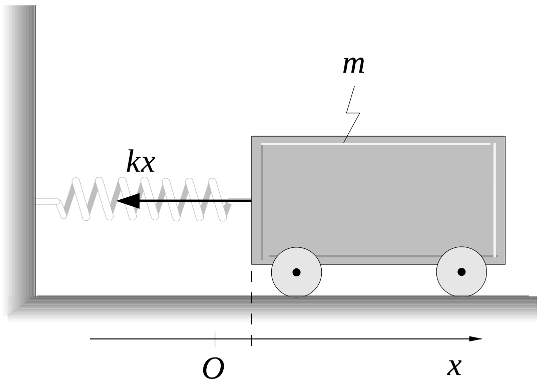
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 12

LP 12.1



Vagnen påverkas av tyngdkraft och normalkraft i den vertikala riktningen men endast fjäderkraft i den horisontella riktningen. Om fjädern förlängs verkar en återförande kraft på vagnen

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{e}_x$$

där x är avvikelsen från jämviktsläget.

Begynnelsevillkoret är

$$t = 0 \qquad \begin{cases} x = d \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ har allmänt x-komponenten $F_x = m\ddot{x}$. I detta fall fås

$$m\ddot{x} = -kx \tag{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0 \quad \text{där} \quad \omega_n{}^2 = \frac{k}{m} \tag{4}$$

a) egenvinkelfrekvensen bestäms direkt ur svängningsekvationen (4)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

b) svängningstidens definition ger

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \Rightarrow \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5}$$

Den allmänna lösningen är

$$x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t \tag{6}$$

med hastigheten

$$\dot{x} = -A\omega_n \sin\omega_n t + B\omega_n \cos\omega_n t \tag{7}$$

Begynnelsevillkoret ger då integrationskonstanterna A och B:

$$\begin{cases} d = A\cos 0 + B\sin 0 \\ 0 = -A\omega_n \sin 0 + B\omega_n \cos 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = A + B\cdot 0 \\ 0 = -A\omega_n \cdot 0 + B\omega_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = d \\ B = 0 \end{cases} \tag{8}$$

c) Insättning i den allmänna lösningen (6) ger läget som funktion av tiden:

$$x = d\cos\omega_n t \tag{9}$$

d) Hastigheten är $\dot{x} = -d\omega_n \sin\omega_n t$. Den maximala farten fås för $\sin\omega_n t = 1$.

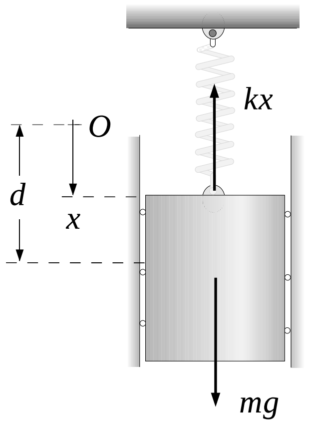
$$|\dot{x}|_{\max} = d\omega_n = d\sqrt{\frac{k}{m}}$$

e) Accelerationen är $\ddot{x} = -d\omega_n{}^2 \cos\omega_n t$ och den maximala accelerationen fås för

$\cos\omega_n t = 1$

$$|\ddot{x}|_{\max} = d\omega_n{}^2 = \frac{kd}{m}$$

LP 12.2



Tyngden påverkas i den vertikala riktningen av tyngdkraft och fjäderkraft. Vi lägger origo i jämviktsläget så att *den dynamiska delen* av fjäderkraften är

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{e}_x$$

där x är avvikelsen från jämviktsläget.

Begynnelsevillkoret är

$$t = 0 \qquad \begin{cases} x = d \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ har allmänt x-komponenten $F_x = m\ddot{x}$. I detta fall fås

$$m\ddot{x} = -kx \tag{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0 \quad \text{där} \quad \omega_n{}^2 = \frac{k}{m} \tag{4}$$

a) Om tyngden hänger i vila i jämviktsläget är accelerationen noll. Fjäderkraften är då lika stor som fjäderkraften:

$$0 = -k\Delta l + mg \qquad \Rightarrow \qquad \Delta l = \frac{mg}{k} \tag{5}$$

b) egenvinkelfrekvensen ω_n bestäms direkt ur svängningsekvationen (4). Egenfrekvensen är f_n

