_A = \frac{9v}{5} \qquad (3)$$

Sambandsformeln för hastigheter för den inre lagerringen

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_{OB}} \qquad \Rightarrow \qquad \rightarrow: \quad v_B = v + 2r\Omega \qquad (4)$$

Sambandsformeln för hastigheter för kulan

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{PQ}} \qquad (5)$$

Men eftersom kulan rullar mot väggarna i P och Q är hastigheterna i A och P samt B och Q lika. Insättning i (5) ger

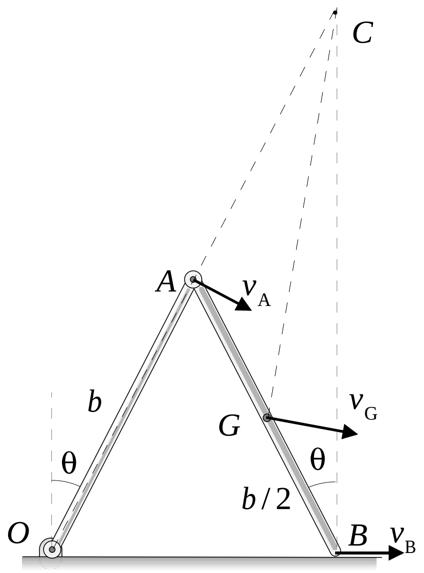
$$\rightarrow: \quad v_A = v_B - 2r\omega \qquad (6)$$

Insättning av (3) och (4) ger då

$$\frac{9v}{5} = v + 2r\Omega - 2r\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \Omega - \frac{2v}{5r}$$

LP 2.29 Inlämningsuppgift på T just nu

LP 2.30



Punkten A har en cirkelrörelse kring O:

$$v_A = b\dot{\theta} \tag{1}$$

Hastigheten i B är känd. Konstruera momentancentrum C för kroppen AB med räta linjer vinkelräta mot hastighetsvektorerna i A och B. Momentant ser alltså både A och B ut att ha en cirkelrörelse kring C. Vinkelhastigheten för AB är densamma som för OA eftersom de bildar lika stor vinkel med vertikalen.

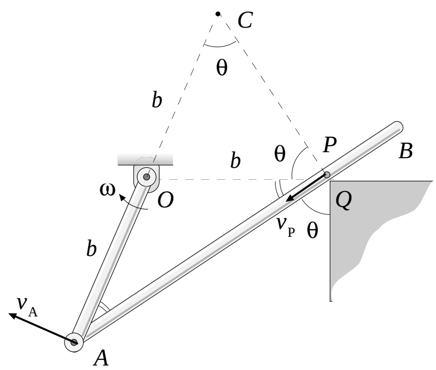
$$v_B = |\mathbf{r}_{BC}|\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{v_B}{|\mathbf{r}_{BC}|} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{v_B}{2b\cos\theta} \tag{2}$$

Mittpunkten G ser också ut att ha en cirkelrörelse kring C. Farten bestäms som $v_G = |\mathbf{r}_{CG}|\dot{\theta}$. Avståndet bestäms t ex med cosinussatsen för triangeln ABC

$$v_G = \sqrt{(2b\cos\theta)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{b}{2}\cdot 2b\cos\theta\cdot\cos\theta}\cdot\frac{v_B}{2b\cos\theta} \quad \Rightarrow$$

$$v_G = \sqrt{8\cos^2\theta + 1}\cdot\frac{v_B}{4\cos\theta}$$

LP 2.31



Punkten A har en cirkelrörelse kring O. Hastighetsriktningen är vinkelrät mot stången OA och

$$v_A = b\omega \tag{1}$$

Hastighetsriktningen i punkten P är känd. P kan ju inte ha någon hastighetskomposant in mot hörnet P.

Konstruera momentancentrum C för kroppen AB med räta linjer vinkelräta mot hastighetsvektorerna i A och P. Momentant ser alltså både A och P ut att ha en cirkelrörelse kring C. Geometrin ger att vinkeln OAB är lika med vinkeln OPA. Då är också vinklarna OPC och OCP lika och lika med θ. Triangeln OCP är därför likbent och vi får med momentancentrum C

$$v_A = 2b\omega_{AB} \quad \Rightarrow \quad b\omega = 2b\omega_{AB} \quad \Rightarrow \quad \omega_{AB} = \omega/2$$

$$v_P = 2b\cos\theta\,\omega_{AB} \quad \Rightarrow \quad v_P = b\cos\theta\,\omega$$