LEDNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 14

LP 14.1 Kroppen har en rotationshastighet. Kulan P beskriver en cirkelrörelse. För ren rotation gäller

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_P = 5b\omega\mathbf{e}_t$$

Eftersom $\boldsymbol{\omega}$ och $\mathbf{r}_{OP}$ är vinkelräta bestäms storleken av kryssprodukten med ”belopp gånger belopp”. Riktningen bestäms av högerregeln.

Accelerationen ges av $\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP})}$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{a}_P = 5b\dot{\omega}\mathbf{e}_t + 5b\omega^2\mathbf{e}_n = 5b\alpha\mathbf{e}_t + 5b\omega^2\mathbf{e}_n$$

Den första kryssprodukten bestäms på samma sätt som för hastigheten. Den dubbla kryssprodukten bestäms i två steg: först parentesen och sedan hela uttrycket.

LP 14.2 Kroppen har en ren rotationshastighet. Punkten P beskriver en cirkelrörelse. För ren rotation gäller

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_P = R\omega\mathbf{e}_t$$

där vinkelfarten fortfarande är okänd.

Accelerationen, som är känd, ges av $\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP})}$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{a}_P = R\alpha\,\mathbf{e}_t + R\omega^2\mathbf{e}_n = (1.5\,\mathbf{e}_t + 4\,\mathbf{e}_n)\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\Rightarrow \qquad R\alpha = 1.5\,\mathrm{m/s^2}; \quad R\omega^2 = 4\ \mathrm{m/s^2}$$

Eftersom $R = 0.250\,\mathrm{m}$ fås resultatet $\alpha = 6\ \mathrm{rad/s^2}$; $\omega = 4\ \mathrm{rad/s}$

LP 14.3 Punkten P har en acceleration som ges av

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OP})}$$

Vi måste alltså ur det givna i princip bestämma vinkelaccelerationen $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ och vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$. En punkt på den lilla remskivans periferi måste ha farten v_B. Vi får då skivans vinkelhastighet ur

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \quad \Rightarrow v_B = r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_B}{r} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2}{0.1}\ \text{rad/s} = 20\ \text{rad/s}$$

Accelerationen för en punkt på den stora skivans periferi ges av

$$\boxed{\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a} = R\dot{\omega}\mathbf{e}_t + R\omega^2\mathbf{e}_n$$

Accelerationen i tangentialriktningen är den givna a_A. Det betyder

$$R\dot{\omega} = a_A \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\omega} = \frac{a_A}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{34}{0.33}\ \text{rad/s}^2$$

Resultatet blir

$$\mathbf{a}_P = \frac{R}{2} \cdot \frac{a_A}{R}\mathbf{e}_t + \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{v_B}{r}\right)^2 \mathbf{e}_n = \frac{a_A}{2}\mathbf{e}_t + \frac{R}{2r^2} {v_B}^2 \mathbf{e}_n = (17\mathbf{e}_t + 66\mathbf{e}_n)\text{m/s}^2$$

LP 14.4 Alla tre kropparna har ren rotationsrörelse. En punkt på en av de oelastiska remmarna har samma fart som alla andra punkter på remmen. En punkt på periferin av en remskiva måste ha samma fart som remmens fart. Detta leder till ekvationerna

$$3r\omega_A = r\omega_B \qquad \Rightarrow \qquad \omega_B = 3\omega_A$$
$$2r\omega_C = 4r\omega_B \qquad \Rightarrow \qquad \omega_C = 6\omega_A$$

LP 14.5 Punkten P har en acceleration som allmänt kan skrivas $\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P)$, där lägevektorn börjar i centrum av skiva C. Med naturliga basvektorer blir det

$$\mathbf{a}_P = 2r\alpha_C \mathbf{e}_t + 2r\omega_C{}^2 \mathbf{e}_n \qquad (1)$$

Bestäm alltså först α_C och ω_C! Varje del av en rem har lika stor fart men inte lika hastighet. Varje del av en rem har också lika stor fartökning per tid, dvs acceleration i hastighetsriktningen. Den vänstra remmens fart kan skrivas antingen som periferihastigheten för skivan A eller periferihastigheten för B. Motsvarande gäller också för den andra remmen. Låt ω vara vinkelhastigheten för A.