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Rightarrow \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

c)Den allmänna lösningen är

$$x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t \tag{7}$$

med hastigheten

$$\dot{x} = -A\omega_n \sin\omega_n t + B\omega_n \cos\omega_n t \tag{8}$$

Begynnelsevillkoret ger då integrationskonstanterna A och B:

$$\begin{cases} d = A\cos 0 + B\sin 0 \\ 0 = -A\omega_n \sin 0 + B\omega_n \cos 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = A + B\cdot 0 \\ 0 = -A\omega_n \cdot 0 + B\omega_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = d \\ B = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Insättning i den allmänna lösningen (7) ger läget som funktion av tiden:

$$x = d\cos\omega_n t \tag{10}$$

Hastigheten är $\dot{x} = -d\omega_n \sin\omega_n t$. Den maximala farten fås för $\sin\omega_n t = 1$.

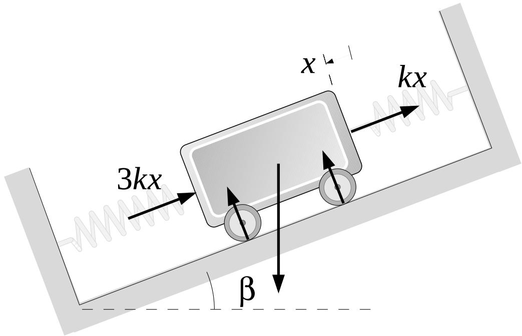
$$|\dot{x}|_{\max} = d\omega_n = d\sqrt{\frac{k}{m}}$$

d) Accelerationen är enligt (2) alltid $m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x = \frac{k}{m}d\cos\omega_n t$.

Den maximala accelerationen är då $\quad |\ddot{x}|_{\max} = \dfrac{kd}{m}$

e) Läget är enligt ovanstående $x = d\cos\omega_n t$

LP 12.3



Vagnen påverkas av tyngdkraften, normalkrafter och fjäderkrafter. Vi lägger origo i jämviktsläget så att *den dynamiska delen* av fjäderkrafterna är respektive

$$\mathbf{F}_1 = -kx\mathbf{e}_x \text{ och } \mathbf{F}_2 = -3kx\mathbf{e}_x$$

där x är avvikelsen från jämviktsläget.

a) Fjäderlängdändringen Δl vid jämvikt ges av jämviktsekvationen, alltså kraftekvationen i planets riktning. Fjäderkrafterna måste balansera tyngdkraften:

$$0 = mg\sin\beta - k\Delta l - 3k\Delta l \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta l = \frac{mg\sin\beta}{4k} \qquad (2)$$

b) Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ har allmänt x-komponenten $F_x = m\ddot{x}$. I detta fall fås

$$m\ddot{x} = -kx - 3kx \qquad (3)$$

Observera att tyngdkraften inte är med eftersom vi redan från början har eliminerat de statiska krafterna.

$$\Rightarrow \qquad m\ddot{x} + 4kx = 0 \qquad (4)$$

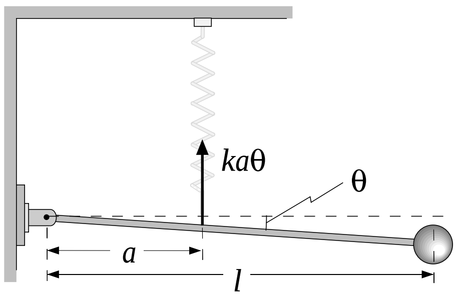
Jämförelse med standardekvationen $\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$ ger

$$\omega_n{}^2 = \frac{4k}{m} \qquad (5)$$

Egenfrekvensen är alltså

$$\underline{\underline{f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}}}}$$

LP 12.5



Svängningstiden för stångens små svängningar kring jämviktsläget skall bestämmas. Svängningstiden ser man om man bestämt svängningsekvationen.

