LEDNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 4

OBS! En fullständig lösning måste innehålla en figur!

LP 4.3

Tyngdkraften, normalkraften och friktionskraften verkar på lådan. Antag att normalkraftens angreppspunkt är på avståndet x från lådans nedre vänstra hörn.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ och momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ i komponentform ger

$$\rightarrow\ :\quad f = ma \qquad (1)$$

$$\uparrow\ :\quad N - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft G:\quad f \cdot \frac{h}{2} - N\left(\frac{b}{2} - x\right) = 0 \qquad (3)$$

Lådan har ju ingen vinkelacceleration. Sätt in (1) och (2) i (3)!

$$ma \cdot \frac{h}{2} - mg\left(\frac{b}{2} - x\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{2}\left(b - \frac{ha}{g}\right)$$

Gränsfall glidning $\qquad f = \mu N \qquad \Rightarrow \qquad a = \mu g$

Gränsfall balans $\qquad x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = \dfrac{b}{h} g$

LP 4.4

De yttre krafterna på skottkärran är tyngdkraften mg, kraften P samt normalkraften N vid hjulet. Problemtexten *kan* kanske ge intrycket av att kraften P är given. Tanken är att den ska bestämmas, så att skottkärran utan rotation får accelerationen a**.** Kraftekvationen:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \quad \Rightarrow \quad \rightarrow: \quad P\cos\theta = ma \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad P\sin\theta - mg + N = 0 \qquad (2)$$

Momentekvationen med avseende på masscentrum G:

$$\boxed{\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G} \quad \Rightarrow \quad \circlearrowleft G: \quad Nc - P\sin\theta \cdot b - P\cos\theta \cdot (d-h) = I_G \cdot 0$$

Högerledet i ekv (3) är noll eftersom skottkärrans vinkelacceleration är noll. Lös nu ut $P\cos\theta$ och $P\sin\theta$ ur ekv (1) och (2) och sätt in i ekv (3)!

$$\Rightarrow \quad Nc - (mg - N)\cdot b - (ma)\cdot d = 0 \quad \Rightarrow$$

$$N(b+c) = ma(d-h) + mgb \quad \Rightarrow$$

$$N = \frac{1}{b+c}\left[ma(d-h) + mgb\right]$$

Nu när normalkraften är känd kan vinkeln θ bestämmas ur ekv (1) och (2).

$$\frac{P\sin\theta}{P\cos\theta} = \frac{mg-N}{ma} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{g - \frac{1}{b+c}\left[a(d-h) + gb\right]}{a} \quad \Rightarrow$$

$$\tan\theta = \frac{gc - a(d-h)}{a(b+c)}$$

Alternativ lösning: Momentekvationen med avseende på en rörlig punkt A skrivs allmänt

$$\boxed{\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{AG} \times m\mathbf{a}_G}$$

I detta fall fås normalkraften direkt ur ekvationen

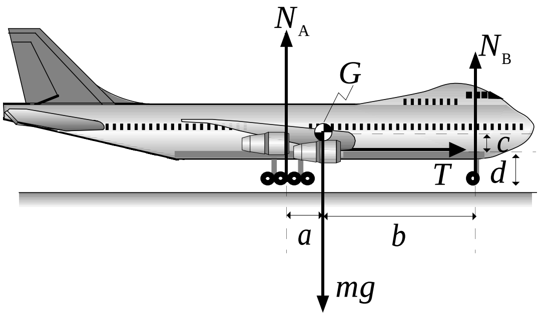
$$\circlearrowleft A: \quad N(b+c) - mgb = I_G \cdot 0 + (d-h)ma$$

Ställ nu upp momentekvationen med avseende på punkten C, som är skärningspunkt mellan verkningslinjerna för krafterna P och N.

$$\circlearrowleft C: \quad mgc = I_G \cdot 0 + \left[(d-h) + (b+c)\tan\theta\right]ma$$

Ekvationen ger direkt vinkeln θ.

LP 4.8



Accelerationen kan bestämmas med hjälp av kraftekvationen, om alla krafter i accelerationens riktning är kända.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \tag{1}$$

Normalkrafterna kan sedan bestämmas med momentekvationen

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{2}$$

I komponentform fås ekvationerna

$$\rightarrow: \quad T = ma_G \tag{3}$$

$$\uparrow: \quad N_A + N_B - mg = 0 \tag{4}$$

$$\circlearrowleft G: \quad N_B b - N_A a + Tc = 0 \tag{5}$$

Ekv (3) ger accelerationen

$$\underline{\underline{a_G = \frac{T}{m}}} \tag{6}$$

Eliminering av N_A ur ekv (4) och (5) ger

$$N_B b - (mg - N_B)a + Tc = 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad N_B(a+b) - mga + Tc = 0 \tag{8}$$

Resultatet är

$$\underline{\underline{N_B = \frac{mga - Tc}{a+b}}} \qquad \underline{\underline{N_A = \frac{mgb + Tc}{a+b}}} \tag{9}$$

Kommentar:

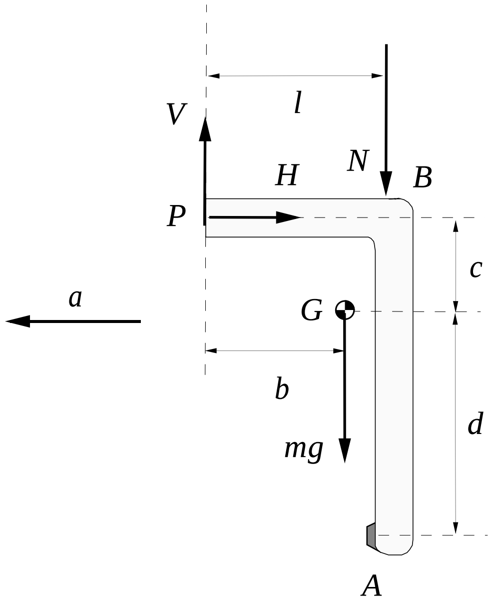
Det går också bra att bestämma normalkrafterna i tur och ordning med momentekvationen för rörlig momentpunkt:

$$\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{AG} \times m\mathbf{a}_G$$

$$\circlearrowleft A: \quad N_B(b+a) - mga - Td = 0 - (d+c)ma_G$$

vilket ger samma resultat som ovan.

LP 4.10



Vi frilägger armen PBA och inför reaktionskraftkomponenterna H och V vid den glatta leden P.

Reaktionskrafterna vid P kan elimineras redan från början genom att utnyttja momentekvationen med avseende på den rörliga punkten P:

$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_G \qquad (1)$$

Om vi betraktar gränsfallet då kontakten vid A upphör, blir z-komponenten av denna ekvation

$$P: \quad -Nl - mgb = 0 - cma \qquad (2)$$

$$\underline{\underline{a = \frac{Nl}{mc} + \frac{gb}{c}}} \qquad (3)$$

Alternativ lösning ges av momentekvationen

$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_{P_{\mathrm{rel}}} + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_P \qquad (4)$$

som ger en likadan komponentekvation som ekv (2) eftersom P och G har lika stor acceleration.

Alternativt löses problemet med kombinationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \qquad (5)$$

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad (6)$$

I komponentform fås ekvationerna

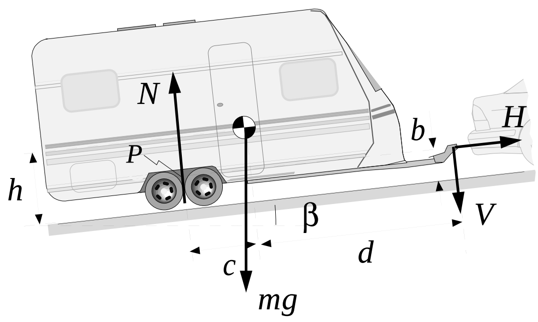
$$\rightarrow: \quad H = -ma \qquad (7)$$

$$\uparrow: \quad V - N - mg = 0 \qquad (8)$$

$$G: \quad -Vb - Hc - N(l-b) = 0 \qquad (9)$$

Eliminering av H och V ur ekv (7-9) ger samma resultat som ovan.

LP 4.12



Frilägg husvagnen och inför krafterna vid kontaktpunkterna enligt figuren. Eftersom en kraft söks är det naturligt att ställa upp kraftekvationen och momentekvationen för husvagnen.

Kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

ger följande komponentekvationer i vägens riktning och vinkelrät emot:

$$\rightarrow: \quad H - mg\sin\beta = m\ddot{x}_G \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad -V - mg\cos\beta + N = 0 \qquad (2)$$

Momentekvationen med avseende på masscentrum $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ ger

$$G: \quad Vd - H(h-b) + Nc = 0 \qquad (3)$$

Accelerationen är given: $\ddot{x}_G = a$. Kraften H ges alltså direkt av ekv (1)

$$\underline{\underline{H = m(a + g\sin\beta)}} \qquad (4)$$

Eliminera normalkraften N genom att lösa ut N ur (2) och sätta in i (3). Med ekvation (4) kan ekv (3) då skrivas

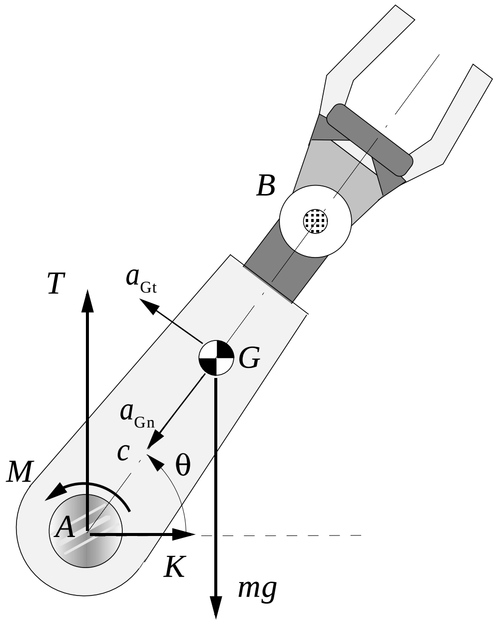
$$Vd - (h-b)(ma + mg\sin\beta) + (V + mg\cos\beta)c = 0 \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V = \frac{m}{d+c}\left[(h-b)(a + g\sin\beta) - gc\cos\beta\right]}} \qquad (6)$$

Anm.: Kraften V fås enklare med momentekvationen med avseende på punkten P, som är skärningspunkten mellan verkningslinjerna för krafterna H och N: $\quad \mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_G$

$$P: \quad V(c+d) + mg\cos\beta\, c - mg\sin\beta(h-b) = 0 + (h-b)ma$$

LP4.18



Armen AB roterar kring en fix axel vid A. Masscentrum G rör sig då i en cirkelbana med radien c så att accelerationen i det naturliga systemet kan skrivas

$$\mathbf{a}_G = c\ddot{\theta}\mathbf{e}_t + c\dot{\theta}^2\mathbf{e}_n \tag{1}$$

Kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \tag{2}$$

i komponentform blir då

$$\rightarrow: \quad K = m\left(-c\dot{\theta}^2\cos\theta - c\ddot{\theta}\sin\theta\right)$$

$$\uparrow: \quad T - mg = m\left(-c\dot{\theta}^2\sin\theta + c\ddot{\theta}\cos\theta\right) \tag{3}$$

De sökta kraftkomponenterna är alltså

$$\begin{cases} K = m\left(-c\dot{\theta}^2\cos\theta - c\ddot{\theta}\sin\theta\right) \\ T = mg + m\left(-c\dot{\theta}^2\sin\theta + c\ddot{\theta}\cos\theta\right) \end{cases} \tag{4}$$

Momentekvationen kan skrivas

$$\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{AG} \times m\mathbf{a}_G \tag{5}$$

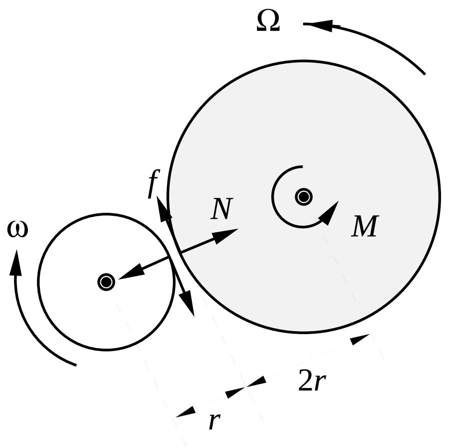
och z-komponenten blir

$$M - mgc\cos\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I\dot{\theta}\right) + mc^2\ddot{\theta} \tag{6}$$

Det sökta kraftmomentet är då

$$M = mgc\cos\theta + \left(I + mc^2\right)\ddot{\theta} \tag{7}$$

LP 4.21



Frilägg hjulen och inför kontaktkraften mellan dem. Skriv upp momentekvationen för vardera hjulet med avseende på respektive rotationsaxel.
Tröghetsmomenten är mk^2 respektive $16mk^2$ för det lilla och stora hjulet.

Momentekvationen med avseende på en fix axel: $M_z = \dot{H}_z$ för det

stora hjulet: $M - 2rf = 16mk^2\dot{\Omega}$ (1)

lilla hjulet: $rf = mk^2\dot{\omega}$ (2)

Rullningsvillkoret är $2r\Omega = r\omega$ (3)

$\Rightarrow \quad \omega = 2\Omega$ (4)

Ekv (2) och (4) ger $rf = 2mk^2\dot{\Omega}$ (5)

Insättning i (1) ger $M - 2rf = 8rf$ (6)

$$M = 10rf \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f = \frac{M}{10r}}} \tag{7}$$

LP 4.28

LP 4.29

De yttre krafterna på rullen är trådkraften S, tyngdkraften mg samt en reaktionskraft vid axeln. Dessutom verkar friktionen vid axeln som motsvaras av kraftparsmomentet M_1. På den hängande kroppen verkar trådkraften S och tyngdkraften $m_1 g$.

Momentekvationen för trådrullen med avseende på centrum O, som är en fix punkt

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O} \quad \Rightarrow \quad \circlearrowleft O \; : \quad Sr - M_1 = I_G \cdot \ddot{\theta} \qquad (1)$$

Kraftekvationen för den hängande kroppen

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \quad \Rightarrow \quad \downarrow \; : \quad m_1 g - S = m_1 \ddot{x} \qquad (2)$$

De obekanta är S, $\ddot{x}$ och $\ddot{\theta}$. Vi behöver alltså en till ekvation. Den ges av kinematiken och motsvaras av rullningsvillkoret. Den hängande kroppens hastighet måste vara densamma som hastigheten i den punkt på rullen där tråden löper ut.

$$\dot{x} = r\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta} \qquad (3)$$

Dividera ekv (1) med r och addera sedan ekv (1) och (2)! Inför också det givna tröghetsmomentet $I_G = md^2$!

$$\Rightarrow \quad m_1 g - \frac{M_1}{r} = \frac{md^2}{r}\ddot{\theta} + m_1 \ddot{x} \qquad (4)$$

Om rullningsvillkoret insättes fås

$$m_1 g - \frac{M_1}{r} = \left(\frac{md^2}{r^2} + m_1\right)\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{m_1 g r^2 - M_1 r}{m_1 r^2 + md^2}$$

Denna acceleration är konstant. Vi kan bestämma hastighet som funktion av fallsträcka på samma sätt som vi gör för fritt fall.

Det är naturligtvis också möjligt att skriva upp momentekvationen med avseende på den fixa axeln för hela systemet. Då blir trådkraften en inre kraft och den hängande kroppen bidrar till rörelsemängdsmomentet:

$$\circlearrowleft O \; : \quad m_1 g r - M_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_G \dot{\theta} + r m_1 \dot{x}\right)$$

Ekvationen överensstämmer med ekv (4)!

