LEDNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 13

LP 13.1 Systemets masscentrum G ligger hela tiden vid axeln. Kraftekvationen för hela systemet:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \quad \Rightarrow \quad P = (M + 2m)\ddot{x}_G$$

LP 13.2 Använd definitionen av kinetisk energi. Varje kula har en cirkelrörelse.

$$\boxed{T = \sum \frac{1}{2} m_k {v_k}^2} \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m(c\omega)^2 + \frac{1}{2} m\left(b^2 + c^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2} m\left(b^2 + c^2\right)\omega^2$$

LP 13.3 Lagen om kinetiska energins två delar kan användas. Sambandet $v = R\omega$ är givet.

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m {v_G}^2 + \sum \frac{1}{2} m_k {v_{k\mathrm{rel}}}^2} \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} 5mv^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} m(R\omega)^2 = \frac{9}{2} mv^2$$

LP 13.4 Den övre kulan har en fart $b\omega$ i masscentrumsystemet. Den absoluta hastigheten är vektorsumman av systemets hastighet och den relativa hastigheten $\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$.

Rörelsemängd definieras

$\mathbf{p} = \sum m_k \mathbf{v}_k$ men beräknas oftast enligt $\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}_G}$

$$\mathbf{p}_1 = m\left(v - b\omega\sin\theta,\, b\omega\cos\theta,\, 0\right)$$

$$\mathbf{p}_2 = m\left(v + b\omega\sin\theta,\, -b\omega\cos\theta,\, 0\right)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2 = m\left(2v,\, 0,\, 0\right) = 2mv\mathbf{e}_x$$

LP 13.5 Kinetiska energin beräknas antingen som

$$\boxed{T = T^{\text{vagn}} + T^{\text{kulor}}} \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m\left[(v - r\omega\sin\theta)^2 + (r\omega\cos\theta)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}m\left[(v + r\omega\sin\theta)^2 + (-r\omega\cos\theta)^2\right] = \frac{1}{2}(M + 2m)v^2 + mr^2\omega^2$$

eller med lagen om kinetiska energins två delar:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv_G{}^2 + \sum\frac{1}{2}m_k v_{k\text{rel}}{}^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}(M + 2m)v^2 + 2\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

LP 13.6 Teckna först kulornas koordinater och tidsderivera för att få hastigheten.

$$x_A = b\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_A = b\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y_B = -b\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_B \equiv v = b\dot{\theta}\sin\theta \qquad (1)$$

Kinetiska energin beräknas här med definitionen

$$\boxed{T = \sum\frac{1}{2}m_k v_k{}^2} \quad \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left(b\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(-b\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Sätt in sambandet (1):

$$T = 2\cdot\frac{1}{2}mb^2\left(\frac{v}{b\sin\theta}\right)^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{\tan^2\theta} + 1\right)v^2$$

LP 13.7 Rörelsemängdsmomentet för ett partikelsystem med avseende på origo definieras

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \sum\mathbf{r}_k \times m_k\mathbf{v}_k}$$

a)

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_O &= b\mathbf{e}_x \times mb\omega\mathbf{e}_y + \left(b\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_z\right)\times mb\omega\mathbf{e}_y \\ &= mb^2\omega\,\mathbf{e}_z + mb^2\omega\,\mathbf{e}_z - mb^2\omega\,\mathbf{e}_x \\ &= -mb^2\omega\,\mathbf{e}_x + 2mb^2\omega\,\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

b) $\mathbf{H}_A = b\mathbf{e}_z \times mb\omega\mathbf{e}_y = -mb^2\omega\mathbf{e}_x$

c) $H_z = \mathbf{H}_O\cdot\mathbf{e}_z = 2mb^2\omega$ eller $\mathbf{H}_z = 2mb^2\omega\mathbf{e}_z$

LP 13.8 Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ projicerad i

tangentialriktningen: $3mc\ddot{\theta} = R_t - 3mg\sin\theta$

normalriktningen: $3mc\dot{\theta}^2 = R_n - 3mg\cos\theta$

LP 13.9 a) I masscentrumsystemet syns bara rotationen

$$\mathbf{v}_{A\mathrm{rel}} = R\omega\,\mathbf{e}_\theta = R\omega\cos\theta\mathbf{e}_x - R\omega\sin\theta\mathbf{e}_y$$

b) Den absoluta hastigheten är $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{A\mathrm{rel}}$

$$\mathbf{v}_A = (v + R\omega\cos\theta)\mathbf{e}_x - R\omega\sin\theta\mathbf{e}_y$$

LP 13.10 Om vagnens förflyttning är x åt höger blir lådans förflyttning x åt vänster. Trådkraften S på lådan gör lika stort arbete som trådkraften S på vagnen. Det totala arbetet blir därför noll.