Låt vinkeln θ vara stångens vridningsvinkel från jämviktsläget. Vi eliminerar direkt de statiska krafterna. Det betyder att vi inser att tyngdkraftens moment med avseende på stångens vridningsaxel balanseras av den statiska delen av fjäderkraftens moment. Den dynamiska delen av fjäderkraften är

$$k a \sin\theta \approx k a\theta \qquad (1)$$

På samma sätt blir kulans vertikala avvikelse från jämviktsläget

$$l\sin\theta \approx l\theta \qquad (2)$$

Kulans vertikala hastighet är $\approx l\ddot{\theta}$ (3)

Momentekvationen $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ (4)

har allmänt z-komponenten $M_z = \dot{H}_z$ (5)

Kraftmomentet som fjäderkraften ger bestäms som hävarm gånger kraft. Rörelsemängdsmomentet för plan rörelse i planpolära koordinater är $H_z = ml^2\dot{\theta}$. Alternativt bestäms det som hävarm gånger rörelsemängd $l \cdot ml\dot{\theta}$. Insättning i momentekvationen ger om z-axeln går inåt

$$-a \cdot ka\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ml^2\dot{\theta}\right) \qquad (6)$$

$$ml^2\ddot{\theta} = -ka^2\theta \qquad (7)$$

Standardekvationen blir

$$\ddot{\theta} + \frac{ka^2}{ml^2}\theta = 0 \qquad (8)$$

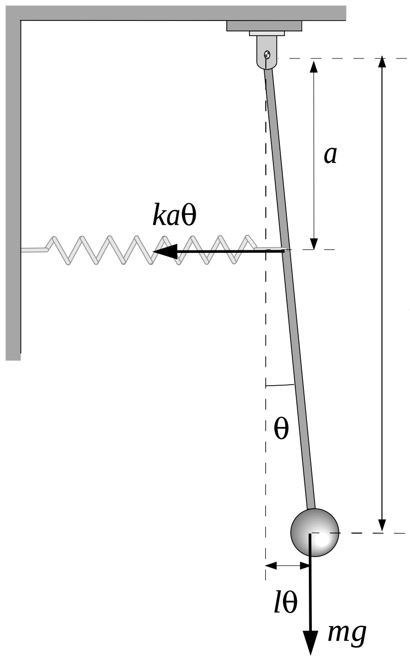
Identifiering ger då egenvinkelfrekvensen i kvadrat

$$\omega_n{}^2 = \frac{ka^2}{ml^2} \qquad (9)$$

Egenfrekvensen blir $f_n = \dfrac{\omega_n}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{ka^2}{ml^2}}$ (10)

Perioden är alltså $\underline{\underline{\tau_n = 2\pi \dfrac{l}{a}\sqrt{\dfrac{m}{k}}}}$

LP 12.7



Svängningstiden för stångens små svängningar kring det stabila jämviktsläget skall bestämmas. Fjädern måste antas ha sin naturliga längd i det vertikala läget. Låt vinkeln θ vara stångens vridningsvinkel.
Fjäderförlängningen blir då

$$a\sin\theta \approx a\theta$$

På samma sätt blir kulans horisontella avvikelse

$$l\sin\theta \approx l\theta$$

Det vertikala avståndet upp till fjäderns fästpunkt är

$$a\cos\theta \approx a\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)$$

där den kvadratiska termen kan försummas.

Momentekvationen med avseende på den fixa upphängningsaxeln

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (1)$$

har z-komponenten

$$M_z = \dot{H}_z \qquad (2)$$

Kraftmomenten som tyngdkraften och fjäderkraften ger bestäms som hävarm gånger kraft. Rörelsemängdsmomentet för plan rörelse i planpolära koordinater är $ml^2\dot{\theta}$. Alternativt bestäms det som hävarm gånger rörelsemängd $l \cdot ml\dot{\theta}$. Insättning i momentekvationen ger

$$-a\cdot ka\theta - mg\cdot l\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ml^2\dot{\theta}\right) \qquad (3)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + \left(ka^2 + mgl\right)\theta = 0 \qquad (4)$$

Standardekvationen blir

$$\ddot{\theta} + \frac{ka^2 + mgl}{ml^2}\theta = 0 \qquad (5)$$

Identifiering ger då egenvinkelfrekvensen i kvadrat

$$\omega_n^{\ 2} = \frac{ka^2 + mgl}{ml^2} \qquad (6)$$

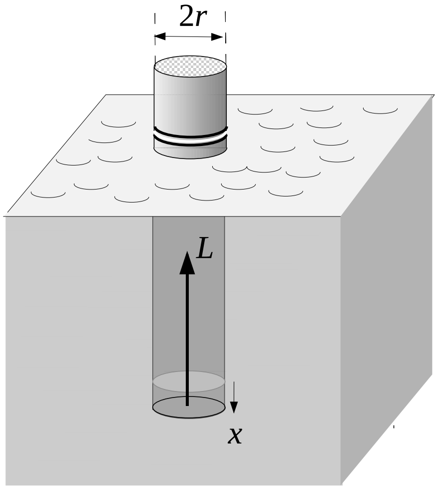
Frekvensen blir

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ka^2 + mgl}{ml^2}} \qquad (7)$$