LP 4.41

Kontaktpunkten är momentancentrum så att om punkten O har farten v, så har kroppen vinkelhastigheten $\omega = v/R$ och stången hastigheten

$$(R+c)\omega = (R+c)v/R$$

Rörelsemängdsmomentet är i detta ögonblick

$$\mathbf{H}_O^{\text{tot}} = \mathbf{H}_O^{\text{cyl}} + \mathbf{H}_O^{\text{stång}}$$

O är cylinderns masscentrum, som kan kallas G:

$$\mathbf{H}_O^{\text{cyl}} = \mathbf{H}_G^{\text{cyl}} = \mathbf{H}_{G_{\text{rel}}}^{\text{cyl}}$$

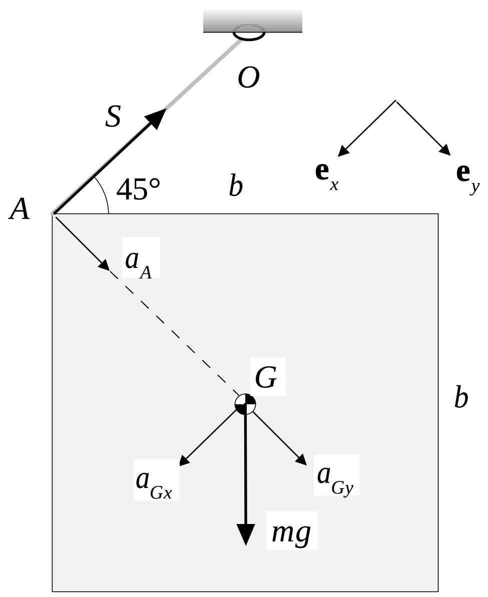
Det är alltså bara cylinderns rotation som bidrar till rörelsemängdsmomentet.

$$\left(\mathbf{H}_O^{\text{cyl}}\right)_z = I_O^{\text{cyl}}\omega = \frac{mR^2}{2}\cdot\frac{v}{R} = \frac{mRv}{2}$$

$$\left(\mathbf{H}_O^{\text{stång}}\right)_z = c\cdot\frac{m}{2}\cdot(R+c)\cdot\frac{v}{R}$$

$$\left(\mathbf{H}_O^{\text{tot}}\right)_z = c\cdot\frac{m}{2}\cdot(R+c)\cdot\frac{v}{R} + \frac{1}{2}mRv = \frac{mRv}{2}\left[\frac{c}{R} + \frac{c^2}{R^2} + 1\right]$$

LP 4.42



Kroppen påverkas av trådkraften S och tyngdkraften mg. I det första ögonblicket efter trådbrottet har kroppen acceleration men ingen hastighet. Hörnet A startar en cirkelrörelse och har en acceleration i y-riktningen. Punkten G har en acceleration som ges av sambandsformeln, alltså samma acceleration som punkten A i y-riktningen och dessutom en acceleration i x-riktningen för att skivan börjar vrida sig.

Skivans vinkelacceleration bestäms av momentekvationen. Trådkraften kan sedan bestämmas med kraftekvationen.

Om skivans vinkelacceleration antas vara α, så är $a_{Gx} = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\alpha$

Tröghetsmomentet med avseende på A fås med Steiners sats:

$$I_A = I_G + m\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{mb^2}{6} + m\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2mb^2}{3} \tag{1}$$

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ $\quad$ $\mathbf{e}_x$: $$-S + \frac{mg}{\sqrt{2}} = ma_{Gx} \tag{2}$$

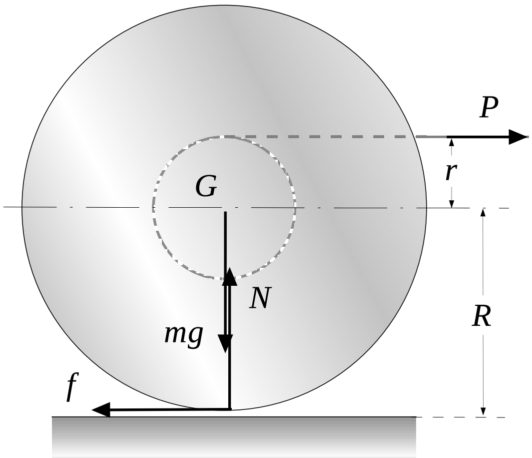
$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ $\quad$ A: $$mg \cdot \frac{b}{2} = \frac{2mb^2}{3} \cdot \frac{a_{Gx}}{b/\sqrt{2}} \tag{3}$$

Ekv (3) ger : $$a_{Gx} = \frac{3g}{4\sqrt{2}} \tag{4}$$

Ekv (2) ger : $$S = \frac{mg}{\sqrt{2}} - m\frac{3g}{4\sqrt{2}}$$

Resultatet är $$\underline{\underline{S = \frac{mg}{4\sqrt{2}}}}$$

LP 4.44



Frilägg trådrullen! Verkande krafter är dragkraften P, tyngdkraften mg och kontaktkraftens komponenter f och N. Men åt vilket håll är friktionskraften riktad? Antag först att planet är glatt. Om verkningslinjen för P då går nära masscentrum skulle trådrullen få en translation. Med friktion skulle då friktionskraften vara riktad åt vänster. Om verkningslinjen för P i stället går högt upp skulle trådrullen på ett glatt plan få en rotationsrörelse och vinkelhastigheten skulle kunna bli för stor jämfört med rullning utan glidning. Trådrullens kontaktpunkt skulle få en hastighet åt vänster. Friktionskraften skulle då vara riktad åt höger.

Vi antar rullning utan glidning och bestämmer f med dynamikens ekvationer Antag en friktionskraft åt vänster. Ställ upp komponenterna av kraftekvationen och momentekvationen:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \qquad \rightarrow : \quad P - f = m\ddot{x}_G \tag{1}$$

$$\uparrow : \quad N - mg = 0 \tag{2}$$

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad \overset{\curvearrowright}{A} : \quad r \cdot P + R \cdot f = I_G \ddot{\theta} \tag{3}$$

Rullningsvillkor: $$\ddot{x}_G = R\ddot{\theta} \tag{4}$$

Tröghetsmomentet är $I_G = md^2$. Dragkraften P är given.

Sätt in ekv (4) i ekv (1). Multiplicera ekv (1) med $-d^2/R$ och addera sedan ekvationerna (1) och (3). Man får:

$$P\left(r - \frac{d^2}{R}\right) + f\left(R + \frac{d^2}{R}\right) = 0$$

Resultatet är

$$f = \frac{d^2 - Rr}{R^2 + d^2} P$$

Friktionskraften f kan alltså bli negativ och då är den riktad åt höger.

LP 4.47

De yttre krafterna på hjulet är tyngdkraften mg, friktionskraften f, normalkraften N samt en kraft vid axeln från stången. Vi antar att denna kraft är horisontell. Då är normalkraften lika med tyngdkraften och friktionskraften är vid glidning

$$f = \mu N \qquad \Rightarrow \qquad f = \mu mg \tag{1}$$

Momentekvationen för hjulet med avseende på masscentrum G,

$$\boxed{\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G} \quad \Rightarrow \quad \circlearrowleft G \ : \quad f \cdot r = I \cdot \ddot{\theta} \tag{2}$$

Från början är vinkelhastigheten noll. Hjulet slirar men har en vinkelacceleration ända tills det rullar utan att glida. Vinkelhastigheten ökar under denna tid från noll till det värde som ges av rullningsvillkoret:

$$v = r\dot{\theta}_1 \tag{3}$$

Tidsintegrering av ekvation (2) under det tidsintervall i vilket hjulet slirar ger

$$\mu mgr \cdot t_1 = I \cdot \dot{\theta}_1 - 0 \tag{4}$$

Men bilen går med konstant hastighet under denna tid. Förflyttningen för den och för hjulet är

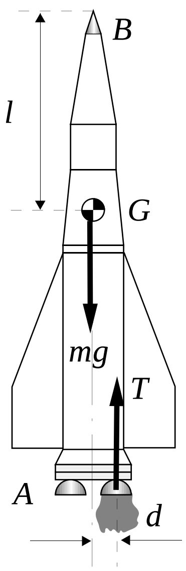
$$d = vt_1 \tag{5}$$

Sätt nu in (3) och (5) i (4)!

$$\mu mgr \cdot \frac{d}{v} = I \cdot \frac{v}{r}$$

$$\Rightarrow \qquad \mu = \frac{Iv^2}{mgdr^2}$$

LP 4.50



Vi bestämmer först masscentrums acceleration med kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

och vinkelaccelerationen med momentekvationen med avseende på masscentrum

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$$

Att bestämma accelerationen hos en annan punkt B blir sedan ett kinematiskt problem.