$$\begin{cases} r\omega = 2r\omega_B \\ r\omega_B = 2r\omega_C \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \omega_C = \frac{1}{4}\omega \quad \Rightarrow \quad \omega_C = \frac{1}{4}\alpha t$$

b) Tidsderivering ger $\alpha_C = \dfrac{1}{4}\alpha$. Insättning i (1) ger

$$\mathbf{a}_P = 2r\frac{\alpha}{4}\mathbf{e}_t + 2r\left(\frac{\alpha t}{4}\right)^2 \mathbf{e}_n$$

Storleken blir då $a_P = \sqrt{\left(\dfrac{r\alpha}{2}\right)^2 + 4r^2\left(\dfrac{\alpha^4 t^4}{4^4}\right)^2} = \dfrac{r\alpha}{2}\sqrt{1 + \dfrac{\alpha^2 t^4}{16}}$

LP 14.6 Stången OP har en rotationshastighet. Ändpunkten A har en cirkelrörelse. Hastigheten kan skrivas $\mathbf{v}_A = b\omega \mathbf{e}_\theta$. Hastighetskomponenten i x-riktningen kan skrivas $(\mathbf{v}_A)_x = b\omega \sin\theta$ och är densamma som hastigheten för stången BC.

Accelerationen för A är

$$\mathbf{a}_A = b\alpha \mathbf{e}_\theta - b\omega^2 \mathbf{e}_r$$

Stången BC får då en acceleration i x-riktningen som är

$$(\mathbf{a}_A)_x = b\alpha \sin\theta + b\omega^2 \cos\theta$$

Alternativt tecknas koordinaten för A. Två tidsderiveringar ger resultatet

LP 14.13 I vissa fall kan det vara enklast att ställa upp koordinaten för punkten i fråga och tidsderivera för att få hastigheten.

$$y_B = b\sin\theta + \sqrt{c^2 - b^2\sin^2\theta} \qquad \Rightarrow$$

$$\dot{y}_B = -b\sin\theta\dot{\theta} + \frac{1}{2}\left(c^2 - b^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-b^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\dot{y}_B = -b\omega\left(1 + \frac{b\cos\theta}{\sqrt{c^2 - b^2\sin^2\theta}}\right)\sin\theta$$

LP 14.15 Antag att bakhjulet har vinkelhastigheten ω och kedjekransen eller pedalarmen vinkelhastigheten Ω. Centrumpunkten på hjulet har hastigheten v. Den punkt på hjulet som råkar vara i kontakt med vägen har hastigheten noll och är momentancentrum. Detta kan utnyttjas för att bestämma vinkelhastigheten:

$$v = R\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

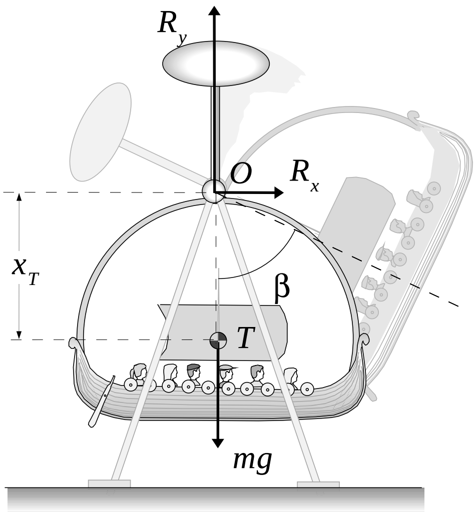
Varje länk på kedjan har samma hastighet i kedjans riktning. Om kuggkransen och kedjekransen har radien r_1 respektive r_2 gäller alltså att periferihastigheterna måste vara lika:

$$r_1\omega = r_2\Omega$$

Kuggkransen har ju samma vinkelhastighet som bakhjulet.
Men antalet kuggar är proportionellt mot omkretsen, dvs radien.

$$\Omega = \frac{r_1\omega}{r_2} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega = \frac{N_1\omega}{N_2} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega = \frac{N_1 v}{N_2 R}$$

LP 14.21-14.22



Det handlar om en stel kropps rotation kring en fix axel O. Masscentrum T för hela kroppen ligger på avståndet x_T under O. Masscentrums läge bestäms som för en sammansatt kropp:

$$x_T = \frac{m_1 b - m_2 c}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

De enda krafter som påverkar systemet är tyngdkraften och reaktionskraften i upphängningspunkten O.