Perioden är

$$\underline{\underline{\tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{ka^2 + mgl}}}}$$

LP 12.8



Bojen påverkas av tyngdkraften och lyftkraften. Lyftkraften bestäms enligt Arkimedes princip som tyngden av den undanträngda vätskan.

Vi utgår från att vi vet att de statiska krafterna (tyngdkraften och lyftkraften) som balanserar varandra vid jämvikt inte kommer med i svängningsekvationen, om avvikelsen x från jämviktsläget betraktas.

Om bojen nu guppar lite grand neråt är det bara lyftkraften som ändras. Ökningen av lyftkraften räknat från det statiska värdet är lika med tyngden av den extra undanträngda vätskan: vätskans densitet ρ gånger volymen $\pi r^2 x$ gånger tyngdaccelerationen g

$$L = \rho \pi r^2 x g \tag{1}$$

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

ger i den vertikala riktningen

$$m\ddot{x} = -\rho g \pi r^2 x \tag{2}$$

Standardformen blir

$$\ddot{x} + \frac{\rho g \pi r^2}{m} x = 0 \tag{3}$$

och genom identifikation bestäms egenvinkelfrekvensen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\rho g \pi r^2}{m}} \tag{4}$$

så att frekvensen blir

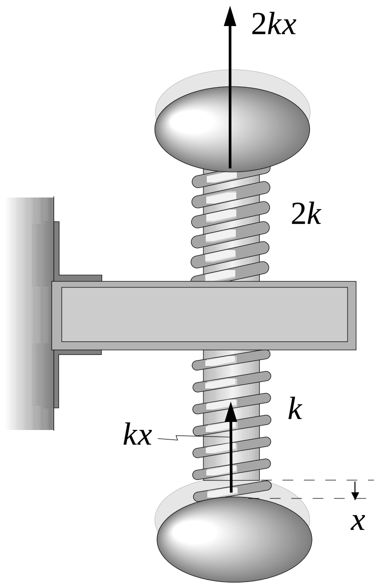
$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho g \pi r^2}{m}} = \underline{\underline{\frac{r}{2}\sqrt{\frac{\rho g}{m\pi}}}}$$

Kommentar: Om kraftekvationen ställs upp utan att man från början eliminerar de statiska krafterna fås

$$m\ddot{x} = mg - \rho g \pi r^2 (x_0 + x)$$

där x_0 är längden av bojen under vätskeytan vid jämvikt.

LP 12.9



Kroppen påverkas av tyngdkraften och fjäderkrafterna. I jämviktsläget balanserar de varandra och krafternas summa är noll. Båda fjädrarna är från början hoptryckta så att den totala fjäderkraften på den övre tyngden är riktad uppåt. Fjäderkraften på den undre tyngden är av samma anledning riktad neråt.

Om kroppens vertikala förflyttning neråt från jämviktsläget är x kommer fjäderkraften i den övre fjädern att öka med $2kx$. Fjäderkraften i den undre kommer att minska med kx.

När vi nu ställer upp kraftekvationen utgår vi från att de statiska krafterna inte behöver tas med om vi med fjäderkraften menar förändringen räknat från värdet vid jämvikt

Kraftekvationen $\qquad \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (1)$

i den vertikala riktningen $\qquad F_x = m\ddot{x} \qquad (2)$

ger $\qquad m\ddot{x} = -2kx - kx \qquad (3)$

Svängningsekvationen på standardform blir

$$\ddot{x} + \frac{3k}{m}x = 0 \qquad (4)$$

Egenvinkelfrekvensen fås genom jämförelse med den allmänna svängningsekvationen $\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad (5)$$

Svängningstidens eller periodens definition ger

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}} \qquad (6)$$

Kommentar: Lösningen kan också fås med mekaniska energilagen:

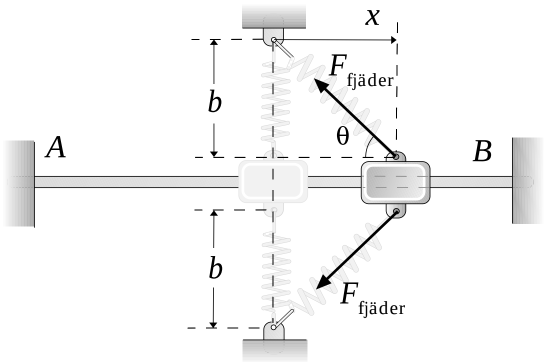
$$\boxed{T + V = \text{konstant}}$$

Insättning ger $\qquad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}2kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{konstant}$

Tidsderivering ger $\qquad 2\cdot\frac{1}{2}m\dot{x}\ddot{x} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2kx\dot{x} + 2\cdot\frac{1}{2}kx\dot{x} = 0$

vilket är samma ekvation som (4).

LP 12.13



Figurens plan är ett horisontalplan. Hylsan påverkas av tyngdkraften mg och en normalkraft N i den vertikala riktningen. I horisontalplanet verkar bara fjäderkrafterna.

Fjäderkraftens storlek i ett godtyckligt läge givet av koordinaten x är

$$F_{\text{fjäder}} = k\left(\sqrt{b^2 + x^2} - l\right) \qquad (1)$$

Den totala komponenten av fjäder-krafterna i rörelseriktningen är

$$F_x = -2F_{\text{fjäder}} \cos\theta = -2F_{\text{fjäder}} \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} \qquad (2)$$

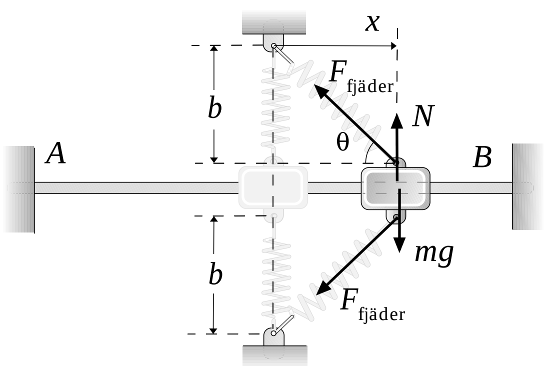
Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ har allmänt x-komponenten $F_x = m\ddot{x}$. I detta fall fås

$$m\ddot{x} = -2F_{\text{fjäder}} \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \qquad m\ddot{x} = -2k\left(\sqrt{b^2 + x^2} - l\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} \qquad (4)$$

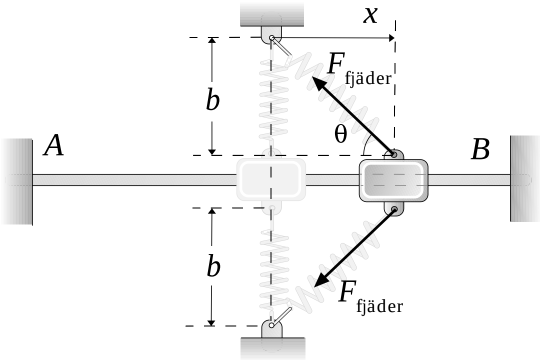
$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\ddot{x} + \frac{2k}{m}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)x = 0}}$$

Kommentar:



Om figurens plan är ett vertikalplan ligger tyngdkraften mg och normal-kraften N i detta plan. Fjäderkrafterna förändras ej och därför är $N = mg$. Man får alltså samma rörelseekvation i detta fall.

LP 12.14



Figurens plan är ett horisontalplan. Hylsan påverkas av tyngdkraften mg och en normalkraft N i den vertikala riktningen. I horisontalplanet verkar bara fjäderkrafterna.

Den naturliga längden l är mindre än avståndet b vilket betyder att det stabila jämviktsläget motsvaras av $x = 0$.