I komponentform fås ekvationerna

$$\rightarrow: \quad 0 = m\ddot{x}_G \tag{1}$$

$$\uparrow: \quad T - mg = m\ddot{y}_G \tag{2}$$

$$\circlearrowleft G: \quad Td = I_G\ddot{\theta} \tag{3}$$

Accelerationen hos punkten B fås med sambandsformeln

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{GB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{GB})$$

I komponentform fås

$$\rightarrow: \quad a_{Bx} = \ddot{x}_G - l\ddot{\theta} + 0 \tag{4}$$

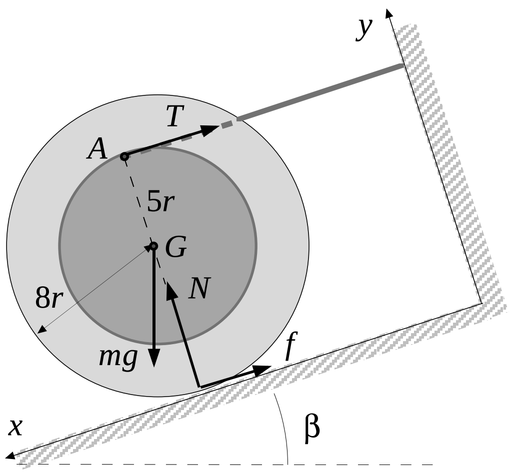
$$\uparrow: \quad a_{By} = \ddot{y}_G + 0 - l\dot{\theta}^2 \tag{5}$$

I första ögonblicket är vinkelhastigheten $\dot{\theta} = 0$. Vinkelaccelerationen $\ddot{\theta}$ och masscentrums accelerationskomponenter $\ddot{x}_G$ och $\ddot{y}_G$ ges av ekvationerna (1) - (3). Insättning i (4) och (5) ger accelerationens komponenter

$$a_{Bx} = -\frac{Tld}{I_G}$$

$$a_{By} = \frac{T}{m} - g$$

Lösning 4.59



De yttre krafterna är tyngdkraft, kontaktkraft och trådkraft. Kontaktkraften delas upp i normalkraft och friktionskraft. Vi har alltså tre obekanta krafter och dessutom ska vi bestämma accelerationen. Momentekvationen

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$$

tillsammans med kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

ger i detta plana fall tre ekvationer:

$$5r\,T - 8r\,f = I_C\,\ddot{\theta} \qquad (1)$$

$$mg\sin\beta - f - T = m\ddot{x}_G \qquad (2)$$

$$N - mg\cos\beta = 0 \qquad (3)$$

Kinematik: A är momentancentrum eftersom trådens ände saknar hastighet. Trådrullen ser i varje ögonblick ut att rotera kring A.

$$\dot{x}_G = 5r\,\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x}_G = 5r\,\ddot{\theta} \qquad (4)$$

Glidning, dvs fullt utbildad friktion innebär att

$$f = \mu N \qquad (5)$$

Dividera ekv (1) med $5r$ och addera ekv (2). På detta sätt elimineras T.

$$mg\sin\beta - \frac{13}{5}f = \frac{I_C}{5r}\ddot{\theta} + m\ddot{x}_G \qquad (6)$$

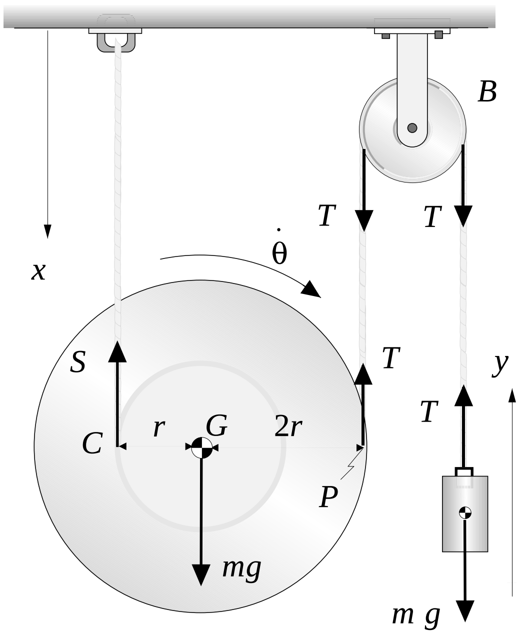
Insättning av ekv (3), (4) och (5) samt tröghetsmomentet för en cylinder ger

$$mg\sin\beta - \frac{13}{5}\mu mg\cos\beta = \frac{m(8r)^2}{2\cdot 5r}\cdot\frac{\ddot{x}_G}{5r} + m\ddot{x}_G \qquad (7)$$

$$g\sin\beta - \frac{13}{5}\mu g\cos\beta = \frac{114}{50}\ddot{x}_G \qquad (8)$$

$$\underline{\underline{\ddot{x}_G = \frac{25g}{57}\left(\sin\beta - \frac{13}{5}\mu\cos\beta\right)}}$$

LP 4.63



Vinkelaccelerationen söks. Den kan bestämmas med hjälp av kraft- och momentekvationerna för systemets delar. Frilägg först kropparna och inför krafterna i figuren! Det är viktigt att inse att trådkraften T inte är lika med tyngden $m_1 g$ när systemet har acceleration!
Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ för rulle och tyngd ger ekvationerna

$$\downarrow: \quad mg - S - T = m\ddot{x}_G \quad (1)$$

$$\uparrow: \quad T - m_1 g = m_1 \ddot{y} \quad (2)$$

Momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ för rullen med avseende på mass-centrum ger

$$G: \quad Sr - T \cdot 2r = I\ddot{\theta} \quad (3)$$

Ekvationerna innehåller fem obekanta: S, T, $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}$ och $\ddot{y}$. Vi måste nu utreda kinematiken och bestämma sambandet mellan accelerationerna. Eftersom den vänstra trådens vertikala del har hastigheten noll måste punkten C vara momentancentrum för rullen. Detta ger

$$\dot{x}_G = r\dot{\theta}; \quad \dot{x}_P = 3r\dot{\theta} \quad (4)$$

Tyngden måste ha samma fart som punkten P på rullen

$$\dot{y} = 3r\dot{\theta} \quad (5)$$

Tidsderivera nu sambanden (4) och (5) och sätt in i ekvationerna (1)-(3). Dividera ekvation (3) med r för att få ekvationer med lika dimension!

$$mg - S - T = mr\ddot{\theta} \quad (1')$$

$$T - m_1 g = 3m_1 r\ddot{\theta} \quad (2')$$

$$S - 2T = \frac{I}{r}\ddot{\theta} \quad (3')$$

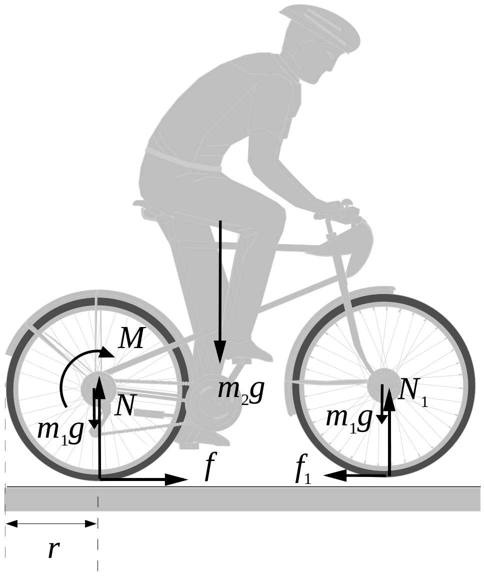
Eliminera trådkrafterna genom att multiplicera ekv (2') med 3 och addera alla tre ekvationerna!. Resultatet blir

$$mg - 3m_1 g = \left(mr + \frac{I}{r} + 9m_1 r\right)\ddot{\theta}$$

eller

$$\ddot{\theta} = \frac{(m - 3m_1)gr}{(m + 9m_1)r^2 + I}$$

LP 4.64



De yttre krafterna på hela systemet är tyngdkrafter och kontaktkrafter. Om bakhjulet friläggs så blir det givna kraftmomentet M ett yttre kraftmoment. Reaktionskraften på bakhjulets centrum från resten av cykeln blir också en yttre kraft men kan undvikas i räkningarna genom att utnyttja momentekvationen med avseende på just hjulets centrum.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ för hela systemet ger i rörelseriktningen

Hela systemet: $\rightarrow: \quad f - f_1 = (m_2 + 2m_1)\ddot{x}_G \qquad (1)$

Momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ med avseende en axel genom varje hjuls masscentrum ger med positiv riktning medurs

Framhjul: $\curvearrowright: \quad r f_1 = m_1 r^2 \ddot{\theta} \qquad (2)$

Bakhjul: $\curvearrowright: \quad M - rf = m_1 r^2 \ddot{\theta} \qquad (3)$

Rullningsvillkoret är $\ddot{x}_G = r\ddot{\theta} \qquad (4)$

Kraften f_1 kan elimineras genom att sätta in ekv (2) i (1). Detta ger ett uttryck på kraften f. Om rullningsvillkoret också utnyttjas för att eliminera $\ddot{\theta}$, så ger en insättning i ekv (3)

$$M - r\left[(m_2 + 2m_1)\ddot{x}_G + m_1\ddot{x}_G\right] = m_1 r^2 \frac{\ddot{x}_G}{r} \qquad (5)$$

