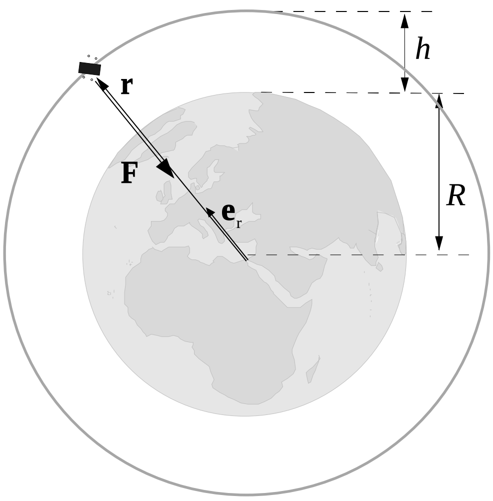
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 11

LP 11.1



Satelliten kretsar i en cirkelbana kring jorden på höjden h och påverkas av gravitationskraften från jorden. Enligt Newtons allmänna gravitationslag är den

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{e}_r \qquad (1)$$

M och m är jordens respektive satellitens massa, r avståndet mellan kropparna och G den allmänna gravitationskonstanten. Minustecknet betyder att kraften är riktad inåt mot jorden medan enhetsvektorn $\mathbf{e}_r$ har riktning från jorden mot satelliten. Eftersom gravitationskraften vid jordytan då $r = R$ oftast skrivs mg gäller sambandet

$$\mathbf{F}_{(r=R)} = -G\frac{Mm}{R^2}\mathbf{e}_r = -mg\mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \quad g = \frac{GM}{R^2} \qquad (2)$$

Man har alltså infört beteckningen g, tyngdaccelerationen vid jordytan, istället för kombinationen GM/R^2.

a) Gravitationskraften på satelliten är alltså

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{(R+h)^2}\mathbf{e}_r \qquad \text{eller} \qquad \mathbf{F} = -\frac{mgR^2}{(R+h)^2}\mathbf{e}_r \qquad (3)$$

b) Vid cirkelrörelse med konstant fart krävs alltid en centripetalkraft, vilket kraftekvationens komponent i den radiella riktningen (normalriktningen om det naturliga systemet används) säger:

$$m\frac{v^2}{R+h} = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \qquad \text{eller} \qquad v = R\sqrt{\frac{g}{R+h}} \qquad (5)$$

c) Gravitationskraftens potentialfunktion är känd från teorin. Satellitens mekaniska energi är

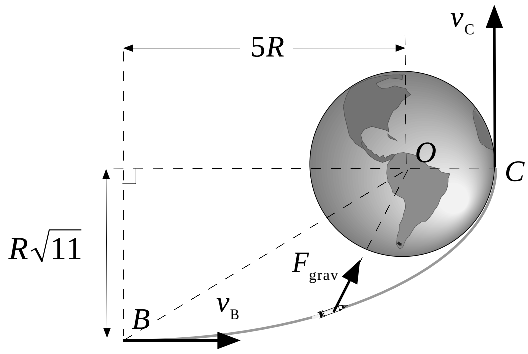
$$E = T + V \qquad (6)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R+h} = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R+h} - G\frac{Mm}{R+h} = -\frac{GMm}{2(R+h)} \qquad (7)$$

eller $\quad E = -\dfrac{mgR^2}{2(R+h)}$

Kommentar: Observera att den mekaniska energin är negativ. Det är en konsekvens av att den potentiella energin har valts att vara noll i oändligheten. *Om* satellitens totala energi hade varit positiv skulle den också ha räckt till för att nå oändligheten.

LP 11.5



Satelliten påverkas av gravitationskraften från jorden. Enligt Newtons allmänna gravitationslag är den

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{e}_r \qquad (1)$$

M och m är jordens respektive satellitens massa, r avståndet mellan kropparna och G den allmänna gravitationskonstanten. Minustecknet betyder att kraften är riktad inåt mot jorden medan enhetsvektorn $\mathbf{e}_r$ har riktning från jorden mot satelliten.

Eftersom gravitationskraften vid jordytan, då $r = R$, oftast skrivs mg gäller

sambandet $$\mathbf{F}_{(r=R)} = -G\frac{Mm}{R^2}\mathbf{e}_r = -mg\mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

Eftersom gravitationskraften är den enda kraft som verkar på satelliten och den är en konservativ centralkraft gäller för ellipsbanan att

rörelsemängdsmomentet med avseende på jordens centrum är konstant
mekaniska energin är konstant

Det ger två ekvationer:

$$(H_z)_B = (H_z)_C \qquad (1)$$
$$T_B + V_B = T_C + V_C \qquad (2)$$

$$R\sqrt{11}\cdot mv_B = R\cdot mv_C \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 - mg\frac{R^2}{6R} = \frac{1}{2}mv_C{}^2 - mg\frac{R^2}{R} \qquad (4)$$

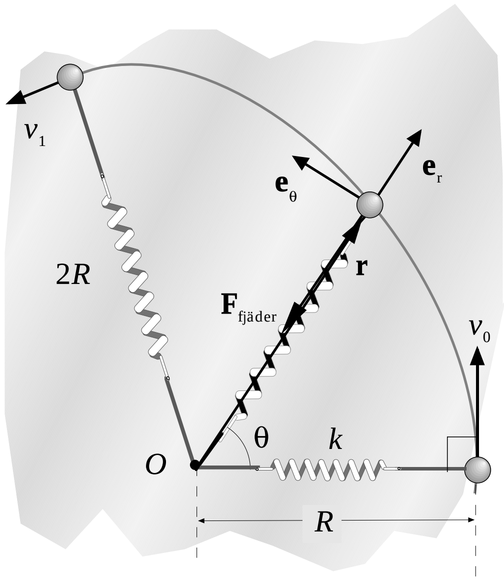
Eliminera först v_C genom att lösa ut v_C ur ekv (3) och sätta in i ekv (4)!