Fjäderkraftens storlek i ett godtyckligt läge givet av koordinaten x är

$$F_{\text{fjäder}} = k\left(\sqrt{b^2 + x^2} - l\right) \tag{1}$$

Den totala komponenten av fjäderkrafterna i rörelseriktningen är

$$F_x = -2F_{\text{fjäder}} \cos\theta = -2F_{\text{fjäder}} \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} \tag{2}$$

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ har allmänt x-komponenten $F_x = m\ddot{x}$. I detta fall fås

$$m\ddot{x} = -2F_{\text{fjäder}} \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \qquad m\ddot{x} = -2k\left(\sqrt{b^2 + x^2} - l\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{2k}{m}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)x = 0 \tag{5}$$

För små svängningar är $x << b$ och

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + x^2}} = \frac{1}{b\sqrt{1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2}} \approx \frac{1}{b}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2\right) \tag{6}$$

Svängningsekvationen är

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\left[1 - \frac{l}{b}\left(1 - \frac{x^2}{2b^2}\right)\right]x = 0 \qquad \Rightarrow \tag{7}$$

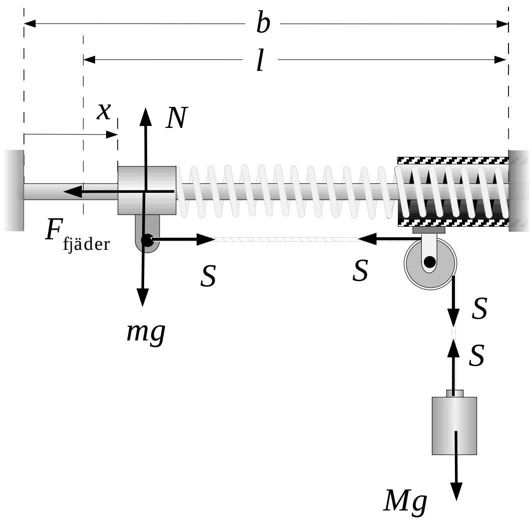
$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\left(1 - \frac{l}{b}\right)x = 0 \tag{8}$$

Jämförelse med standardekvationen $\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$ ger

Egenvinkelfrekvensen $\qquad \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}\left(1 - \frac{l}{b}\right)}$

Svängningstiden $\qquad \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{mb}{2k(b - l)}}}}$

LP 12.15



Frilägg hylsan och motvikten enligt figuren. Vi antar att fjäderns naturliga längd är l och att avståndet mellan väggarna är b. Hylsan påverkas då i rörelseriktningen av fjäderkraften $F_{\text{fjäder}} = k(x-b+l)$ och trådkraften S. Eftersom trissan är lätt och lättrörlig är trådkraften på motvikten lika stor. Farten är lika stor för hylsan och motvikten.

Kraftekvationen för hylsan respektive motvikten är då

$$m\ddot{x} = -k(x-b+l) + S \tag{1}$$

$$M\ddot{x} = Mg - S \tag{2}$$

Trådkraften S kan elimineras genom att addera ekvationerna

$$m\ddot{x} + M\ddot{x} = -k(x-b+l) + S + Mg - S \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad (m+M)\ddot{x} = -k(x-b+l) + Mg \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad (m+M)\ddot{x} + kx = k(b-l) + Mg \tag{5}$$

Svängningsekvationen är

$$\ddot{x} + \frac{k}{m+M}x = \frac{k(b-l)+Mg}{m+M} \tag{6}$$

Jämförelse med standardekvationen $\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$ ger

Egenvinkelfrekvensen $\qquad \omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$

Svängningstiden $\qquad \tau_n = \dfrac{2\pi}{\omega_n} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}}}$

Jämviktsläget x_0 ges av villkoret $\ddot{x} = 0$ i ekv (5) $\Rightarrow \quad x_0 = b - l + \dfrac{Mg}{k}$

Kommentar: Problemet löses med fördel med hjälp av lagen om mekaniska energins bevarande. Trådkrafterna gör tillsammans inget arbete.