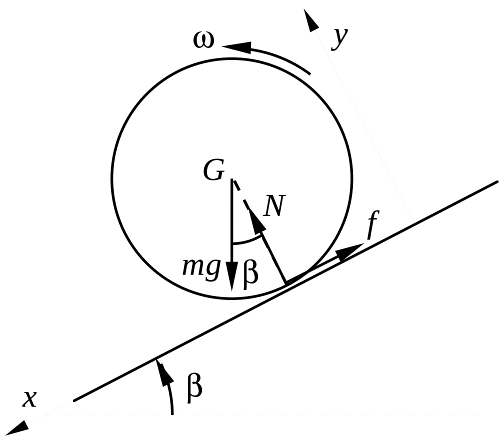
$$M = r(m_2 + 4m_1)\ddot{x}_G \qquad (6)$$

$$\ddot{x}_G = \frac{M}{r(m_2 + 4m_1)} \qquad (7)$$

Denna acceleration är konstant vilket efter tidsintegration ger resultatet

$$\underline{\underline{\dot{x}_G = \frac{M}{r(m_2 + 4m_1)}\, t}}$$

LP 4.66



Positiv riktning för ω och $\dot{\omega}$ ($\dot{\theta}$ och $\ddot{\theta}$) är markerad i figur. Kraftekvationen och momentekvationen med avseende på masscentrum G ger

$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \\ \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = m\ddot{x}_G \\ F_y = m\ddot{y}_G \\ M_G = I_G\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mg\sin\beta - f = m\ddot{x}_G & (1) \\ N - mg\cos\beta = m\ddot{y}_G & (2) \\ f\,r = I\ddot{\theta} & (3) \end{cases}$$

a) Antag först att μ är tillräckligt stort för att hjulet ska rulla utan att glida. Då ger kinematiken sambanden

$$\begin{cases} \ddot{y}_G = 0 & (4) \\ \ddot{x}_G = r\ddot{\theta} & (5) \end{cases}$$

Ekv (4) och (2) ger normalkraften $\quad N = mg\cos\beta \quad (6)$

Ekv (3) och (5) i (1) ger

$$mg\sin\beta - \frac{I}{r^2}\ddot{x}_G = m\ddot{x}_G \qquad (7)$$

$$\underline{\underline{\ddot{x}_G = \frac{mr^2}{I + mr^2} \quad g\sin\beta}} \qquad (8)$$

b) Men är antagandet rullning utan glidning riktigt? Ekv (3) ger friktionskraften

$$f = \frac{I}{r^2}\ddot{x}_G \quad \Rightarrow \quad f = \frac{I}{I + mr^2} mg\sin\beta \qquad (9)$$

och friktionsvillkoret $\quad \dfrac{f}{N} < \mu$

betyder att $\quad \mu > \dfrac{I}{I + mr^2}\tan\beta \quad (10)$

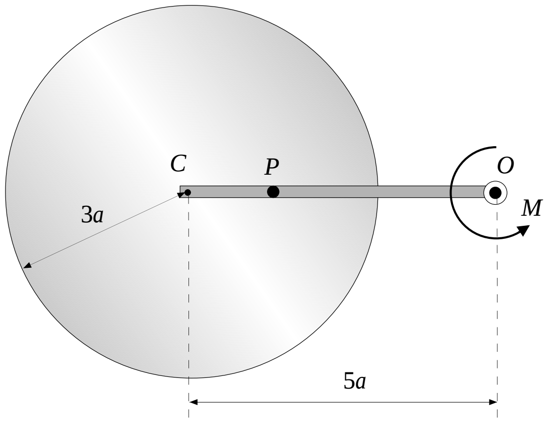
Om friktionstalet är mindre än detta värde inträffar glidning. Då är i stället friktionskraften

$$f = \mu N \quad \Rightarrow \quad f = \mu mg\cos\beta \qquad (11)$$

och ekvation (1) ger

accelerationen $\quad \underline{\underline{\ddot{x}_G = g(\sin\beta - \mu\cos\beta)}}$

Lösning 4.70



a) Med låsskruven nerskruvad mot cylindern roterar hela systemet cylinder plus stativ som en enda stel kropp kring axeln O (z -axeln).

Momentekvationens z-komponent

$$M_z = \dot{H}_z \tag{1}$$

ger

$$M = \frac{d}{dt}\left(I_O\dot{\theta}\right) \tag{2}$$

där I_O ges av Steiners sats för tröghetsmoment:

$$I_O = I_C + m(5a)^2 = \frac{m(3a)^2}{2} + 25ma^2 \quad = \frac{59}{2}ma^2 \tag{3}$$

Insättning i momentekvationen (2) ger

$$M = \frac{59}{2}ma^2\ddot{\theta} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\ddot{\theta} = \frac{2M}{59ma^2}}} \tag{5}$$

b) Om låsskruven lossas har cylindern ingen vinkelacceleration eftersom inget kraftmoment verkar kring axeln O. Rörelsemängdsmomentet

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_C + \mathbf{r}_{OC} \times m\mathbf{v}_C \tag{6}$$

har en z-komponent som kan skrivas

$$H_O = \text{konst} + (5a)m(5a)\dot{\theta} \tag{7}$$

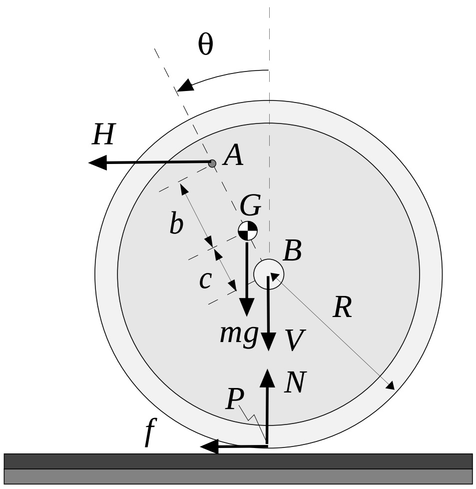
Konstanten kommer av att cylindern kan rotera kring sin egen axel med en konstant vinkelhastighet.

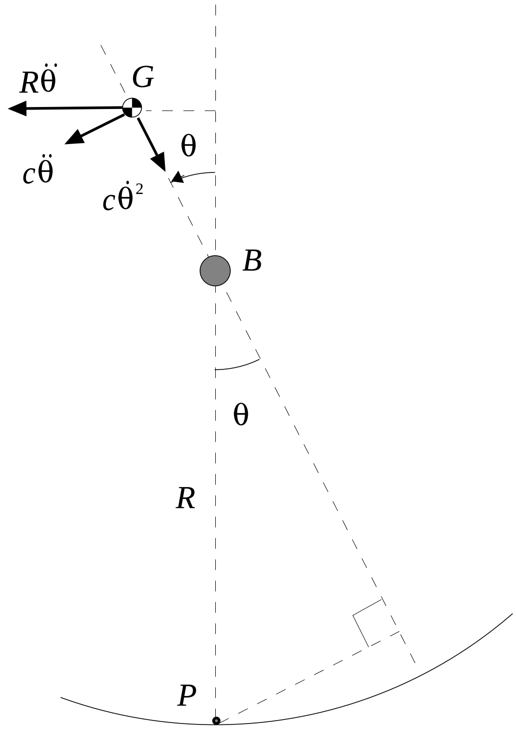
Momentekvationen

$$M = \frac{d}{dt}\left(\text{konst} + 25ma^2\dot{\theta}\right) \tag{8}$$

ger då resultatet $\qquad \underline{\underline{\ddot{\theta} = \frac{M}{25ma^2}}}$

LP 4.74





Vi frilägger hjulet och inför kontaktkraftskomponenterna N och f i kontaktpunkten P. Dessa krafter kan elimineras direkt genom att välja momentekvationen med avseende på kontaktpunkten P:

$$\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_G \tag{1}$$

Innan vi skriver z-komponenten av denna ekvation utreder vi kinematiken, speciellt masscentrums acceleration $\mathbf{a}_G$.