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 - mg\frac{R^2}{6R} = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{11}\,v_B\right)^2 - mg\frac{R^2}{R} \qquad (5)$$

$$10v_B{}^2 = 2gR\left(1-\frac{1}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad 10\,v_B{}^2 = \frac{10}{6}gR \qquad (6)$$

Farten i B skall vara $$\underline{\underline{v_B = \sqrt{\frac{1}{6}gR}}}$$

LP 11.6



Partikeln påverkas här av tyngdkraft, normalkraft och fjäderkraft. Kraftsumman av de två första är noll. Eftersom fjäderkraften under hela rörelsen är parallell med lägevektorn **r** blir kraftmomentet med avseende på fjäderns fixa punkt O noll:

Momentekvationen med avseende på den fixa punkten O:

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = \dot{\mathbf{H}}_O$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{H}_O = \text{konstant vektor}$$

Om z-axeln är vinkelrät mot rörelsens plan är speciellt z-komponenten H_z en rörelsekonstant. Vi tecknar denna storhet i de två lägen då hastigheten är vinkelrät mot lägevektorn:

$$Rmv_0 = 2Rmv_1 \tag{1}$$

Eftersom fjäderkraften är konservativ är också mekaniska energin en rörelsekonstant:

$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^{\,2} + \frac{1}{2}k(2R-l)^2 = \frac{1}{2}mv_0^{\,2} + \frac{1}{2}k(R-l)^2 \tag{3}$$

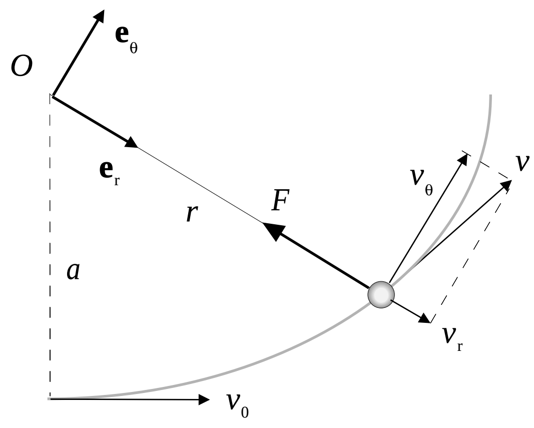
Om (1) insättes i (2) erhålles

$$\frac{1}{2}m\frac{v_0^{\,2}}{4} + \frac{1}{2}k\left(3R^2 - 2Rl\right) = \frac{1}{2}mv_0^{\,2} \tag{4}$$

$$\frac{kR}{m}(3R-2l) = \frac{3v_0^{\,2}}{4} \tag{5}$$

Fjäderkonstanten är $\quad \underline{\underline{k = \dfrac{3m\,v_0^{\,2}}{4R(3R-2l)}}}$

LP 11.8



Pucken påverkas av tyngdkraft, normalkraft och fjäderkraft. Eftersom tyngdkraften och normalkraften hela tiden balanserar varandra är det bara fjäderkraften som påverkar den plana rörelsen, som då kan sägas vara en centralkraftsrörelse.

Centralkraften ges för en fjäder av

$$\mathbf{F} = -kr\mathbf{e}_r \tag{1}$$

och motsvarande potentialfunktion är

$$V = \frac{1}{2}kr^2 \tag{2}$$

Vid centralkraftsrörelse är rörelsemängdsmomentet med avseende på kraftcentrum

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}} \tag{3}$$

konstant. Komponenten vinkelrät mot rörelsens plan beräknas som hävarm gånger rörelsemängdens θ-komponent. För de speciella lägena fås då sambandet

$$amv_0 = 2amv_\theta \tag{4}$$

Energin är också en rörelsekonstant ty fjäderkraften är konservativ:

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2} \tag{5}$$

Insättning ger

$$\frac{1}{2}mv_0^{\,2} + \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}m\left(v_r^{\,2} + v_\theta^{\,2}\right) + \frac{1}{2}k(2a)^2 \tag{6}$$

När hastigheten bildar $45°$ med trådriktningen gäller att $v_\theta = v_r$.

Insättning ger

$$\frac{1}{2}mv_0^{\,2} + \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2v_\theta^{\,2} + \frac{1}{2}k \cdot 4a^2 \tag{7}$$

Division med $\frac{1}{2}m$ och insättning av (4) ger

$$v_0^{\,2} + \frac{k}{m}a^2 = 2\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{k}{m}4a^2 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_0^{\,2}}{2} = \frac{3k}{m}a^2 \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_0 = a\sqrt{\frac{6k}{m}}}}$$