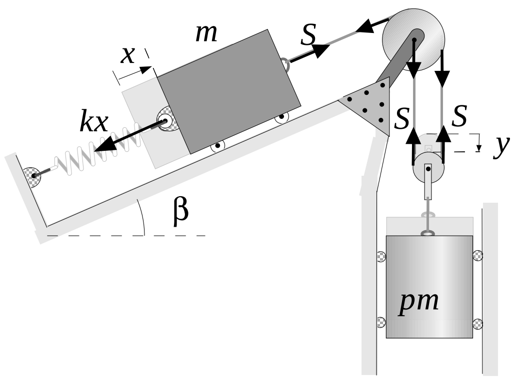
$$T + V = T_0 + V_0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-b+l)^2 - Mgx = \text{konstant}$$

Tidsderivering ger

$$m\dot{x}\ddot{x} + M\dot{x}\ddot{x} + k(x-b+l)\dot{x} - Mg\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + M\ddot{x} + k(x-b+l) - Mg = 0$$

vilket överensstämmer med rörelseekvationen (5)

LP 12.17



Vi utgår från att vi vet att de statiska krafterna, dvs krafterna som balanserar varandra i jämviktsläget, kan elimineras ur lösningen, just för att summan av de krafterna för varje kropp blir noll.
Vi betraktar alltså en avvikelse x från jämviktsläget och den utritade fjäder-kraften kx är då *förändringen* i fjäder-kraften räknat från värdet vid jämvikt. På samma sätt är kraften S i figuren *förändringen* i fjäderkraften räknat från värdet vid jämvikt. Tyngdkrafterna kommer inte med i lösningen eftersom de inte ändras när systemet svänger.
Kinematik: Om tyngden med massan pm åker ner en stäcka y hur långt åker då massan m på lutande planet? Om massan m var fix och tråden elastisk skulle tråden måsta förlängas $2y$. Vi får alltså det kinematiska sambandet

$$x = 2y \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = 2\dot{y} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = 2\ddot{y} \tag{1}$$

Kinetik: Vi ställer nu upp kraftekvationen i rörelseriktningen för kropparna var för sig:

$$m\ddot{x} = -kx + S \tag{2}$$

$$pm\ddot{y} = -2S \tag{3}$$

Eliminera kraften S genom att multiplicera ekvation (3) med 2 och sedan addera ekvationerna. Sätt också in kinematiksambandet (1). Resultatet blir

$$2m\ddot{x} + \frac{pm}{2}\ddot{x} = -2kx \tag{4}$$

Rörelseekvationen blir

$$\ddot{x} + \frac{4k}{(4+p)m}x = 0 \tag{5}$$

Egenvinkelfrekvensen fås genom jämförelse med den allmänna svängnings-ekvationen $\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{(4+p)m}} \tag{6}$$

Fjäderns förkortning δ vid jämvikt bestäms ur jämviktsekvationerna.
Begynnelsevillkoret blir

$$t = 0 \qquad \begin{cases} x = \delta \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \qquad \text{där} \qquad \delta = \frac{mg}{2k}(2\sin\beta - p) \tag{7}$$

Den allmänna lösningen är

$$x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t \tag{8}$$

$$\dot{x} = -A\omega_n \sin\omega_n t + B\omega_n \cos\omega_n t \tag{9}$$

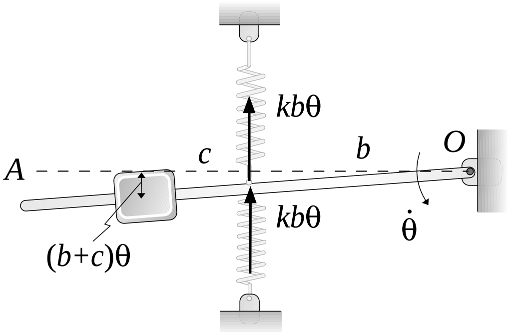
Begynnelsevillkoret ger då integrationskonstanterna A och B:

$$\begin{cases} \delta = A\cos 0 + B\sin 0 \\ 0 = -A\omega_n \sin 0 + B\omega_n \cos 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A = \delta \\ B = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Insättning i den allmänna lösningen (6) ger läget som funktion av tiden:

$$x = \delta\cos\omega_n t \qquad \text{där } \delta \text{ och } \omega_n \text{ ges ovan.}$$

LP 12.19



För små svängningar, alltså små vinkel-vridningar θ, blir längdändringen av fjädrarna $b\theta$. Vi bortser från att fjädrarna rör sig lite grand i horisontell riktning. Kroppen på stången får en vertikal förflyttning $(b+c)\theta$. För båda dessa avstånd gäller att de är approximationer.