Enligt sambandsformeln består den av tre komposanter och kan skrivas

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BG} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BG}) \tag{2}$$

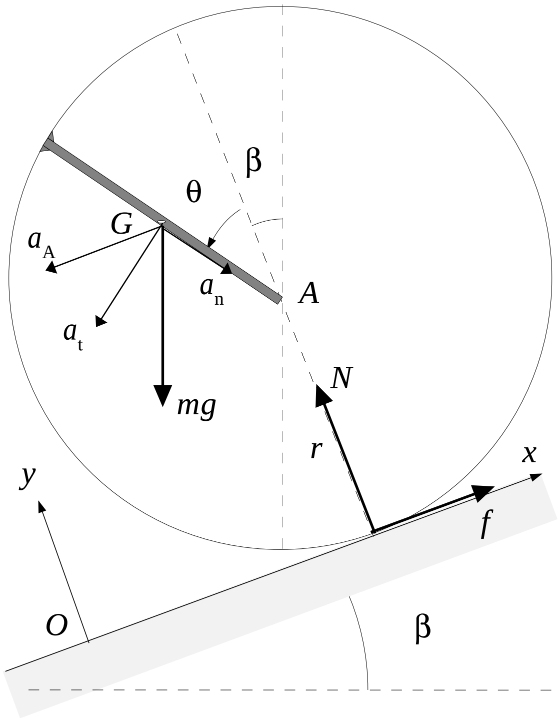
Dessa tre komposanter är utritade i den högra figuren och ger var och en ett bidrag till kryssprodukten i (1). z-komponenten av ekvationen (1) blir då

$$H[R + (b+c)\cos\theta] + mgc\sin\theta = I\ddot{\theta} + m[(c + R\cos\theta)c\ddot{\theta} + (R + c\cos\theta)R\ddot{\theta} - R\sin\theta\, c\dot{\theta}^2] \tag{3}$$

Vi löser ut vinkelaccelerationen och får resultatet

$$\ddot{\theta} = \frac{H[R + (b+c)\cos\theta] + mgc\sin\theta + mRc\sin\theta\,\omega^2}{I + m(R^2 + c^2 + 2Rc\cos\theta)}$$

LP 4.75



De enda yttre krafter som verkar är tyngdkraften och kontaktkraften. Den senare kan delas upp i friktionskraft och normalkraft. Kraftekvationen eller Eulers första lag

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \tag{1}$$

bör då ge friktionskraften och normalkraften, om masscentrums acceleration $\mathbf{a}_G$ är känd. Denna består enligt sambandsformeln för accelerationer av accelerationen för centrumpunkten A plus accelerationskomposanterna som associeras med cirkelrörelsen kring A:

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AG} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AG}\right) \tag{2}$$

De tre termerna i högerledet är markerade i figuren och kallas a_A, a_t och a_n (tangential- respektive normalkomponenten).

Inför ett fixt koordinatsystem $Oxyz$ enligt figuren. Inför nu beteckningen $c = r/2$ för avståndet mellan A och G. Kroppens vinkelhastighet är $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_z$.

Om cirkelringen rullar på det lutande planet är kontaktpunkten i cirkelringen momentancentrum. Hastigheten för centrumpunkten A är då

$$\mathbf{v}_A = -r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_x \tag{3}$$

Accelerationen blir

$$\mathbf{a}_A = -r\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_x \tag{4}$$

Masscentrums acceleration (2) kan då skrivas

$$\mathbf{a}_G = -r\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_x + c\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_t + c\dot{\theta}^2\mathbf{e}_n \tag{5}$$

Kraftekvationens x- och y-komponenter blir

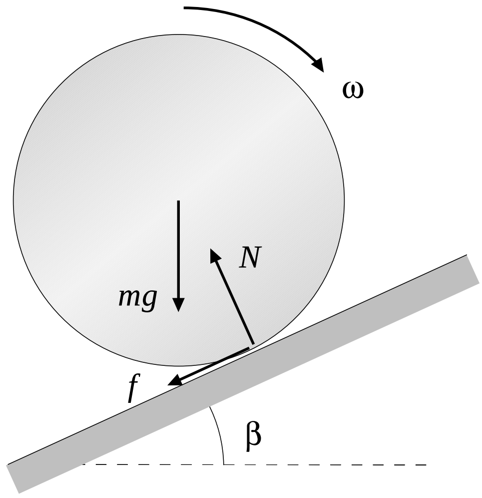
$$\begin{aligned} f - mg\sin\beta &= m\left(-r\ddot{\theta} - c\ddot{\theta}\cos\theta + c\dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ N - mg\cos\beta &= m\left(-c\ddot{\theta}\sin\theta - c\dot{\theta}^2\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{6}$$

och resultatet följer omedelbart

$$f = mg\sin\beta + mr\left[-\left(1 + \frac{1}{2}\cos\theta\right)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}^2\right]$$

$$N = mg\cos\beta - m\frac{r}{2}\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)$$

LP4.78



De enda krafter som påverkar cylindern är tyngdkraft och kontaktkraft. Om normalkraften betecknas N så kan friktionskraften under den första delen av rörelsen, då cylindern glider, skrivas μN. Lagen om masscentrums rörelse $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ och momentekvationen med avseende på masscentrum $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ ger för den första delen av rörelsen:

$$\mu N - mg\sin\beta = m\ddot{x} \qquad (1)$$

$$N - mg\cos\beta = 0 \qquad (2)$$

$$-\mu N r = \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} \qquad (3)$$

Accelerationen och vinkelaccelerationen är alltså konstanta:

$$\ddot{x} = (\mu\cos\beta - \sin\beta)g \qquad (4)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\mu g}{r}\cos\beta \qquad (5)$$

Vid en viss tidpunkt $t = t_1$ inträffar rullning utan glidning. Då kan rullningsvillkoret $\dot{x} = r\dot{\theta}$ skrivas

$$(\mu\cos\beta - \sin\beta)g\,t_1 = -2\mu g\,t_1\cos\beta + r\omega \qquad (6)$$

$$t_1 = \frac{r\omega}{(3\mu\cos\beta - \sin\beta)g} \qquad (7)$$

och motsvarande sträcka längs planet är (eftersom accelerationen är konstant)

$$d_1 = \frac{1}{2}\ddot{x}\,t_1^{\,2} = \frac{r^2\omega^2(\mu\cos\beta - \sin\beta)}{2g(3\mu\cos\beta - \sin\beta)^2} \qquad (8)$$

Efter denna tidpunkt gäller rullning utan glidning och då bevaras den mekaniska energin: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, där $T_2 = 0$ i vändläget. Insättning ger

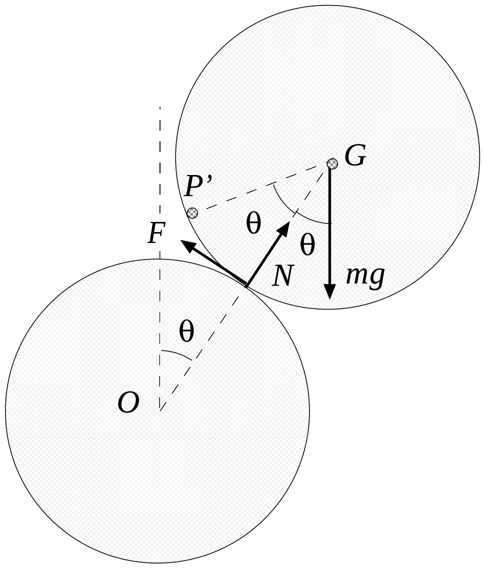
$$\frac{1}{2}\frac{3mr^2}{2}\dot{\theta}_1^{\,2} = mgd_2\sin\beta \qquad (9)$$

$$d_2 = \frac{3r^2\omega^2(\mu\cos\beta - \sin\beta)^2}{4g\sin\beta(3\mu\cos\beta - \sin\beta)^2} \qquad (10)$$

Total tillryggalagd sträcka längs planet blir då

$$d_1 + d_2 = \frac{r^2\omega^2(\mu\cos\beta - \sin\beta)}{4g\sin\beta\,(3\mu\cos\beta - \sin\beta)}$$

LP 4.88



Resultatet bör ges av friktionsvillkoret, varför uppgiften består i att bestämma friktions- och normalkraft. Rullnings-villkoret ger att klotets absoluta vinkelhastighet är $2\dot{\theta}$. Detta inses antingen direkt ur figuren, eftersom punkterna P och P' sammanföll vid tiden $t=0$ eller också tecknas hastig-heten för klotets centrum G på två sätt: cirkelrörelse kring O respektive med kontaktpunkten som momentan-centrum. $2r\dot{\theta} = r\omega$