Lagen om kinetiska energin $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

$$Px - \mu mgx - \mu mgx = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(P - 2\mu mg)x}{M + m}}$$

Resultatet blir detsamma som när man räknar friktionskraftens arbete vid den relativa förflyttningen $2x$.

LP 13.11 Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ för hela systemet:

$$\uparrow: \quad P + 2N - 2mg = 2m \cdot 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = mg - \frac{P}{2}$$

Lagen om kinetiska energin $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:
Kraften P är konstant.

$$P \cdot (b\sin\theta - b\sin\beta) = 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{Pb}{m}(\sin\theta - \sin\beta)}$$

LP 13.12 Om stora lådans förflyttning neråt är x blir lilla lådans förflyttning $2x$. Trådkraften $2S$ på stora lådan gör då lika stort arbete som trådkraften S på lilla vagnen. Det totala arbetet blir noll.

Lagen om kinetiska energin $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

$$kmg \cdot x \sin\beta + mg \cdot 2x \sin\beta = \frac{1}{2}km\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(2\dot{x})^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(k+2)gx\sin\beta}{k+4}}$$

Observera att för $k \to \infty$ (lilla lådan finns ej) blir $\dot{x} = \sqrt{2gx\sin\beta}$

LP 13.13 Kropparna har lika stor förflyttning och avvikelsen från utgångsläget kallas x. Trådkraften S är lika i hela tråden. S på den ena kroppen gör då lika stort arbete men med annat tecken som trådkraften S på den andra. Det totala trådkraftarbetet blir därför noll. Den mekaniska energin bevaras eftersom de enda krafter som gör arbete (fjäderkraften och tyngdkraften) är konservativa.

$\boxed{T + V = T_0 + V_0}$ för hela systemet:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}pm\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg\sin\beta - pmgx = 0 + 0$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = \sqrt{\frac{1}{1+p}\left[2g(p - \sin\beta)x - \frac{k}{m}x^2\right]}$$

LP 13.14 Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ projicerad i

tangentialriktningen: $3mc\ddot{\theta} = R_t - 3mg\sin\theta$ (1)

normalriktningen: $3mc\dot{\theta}^2 = R_n - 3mg\cos\theta$ (2)

Nu måste $\ddot{\theta}$ och $\dot{\theta}^2$ bestämmas på annat sätt!

Momentekvationen $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$ ger

$$-3mgc\sin\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mc^2\dot{\theta} + 2m\left(b^2 + c^2\right)\dot{\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad -3mgc\sin\theta = m\left(2b^2 + 3c^2\right)\ddot{\theta} \qquad (3)$$

Lagen om mekaniska energins bevarande $\boxed{T + V = T_0 + V_0}$:

$$\frac{1}{2}mc^2\dot{\theta}^2 + 2\cdot\frac{1}{2}m\left(b^2 + c^2\right)\dot{\theta}^2 - 3mgc\cos\theta = 0 + 0$$

$$\Rightarrow \qquad m\left(2b^2 + 3c^2\right)\dot{\theta}^2 = 6mgc\cos\theta \qquad (4)$$

Sätt in (3) och (4) i (1) och (2)!

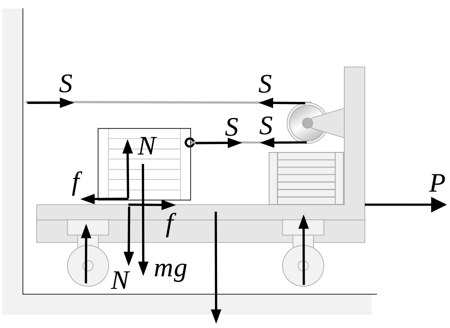
$$R_t = \frac{6b^2}{2b^2 + 3c^2}mg\sin\theta; \qquad R_n = \frac{2b^2 + 9c^2}{2b^2 + 3c^2}\cdot 3mg\sin\theta$$

