LEDNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL A

LP A.1 Kulan påverkas av tyngdkraften mg samt trådkrafterna S_A och S_B. Alla dessa tre krafter är verkliga krafter och har kända riktningar. I ett medföljande accelererande referenssystem finns det en tröghetskraft, nämligen systempunktskraften

$$\mathbf{F}_{\mathrm{sp}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{sp}} = -ma\mathbf{e}_x$$

där $\mathbf{e}_x$ har samma riktning som den givna accelerationen.
Kulan är i jämvikt i det accelererande systemet.

Jämviktsvillkoret är

$$\rightarrow: \quad S_B \cos 60° - S_A \cos 60° - ma = 0 \tag{1}$$

$$\uparrow: \quad S_B \sin 60° + S_A \sin 60° - mg = 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}S_B - \frac{1}{2}S_A - ma = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}S_B + \frac{\sqrt{3}}{2}S_A - mg = 0 \tag{4}$$

Multiplicera ekv (3) med $\sqrt{3}$ och addera ekv (4)! $\Rightarrow$

$$\sqrt{3}S_B = m\left(\sqrt{3}a + g\right) \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{S_B = m\left(\frac{g}{\sqrt{3}} + a\right)}}$$

Insättning i ekv (3) ger

$$\underline{\underline{S_A = m\left(\frac{g}{\sqrt{3}} - a\right)}}$$

LP A.5 Kulan påverkas av tyngdkraften mg samt trådkrafterna S_A och S_B. Alla dessa tre krafter är verkliga krafter och har kända riktningar. I ett medföljande roterande referenssystem finns det en tröghetskraft, nämligen systempunktskraften

$$\mathbf{F}_{\mathrm{sp}} = -m\mathbf{a}_{\mathrm{sp}} = -m\left[\mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}\right)\right]$$

Vinkelhastigheten är konstant så att $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$.
Om origo läggs på rotationsaxeln är också $\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{0}$.

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F}_{\mathrm{sp}} = -m\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathrm{rel}}\right) = mb\omega^2 \mathbf{e}_x$$

där $\mathbf{e}_x$ är riktad horisontellt från axeln ut mot kulan.

Corioliskraften är noll, eftersom kulan saknar hastighet i det medföljande systemet. Kulan är i jämvikt i det roterande referenssystemet.

Jämviktsvillkoret är

$$\rightarrow: \quad S_B \cos 60° - S_A \cos 60° - mb\omega^2 = 0 \qquad (1)$$
$$\uparrow: \quad S_B \sin 60° + S_A \sin 60° - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2} S_B - \frac{1}{2} S_A + mb\omega^2 = 0 \qquad (3)$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} S_B + \frac{\sqrt{3}}{2} S_A - mg = 0 \qquad (4)$$

Multiplicera ekv (3) med $\sqrt{3}$ och addera ekv (4)! $\Rightarrow$

$$\sqrt{3} S_B = m\left(-\sqrt{3} b\omega^2 + g\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{S_B = m\left(\frac{g}{\sqrt{3}} - b\omega^2\right)}}$$

Insättning i ekv (3) ger

$$\underline{\underline{S_A = m\left(\frac{g}{\sqrt{3}} + b\omega^2\right)}}$$

LP A.8 Vinkelrätt mot skivans plan påverkas partikeln av tyngdkraften mg och normalkraften N_V. Spåret är glatt och ger ingen friktionskraft i skivans plan. I skivans plan påverkas partikeln av en normalkraft N_H vinkelrät mot spåret samt en fjäderkraft $k(y-l)\mathbf{e}_y$ i spårets riktning. Alla dessa krafter är verkliga krafter. I ett medföljande roterande referenssystem finns det tröghetskrafter, nämligen

systempunktskraften

$$\mathbf{F}_{\text{sp}} = -m\mathbf{a}_{\text{sp}} = -m\left[\mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\right]$$

och corioliskraften

$$\mathbf{F}_{\text{sp}} = -m\mathbf{a}_{\text{cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

Vinkelhastigheten är konstant så att $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$.
Om origo läggs på rotationsaxeln är också $\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{0}$.

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F}_{\text{sp}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{rel}}) = mR\omega^2\mathbf{e}_x + my\omega^2\mathbf{e}_y$$

där $\mathbf{e}_x$ är riktad horisontellt från axeln ut mot fjäderns fäste.

Corioliskraften är vinkelrät mot skårans riktning och kommer inte med i rörelseekvationen. Den kunde haft betydelse om friktionen skulle varit betydelsefull.

Kraftekvationen i skårans eller den relativa rörelsens riktning är

$$m\ddot{y} = -k(y-l) + m\omega^2 y \qquad \Rightarrow$$

$$m\ddot{y} + (k - m\omega^2)y = kl \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\ddot{y} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) y = \frac{kl}{m}}}$$

Förutsättningen för en harmonisk svängningsrörelse är att $\dfrac{k}{m} > \omega^2$.