Momentekvationen med avseende masscentrum $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ har z -komponenten $M_z = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_G\omega\right)$ vilket här blir $Fr = \dfrac{2}{5}mr^2 2\ddot{\theta}$ (1)

Lagen om masscentrums rörelse $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ i cylinderkoordinater ger, eftersom masscentrum beskriver en cirkelrörelse med radien $2r$ och vinkelhastigheten $\dot{\theta}$:

$$m(0 - 2r\dot{\theta}^2) = N - mg\cos\theta \qquad (2)$$

$$m(2r\ddot{\theta} + 0) = mg\sin\theta - F \qquad (3)$$

Om F elimineras ur (1) och (3) fås $\dfrac{14}{5}mr\ddot{\theta} = mg\sin\theta$ (4)

(vilket är momentekvationen med avseende på kontaktpunkten!)

och F kan med hjälp av (1) skrivas $\underline{\underline{F = \dfrac{2}{7}mg\sin\theta}}$ (5)

Bilda en förstaintegral till rörelseekvationen (4) och utnyttja begynnelse-villkoret!

$$\frac{14}{5}mr\ddot{\theta}\dot{\theta} = mg\sin\theta\dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2}\frac{14}{5}mr(\dot{\theta}^2 - 0) = -mg(\cos\theta - 1)$$

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{5}{7}mg(1 - \cos\theta)$$

vilket insatt i ekv (2) ger normalkraften $\underline{N = mg(\dfrac{17}{7}\cos\theta - \dfrac{10}{7})}$ (6)

Friktionsvillkoret $\dfrac{|\mathbf{F}|}{|\mathbf{N}|} \le \mu$ ger nu för gränsfallet glidning

$$\underline{\underline{\frac{2\sin\theta_1}{17\cos\theta_1 - 10} = \mu}}$$

LP 4.95

Kraftmomentet och tyngdkraften gör arbeten så att den kinetiska energin ökar.

Lagen om arbetet $U = T - T_0$

ger
$$M\theta - mg\frac{b}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}\frac{2mb^2}{3}\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

$$M\theta - mg\frac{b}{\sqrt{2}}\left[\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{mb^2}{3}\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3}{mb^2}\left[M\theta - mg\frac{b}{2}(\sin\theta + \cos\theta - 1)\right]}$$

LP 4.107

Betrakta det första läget! Masscentrum bestäms först. Låt origo ligga i hjulets centrum! Inför en vertikal y-axel!

$$y_G = \frac{m\cdot 0 + 2m\cdot 0 + m(r/2)}{4m} = \frac{r}{8} \tag{1}$$

Tröghetsmomentet bestäms med Steiners sats. Låt A vara kontaktpunkten!

$$I_O = mr^2 + 3\frac{mr^2}{3} = 2mr^2 \tag{2}$$

$$I_G = 2mr^2 - 4m\left(\frac{r}{8}\right)^2 = \frac{31}{16}mr^2 \tag{3}$$

$$I_A = I_G + 4m\left(\frac{9r}{8}\right)^2 = \frac{31}{16}mr^2 + \frac{81}{16}mr^2 = 7mr^2 \tag{4}$$

a) Kinetiska energin

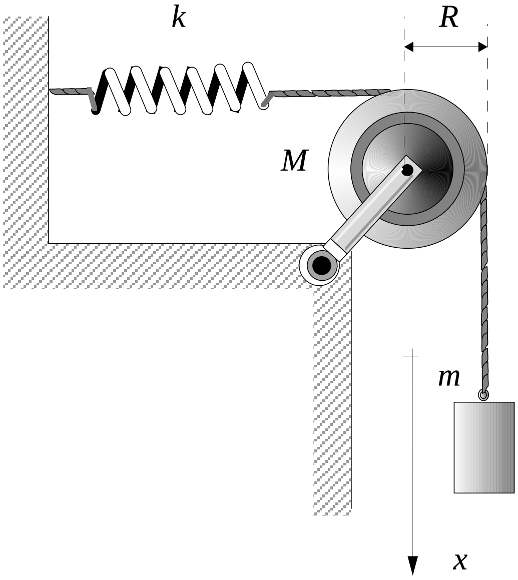
$$T = \frac{1}{2}I_A{\omega_A}^2 = \frac{7}{2}mr^2{\omega_A}^2 \tag{5}$$

b) Låt B vara den nya kontaktpunkten!

$$I_B = I_G + 4m\cdot\frac{65}{64}r^2 = \frac{96}{16}mr^2 \tag{6}$$

Kinetiska energin $T = \frac{1}{2}I_B{\omega_B}^2 = 3mr^2{\omega_B}^2$

LP 4.142



Begynnelsevillkoret är

$$t = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

eftersom rörelsen startar från vila då fjädern är oförlängd.

Eftersom tyngdkraften och fjäderkraften är konservativa bevaras den mekaniska energin:

$$T + V = T_0 + V_0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mgx + \frac{1}{2}kx^2 = 0 \tag{3}$$

Men $\dot{x} = R\omega$ och $I = cMR^2$.

Insättning i energiekvationen ger

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cMR^2\omega^2 - mgx + \frac{1}{2}kx^2 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}(m + cM)\dot{x}^2 = mgx - \frac{1}{2}kx^2 \tag{5}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2mgx - kx^2}{m + cM}} \tag{6}$$

Vändläge fås för $\dot{x} = 0$ dvs för $x = 0$ och $\underline{\underline{x = \dfrac{2mg}{k}}}$ (7)

b) Om energiekvationen tidsderiveras fås

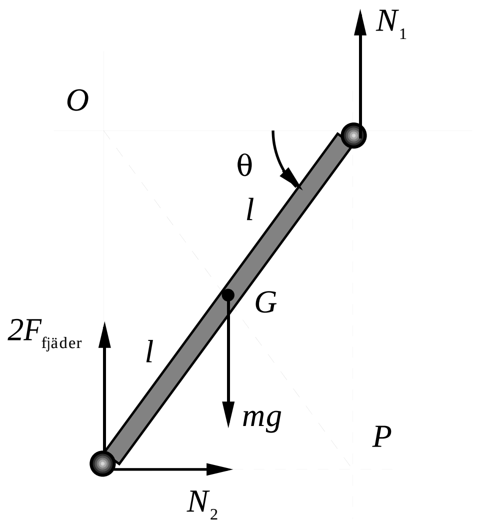
$$(m + cM)\dot{x}\ddot{x} = mg\dot{x} - kx\dot{x} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad (m + cM)\ddot{x} = mg - kx \tag{9}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m + cM}x = \frac{mg}{m + cM} \tag{10}$$

vilket är den sökta rörelseekvationen.

LP4.143



I figuren är avståndet $l = 2a$

För ett godtyckligt läge θ är underkanten A's förflyttning

$$4a\sin\theta - a \qquad (1)$$

och fjäderförlängningen

$$\frac{1}{2}\left(4a\sin\theta - a\right) \qquad (2)$$

Den potentiella energin i varje fjäder är då

$$V_{fjäder} = \frac{1}{2}k\left[\frac{1}{2}\left(4a\sin\theta - a\right)\right]^2 \qquad (3)$$

Punkten P är momentancentrum varför kinetiska energin kan skrivas

$$T = \frac{1}{2}I_P\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m(4a)^2}{12} + m(2a)^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{8}{3}ma^2\dot{\theta}^2 \qquad (4)$$

Lagen om den mekaniska energins bevarande

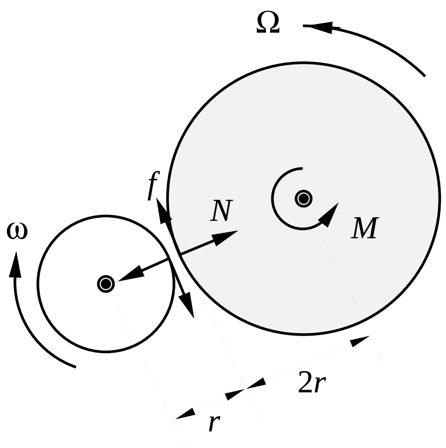
$$T + V = T_0 + V_0$$

ger då

$$\frac{8}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + k\frac{a^2}{4}\left(4\sin\theta - 1\right)^2 - mg\left(2a\sin\theta - \frac{a}{2}\right) = 0 \qquad (5)$$

$$\underline{\underline{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{8a}\left(2\sin\theta - \frac{1}{2}\right) - \frac{3k}{32m}\left(4\sin\theta - 1\right)^2}}}$$

LP 4.144



Antingen inför man kontaktkraften mellan hjulen och skriver upp momentekvationen för vardera hjulet med avseende på respektive rotationsaxel eller också betraktar man hela systemet och ställer upp lagen om effekten. Här väljs den senare metoden.