LP 13.15 Om vagnens förflyttning åt höger är x blir lådans förflyttning $2x$ åt samma håll. avvikelsen från utgångsläget kallas x. Trådkraften S på lådan gör då lika stort arbete men med motsatt tecken som trådkraften $2S$ på vagnen. Det totala trådkraftarbetet blir därför noll. Friktionskraften mellan lådan och vagnen är vid glidning $f = \mu N = \mu mg$

Lagen om kinetiska energin $\boxed{U = T - T_0}$ för hela systemet:

$$Px + \mu mg\cdot x - \mu mg\cdot 2x = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(2\dot{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = \sqrt{\frac{2\left(P - \mu mg\right)x}{M + 4m}}$$



Eftersom lådans relativa förflyttning är x blir resultatet

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2\left(P - \mu mg\right)d}{M + 4m}}$$

LP 13.16 Om alla förluster försummas är det bara tyngdkraften som gör arbete. Systemet är konservativt och den mekaniska energin bevaras:

$\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0}$ för hela systemet:

Låt den potentiella energin vara noll i slutläget 1.

$$\frac{1}{2} m v_1^{\ 2} + 0 = \frac{1}{2} m v_0^{\ 2} + mg \cdot y_G$$

Tågets masscentrum beräknas som masscentrum för en kurvbåge. Masscentrum för en kurvbåge motsvarande en vinkel 2β är

$$y_G = \frac{\sin \beta}{\beta} R.$$

Här är $R \cdot 2\beta = l \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{l}{2R}$

Insättning ger $v_1 = \sqrt{v_0^{\ 2} + 4g \frac{R^2}{l} \sin\left(\frac{l}{2R}\right)}$

LP 13.17 Kropparna rör sig friktionsfritt. Det finns då ingen yttre horisontell kraft på hela systemet. Kraftekvationen säger då att systemets rörelsemängd är en rörelsekonstant.
Kraftekvationen

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_x = m\ddot{x}_G} \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = m\ddot{x}_G} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\dot{x}_G = \text{konstant}} \Rightarrow$$

$$\rightarrow: \quad -pmv_0 + mv_0 = -(1+p) m v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{p-1}{p+1} v_0 \qquad (1)$$

Här har antagits att v_1 är masscentrums hastighet åt vänster då fjäderförkortningen är maximal.

Eftersom fjäderkraften är den enda kraft som gör arbete bevaras också den mekaniska energin

$\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0}$ för hela systemet:

$$\frac{1}{2} m v_0^{\ 2} + \frac{1}{2} p m v_0^{\ 2} = 2 \cdot \frac{1}{2} k \delta^2 + \frac{1}{2} (p+1) m v_1^{\ 2} \qquad \Rightarrow$$

$$(1+p) m v_0^{\ 2} = 2k\delta^2 + (p+1) m v_1^{\ 2} \qquad (2)$$

Insättning av (1) i (2)! $\quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{2pm}{(p+1)k}}\, v_0$

LP 13.18 Begynnelsevillkoret är $t=0$ $\begin{cases} x=0 \\ \dot{x}=0 \end{cases}$

Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F}=m\mathbf{a}_G}$ ger om trådkraften kallas S

för massan m: $\rightarrow$: $S-kx=m\ddot{x}$

för massan M: $\downarrow$: $Mg-S=M\ddot{x}$

Adderas dessa två ekvationer elimineras den inre kraften S. Resultatet är en svängningsekvation:

$$Mg-kx=(M+m)\ddot{x}$$

som kan skrivas på standardformen

$$\ddot{x}+\frac{k}{M+m}x=\frac{Mg}{M+m}$$

eller $$\ddot{x}+\omega_n{}^2x=\frac{Mg}{M+m}$$

Den allmänna lösningen är

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t+\frac{Mg}{k}$$
$$\dot{x}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t$$

Begynnelsevillkoret ger

$$0=A\cos 0+B\sin 0+\frac{Mg}{k} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{Mg}{k}$$
$$0=-A\omega\sin 0+B\omega\cos 0 \quad \Rightarrow \quad B=0$$