Storleken av den dynamiska delen av fjäderkraften är $kb\theta$ i vardera fjädern. Vi bortser nu från de statiska krafterna, tyngdkraften och den statiska delen av fjäderkrafterna.

Momentekvationen $M_z = \dot{H}_z$ blir

$$-b \cdot kb\theta - b \cdot kb\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m(b+c)^2\dot{\theta}\right] \tag{1}$$

och kan skrivas

$$\ddot{\theta} + \frac{2kb^2}{m(b+c)^2}\theta = 0 \tag{2}$$

Jämför med standardformen:

$$\ddot{\theta} + \omega_n{}^2\theta = 0 \tag{3}$$

Perioden är alltså

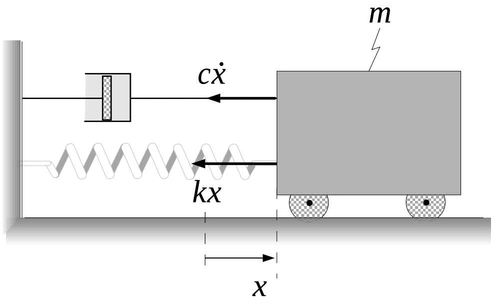
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi(b+c)}{b}\sqrt{\frac{m}{2k}} \tag{4}$$

$$\underline{\underline{b + c = \frac{b\tau_n}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}}}$$

Periden skall vara $\tau_n = 0.7$ s, vilket med de givna numeriska värdena ger

$$b + c \approx 0.84 \text{ m}$$

LP 12.31



Vagnen startar från vila då fjäderns förlängning är x_0. Detta motsvaras av begynnelsevillkoret:

$$t = 0 \quad \begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

Krafterna i rörelseriktningen är fjäderkraften och den viskösa motståndskraften.

Kraftekvationen $F_x = m\ddot{x}$

ger $$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2}$$

Med substitutionerna $$\omega_n^{\ 2} = k/m \quad \text{och} \quad 2\zeta\omega_n = c/m \tag{3}$$

fås standardekvationen $$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^{\ 2}x = 0 \tag{4}$$

Systemparametrarna är enligt text sådana att sambandet $c = \sqrt{km}$ gäller. Då blir enligt (3) dämpningsfaktorn

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{1}{2} \tag{5}$$

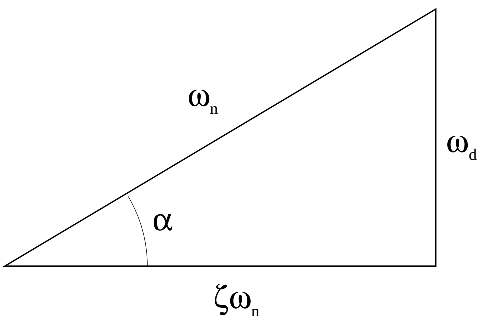
Systemet är alltså svagt dämpat och den allmänna lösningen kan skrivas

$$x = Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \alpha) \tag{6}$$

och hastigheten är $$\dot{x} = C\left[-\zeta\omega_n \sin(\omega_d t + \alpha) + \omega_d \cos(\omega_d t + \alpha)\right]e^{-\zeta\omega_n t} \tag{7}$$

Integrationskonstanterna C och α bestäms ur begynnelsevillkoret:

$$\begin{cases} x_0 = Ce^0 \sin\alpha \\ 0 = C\left[-\zeta\omega_n \sin\alpha + \omega_d \cos\alpha\right]e^0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} C = \dfrac{x_0}{\sin\alpha} \\ \tan\alpha = \dfrac{\omega_d}{\zeta\omega_n} \end{cases} \tag{8}$$



Betrakta en rätvinklig triangel med kateterna ω_d, $\zeta\omega_n$. Hypotenusan fås enligt Pythagoras:

$$\sqrt{\omega_d^{\ 2} + (\zeta\omega_n)^2} = \sqrt{\omega_n^{\ 2}(1-\zeta^2) + (\zeta\omega_n)^2} = \omega_n$$

Geometrin ger $\cos\alpha = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Ekv (8) ger $C = \dfrac{2}{\sqrt{3}}x_0$

Insättning i (6) ger då resultatet

$$\underline{\underline{x = \frac{2}{\sqrt{3}}x_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}t} \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{4m}}t + \frac{\pi}{3}\right)}}$$