Den totala kinetiska energin är summan av det stora och lilla hjulets rotationsenergi. Effekten kan för varje kropp i plan rörelse allmänt skrivas

$$P = \mathbf{M}_G \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_G \tag{1}$$

Här gäller för vardera hjulet att masscentrums hastighet är noll. Dessutom är kontaktkrafternas (f och N i figuren) totala effekt noll vid rullning. Det beror på att vid kontaktstället är kontaktpunkternas hastigheter lika vid rullning, medan kontaktkrafterna är motsatt riktade.

Lagen om effekten $\quad P = \dot{T} \quad$ för hela systemet ger alltså

$$M\Omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}I^{\text{stora}}\Omega^2 + \frac{1}{2}I^{\text{lilla}}\omega^2\right) \tag{2}$$

$$M\Omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\underbrace{4m4k^2}_{I_{\text{stora}}}\Omega^2 + \frac{1}{2}\underbrace{mk^2}_{I_{\text{lilla}}}\omega^2\right) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \qquad M\Omega = mk^2\left(16\Omega\dot{\Omega} + \omega\dot{\omega}\right) \tag{4}$$

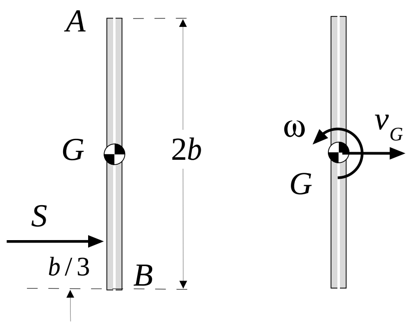
Rullningsvillkoret är

$$2r\Omega = r\omega \tag{5}$$

$$\Rightarrow \qquad M\Omega = mk^2\left(16\Omega\dot{\Omega} + 4\Omega\dot{\Omega}\right) \tag{6}$$

$$M = mk^2 20\dot{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{\omega} = \frac{M}{10mk^2}}}$$

LP 4.181



För stöten gäller stötimpulslagen

$$\mathbf{S} = m\mathbf{v}_{Ge} - m\mathbf{v}_{Gf}$$

och stötimpulsmomentlagen

$$\mathbf{r} \times \mathbf{S} = \mathbf{H}_e - \mathbf{H}_f$$

Index e och f står för efter och före stöt. Komponentekvationerna blir

$$\rightarrow: \quad S = mv_G \tag{1}$$

$$G: \quad \frac{2b}{3} \cdot S = \frac{m(2b)^2}{12}\omega \tag{2}$$

Alltså är

$$v_G = \frac{S}{m} \tag{3}$$

$$\omega = \frac{2S}{mb} \tag{4}$$

Sambandsformeln för hastigheter ger nu hastigheten i A

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{GA} \tag{5}$$

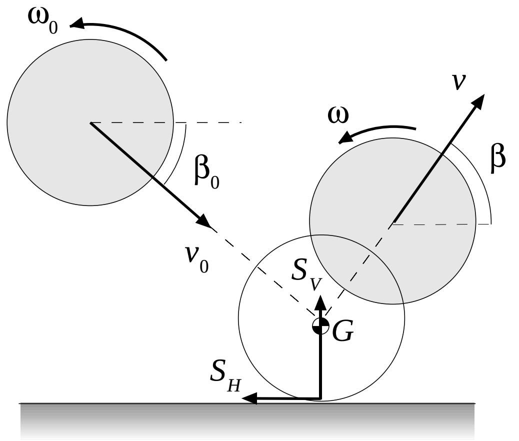
Komponentekvationen blir

$$v_A = \frac{S}{m} - \left(\frac{2S}{mb}\right) \cdot b \tag{6}$$

Resultatet är $\quad v_A = -\frac{S}{m}$

Hastigheten för A är $\quad \frac{S}{m} \quad$ och den är riktad åt vänster

LP 4.186



För stöten gäller stötimpulslagen

$$\mathbf{S} = m\mathbf{v}_{Ge} - m\mathbf{v}_{Gf}$$

och stötimpulsmomentlagen

$$\mathbf{r} \times \mathbf{S} = \mathbf{H}_e - \mathbf{H}_f$$

Index e och f står för efter och före stöt. Komponentekvationerna blir

$$\uparrow: \quad S_V = mv\sin\beta - \left(-mv_0 \sin\beta_0\right) \tag{1}$$

$$\rightarrow: \quad -S_H = mv\cos\beta - mv_0 \cos\beta_0 \tag{2}$$

$$\overset{\curvearrowleft}{G}: \quad -R \cdot S_H = I\omega - I\omega_0 \tag{3}$$

Studstalet $$e = -\frac{v\sin\beta - 0}{-v_0 \sin\beta_0 - 0} \tag{4}$$

Friktionsvillkoret ger $$S_H = \mu S_V \tag{5}$$

Ekv (4) och (1) ger $$\underline{\underline{S_V = mv_0 \sin\beta_0 (1+e)}} \tag{6}$$

Då ger ekv (5) $$\underline{\underline{S_H = \mu m v_0 \sin\beta_0 (1+e)}} \tag{7}$$

Vi skriver ekv (2) och ekv (4) en gång till, med utnyttjande av (7):

$$v\sin\beta = e\,v_0 \sin\beta_0 \tag{8}$$

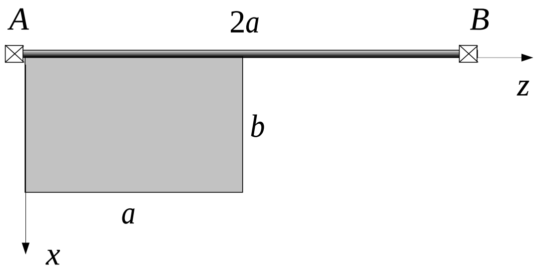
$$v\cos\beta = v_0 \cos\beta_0 - \mu v_0 \sin\beta_0 (1+e) \tag{9}$$

Division ger $$\tan\beta = \frac{e\sin\beta_0}{\cos\beta_0 - \mu\sin\beta_0(1+e)}$$

eller $$\underline{\underline{\tan\beta = \frac{e\tan\beta_0}{1-\mu\tan\beta_0(1+e)}}}$$

$$\tan\beta \to 0 \text{ om } \mu\tan\beta_0(1+e) \to 1$$

LP 4.193



Lösningen ges av Eulers andra lag

$$\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}_A \tag{1}$$

där tidsderivatan kan beräknas enligt

$$\dot{\mathbf{H}}_A = \left(\dot{\mathbf{H}}_A\right)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_A \tag{2}$$

där $Oxyz$ är ett koordinatsystem som är fixt i kroppen. Origo antas sammanfalla med lagret vid A.
Vinkelhastigheten är

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\ 0,\ 0,\ \omega\ \right) \tag{3}$$

I detta koordinatsystem som följer kroppens rörelse är rörelsemängds-momentet med avseende på punkten A

$$\mathbf{H}_A = \left(-I_{xz}\omega, -I_{yz}\omega,\ I_{zz}\omega\ \right) \tag{4}$$

Eftersom vinkelhastigheten är konstant blir $\left(\dot{\mathbf{H}}_A\right)_{xyz} = \mathbf{0}$

Antag att kraften på kroppen i lagret A är $\mathbf{R}$. Eulers andra lag kan då skrivas (tyngdkraften försummas) enligt ekv (1) och (2)

$$\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{R} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_A \tag{5}$$

som i komponentform blir

$$\begin{cases} -R_y\, 2a = I_{yz}\omega^2 \\ \ \ R_x\, 2a = -I_{xz}\omega^2 \end{cases} \tag{6}$$

Tröghetsprodukten $I_{yz} = 0$ eftersom skivan ligger i $xz-$planet. Med Steiners sats för tröghetsprodukter fås vidare

$$I_{xz} = I_{xz}^G + m x_G z_G = 0 + m\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{mab}{4} \tag{7}$$

Insättning i ekv (6) ger då resultatet $\quad \underline{\underline{\mathbf{R} = -\frac{mb}{8}\omega^2 \mathbf{e}_x}}$