Lösningen är alltså $$x=\frac{Mg}{k}(1-\cos\omega t)$$

LP 13.19 Kulan A har en cirkelrörelse. Farten kan då skrivas radien gånger vinkelhastigheten: $v_A = \sqrt{b^2+c^2}\cdot\dot{\theta}$. Bestäm alltså $\dot{\theta}$ som funktion av tiden!
Momentekvationen med avseende på den fixa punkten O $\boxed{\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O}$ kan projiceras på z-axeln $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$, vilket ger

$$M_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mc^2\dot{\theta} + 2\cdot m\left(b^2+c^2\right)\dot{\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \quad M_1 = m\left(2b^2+3c^2\right)\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{M_1}{m\left(2b^2+3c^2\right)}$$

$\ddot{\theta}$ är alltså konstant och tidsintegrering ger $\dot{\theta} = \dfrac{M_1 t}{m\left(2b^2+3c^2\right)}$

$$\Rightarrow \quad v_A = \frac{\sqrt{b^2+c^2}\;M_1 t}{m\left(2b^2+3c^2\right)}$$

Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ projicerad i

tangentialriktningen: $R_t = 3mc\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad R_t = \dfrac{3cM_1}{m\left(2b^2+3c^2\right)}$

normalriktningen: $R_n = 3mc\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad R_n = \dfrac{3cM_1^{\,2}t^2}{m\left(2b^2+3c^2\right)^2}$

LP 13.20 Krafterna på systemet är tyngdkraft $5mg$, normalkraft N och friktionskraft f.

Kraftekvationen $\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G}$ i rörelseriktningen:

$$5mg\sin\beta - f = 5m\ddot{x}_G \quad \Rightarrow \qquad (1)$$

Momentekvationen $\boxed{\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G}$
med avseende på en horisontell axel genom G $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$ ger

$$f\cdot R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(4R\cdot mR\dot{\theta}\right) \text{ eller } \quad f = 4mR\ddot{\theta} \qquad (2)$$

Eliminera friktionskraften f addera ekvationerna (1) och (2).
Rullningsvillkoret är givet i texten: $\dot{x} = R\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = R\ddot{\theta}$ (3)

Insättning av (2) och (3) i (1) ger $\ddot{x}_G = \dfrac{5}{9}g\sin\beta$

LP 13.21 Vagnarna rör sig friktionsfritt. Det finns då ingen yttre horisontell kraft på hela systemet. Kraftekvationen säger då att systemets rörelsemängd är en rörelsekonstant.
Kraftekvationen

$$\boxed{\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_x = \dot{p}_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = \dot{p}_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_x = \text{rörelsekonstant}}$$

Antag att den vänstra vagnens nya hastighet är v_1 åt höger och den högra vagnens nya hastighet är v_2 åt vänster.

Rörelsemängden är hela tiden densamma:

$$\rightarrow: \quad (2m + M)v_0 - (M + m)v_0 = (M + m)v_1 + mv - (M + m)v_0 \quad \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{1}{M + m}\left[(M + 2m)v_0 - mv\right] \qquad (1)$$

$$\rightarrow: \quad (2m + M)v_0 - (M + m)v_0 = (M + m)v_1 - (M + 2m)v_2$$

Om (1) sätts in i denna ekvation fås

$$v_2 = \frac{1}{M + 2m}\left[(M + m)v_0 - mv\right]$$

Om massorna är lika : $M = m$ fås $v_1 = \frac{1}{2}\left[3v_0 - v\right]$; $v_2 = \frac{1}{3}\left[2v_0 - v\right]$

Den nya relativa farten för vagnarna blir då

$$v_{\text{rel}} = v_1 + v_2 = \frac{13v_0 - 5v}{6}$$

LP 13.22 Det finns inget yttre kraftmoment med avseende på en vertikal axel genom den fixa punkten O som verkar på hela systemet.

Momentekvationen $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$ för hela systemet

$0 = \dot{H}_z \quad \Rightarrow \quad H_z$ är en rörelsekonstant:

$$m(l\sin\beta)^2\omega_0 + km(l\sin\beta)^2\omega_0 = km(2l\sin\beta)^2\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{1+k}{4k}\omega_0$$

b) Friktionskrafter saknas. Normalkrafterna på partikel och rör gör tillsammans inget arbete. Endast tyngdkraften gör arbete och den mekaniska energin bevaras.

$\boxed{T_0 + V_0 = T_1 + V_1}$ för hela systemet ger om u är den relativa hastigheten.

$$\frac{1}{2}m(l\sin\beta\omega_0)^2 + \frac{1}{2}km(l\sin\beta\omega_0)^2 + 0$$
$$= \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}km\left[u^2 + (2l\sin\beta\omega_1)^2\right] + mgl\cos\beta - kmgl\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad u = \sqrt{(l\sin\beta\omega_0)^2\left[1 - \frac{9k}{16(k+1)}\right] + \frac{2(k-1)}{k+1}gl\cos\beta}$$

LP 13.23 Kulorna har farten $b\dot{\theta}$ och tyngden har samma fart $r\dot{\theta}$ som cirkelskivans periferi. Rörelsemängdsmomentet för tyngden bestäms som hävarm gånger rörelsemängd. Momentekvationen för hela systemet med avseende på rotationsaxeln: $\boxed{M_z = \dot{H}_z}$

$$mgr = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2mb^2\dot{\theta} + r \cdot mr\dot{\theta}\right) \quad \Rightarrow$$
$$mgr = m(2b^2 + r^2)\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{gr}{2b^2 + r^2}$$

Alternativt utnyttjas lagen om mekaniska energin. Tyngden sjunker sträckan $r\theta$ och masscentrum för kulorna ändrar ej nivå.

Lagen om mekaniska energins bevarande $\boxed{T + V = T_0 + V_0}$ för hela systemet

$$2 \cdot \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 - mgr\theta = 0 + 0$$

Tidsderivering ger $2mb^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = mgr\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \dfrac{gr}{2b^2 + r^2}$

LP 13.24 Trådkraft S, normalkraft N, friktionskraft f och tyngdkraft mg verkar på kroppen på planet. Den hängande kroppen påverkas av trådkraft S och tyngdkraft Mg. De båda trådkrafterna gör lika stort arbete så att det totala trådkraftarbetet blir noll. Friktionskraften är vid glidning $f = \mu N = \mu mg$. Tyngdkraftens och friktionskraftens arbete bestäms som kraft gånger väg medan fjäderkraftens arbete måste bestämmas med integrering eftersom fjäderkraften ej är konstant.

Lagen om kinetiska energin $\boxed{U = T - T_0}$
för hela systemet:

$$Mgx - \mu mgx - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - 0$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = \sqrt{\frac{1}{M+m}\left(2Mgx - 2\mu mgx - kx^2\right)}$$

LP 13.25 Friktionskrafter saknas. Det totala trådkraftarbetet blir noll eftersom tråden är oelastisk. Normalkraften på kropp A gör inget arbete. Endast tyngdkraften gör arbete och den mekaniska energin bevaras.
Lagen om mekaniska energins bevarande

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0}$$

för hela systemet ger för de två tillstånd då farten är noll

$$0 + m_A gR(1 - \cos\beta) + 0 = 0 + 0 + m_B g\left[R\sqrt{2} - 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{\sqrt{2}\left(1 - \cos\dfrac{\beta}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2}\right)}{1 - \cos\beta}$$

LP 13.26 Till en början är förflyttningarna för kropparna lika. Trådkraften S är densamma i hela den övre tråden. Trådkrafternas totala arbete är då noll. Samma resonemang gäller den korta tråden. Tyngdkraften är den enda kraft som gör arbete för den första fasen av rörelsen och systemet är konservativt.

Lagen om mekaniska energins bevarande

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0}$$

för hela systemet ger för begynnelsetillståndet och tillståndet strax innan den undre vikten stöter mot golvet

$$\frac{1}{2}mv_1^{\,2} + \frac{1}{2}mv_1^{\,2} + \frac{1}{2}kmv_1^{\,2} + kmgh - 2mgh = 0 + 0$$

$$\Rightarrow \qquad v_1^{\,2} = \frac{4-2k}{2+k}gh$$

Nu är den undre vikten i vila och har förlorat energi vid stöten mot golvet. Efter stöten gäller dock lagen om mekaniska energins bevarande för resten av systemet. Låt v_2 vara farten just innan vikterna nuddar varandra.

$$\frac{1}{2}mv_2^{\,2} + \frac{1}{2}kmv_2^{\,2} + kmgl - mgl = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} + \frac{1}{2}kmv_1^{\,2} + 0$$

$$\Rightarrow \qquad v_2^{\,2} = \frac{2(1-k)}{1+k}gl + \frac{(1+k)(4-2k)}{(1+k)(2+k)}gh$$

Villkoret $v_2 = 0$ ger då $\qquad l = \dfrac{(1+k)(k-2)}{(1-k)(2+k)}h$