Momentekvationen är med avseende på rotationsaxeln z

$$M_z = \dot{H}_z \qquad \text{eller} \qquad M_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_O\dot{\theta}\right) \tag{2}$$

I det nedersta läget ger inte tyngdkraften något kraftmoment så att vinkel-accelerationen är där $\ddot{\theta} = 0$. Detta utnyttjas i

kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ som i komponentform för det nedersta läget blir

$$\rightarrow: \qquad \underline{\underline{R_x = 0}} \tag{3}$$

$$\uparrow: \qquad R_y - mg = m x_T \omega^2 \tag{4}$$

Masscentrum T har ju i detta läge bara en vertikal (centripetal-)acceleration.

$$R_y = m\left(g + x_T\omega^2\right)$$

$$\underline{\underline{R_y = \left(m_1 + m_2\right)g + \left(m_1 b - m_2 c\right)\omega^2}}$$

Lagen om den mekaniska energins bevarande

$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \tag{5}$$

ger nu om index 1 står för vändläget och 0 för det nedersta läget

$$0 - mgx_T\cos\beta = \frac{1}{2}m_2c^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_1{k_0}^2\omega^2 - mgx_T \tag{6}$$

$$\cos\beta = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_2c^2 - m_1{k_0}^2}{mgx_T}\right)\omega^2 \tag{7}$$

Ekv (1) ger

$$\underline{\underline{\cos\beta = 1 - \frac{m_2c^2 + m_1{k_0}^2}{2g\left(m_1 b - m_2 c\right)}\omega^2}}$$

LP 14.25 De yttre krafterna på rullen är trådkraften S, tyngdkraften mg samt en reaktionskraft vid axeln. Dessutom verkar friktionen vid axeln som motsvaras av kraftparsmomentet M_1. På den hängande kroppen verkar trådkraften S och tyngdkraften $m_1 g$.

Momentekvationen för trådrullen med avseende på centrum O, som är en fix punkt

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O} \quad \Rightarrow \quad \circlearrowleft O \ : \quad Sr - M_1 = I_G \cdot \ddot{\theta} \tag{1}$$

Kraftekvationen för den hängande kroppen

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_\mathbf{G}} \quad \Rightarrow \quad \downarrow \ : \quad m_1 g - S = m_1 \ddot{x} \tag{2}$$

De obekanta är S, $\ddot{x}$ och $\ddot{\theta}$. Vi behöver alltså en till ekvation. Den ges av kinematiken och motsvaras av rullningsvillkoret. Den hängande kroppens hastighet måste vara densamma som hastigheten i den punkt på rullen där tråden löper ut.

$$\dot{x} = r\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta} \tag{3}$$

Dividera ekv (1) med r och addera sedan ekv (1) och (2)! Inför också det givna tröghetsmomentet $I_G = md^2$!

$$\Rightarrow \quad m_1 g - \frac{M_1}{r} = \frac{md^2}{r}\ddot{\theta} + m_1 \ddot{x} \tag{4}$$

Om rullningsvillkoret insättes fås

$$m_1 g - \frac{M_1}{r} = \left(\frac{md^2}{r^2} + m_1\right)\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{m_1 g r^2 - M_1 r}{m_1 r^2 + md^2}$$

Denna acceleration är konstant. Vi kan bestämma hastighet som funktion av fallsträcka på samma sätt som vi gör för fritt fall.

Det är naturligtvis också möjligt att skriva upp momentekvationen med avseende på den fixa axeln för hela systemet. Då blir trådkraften en inre kraft och den hängande kroppen bidrar till rörelsemängdsmomentet:

$$\circlearrowleft O \ : \quad m_1 g r - M_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_G \dot{\theta} + r m_1 \dot{x}\right)$$

Ekvationen överensstämmer med ekv (4)!

LP 14.25 alt

Alternativt och kanske hellre löses problemet med lagen om arbetet:

$$U = T_1 - T_0$$

$$mgh - M_1\theta_1 = \frac{1}{2}mv_1{}^2 + \frac{1}{2}m_1k^2\dot{\theta}_1{}^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 - \frac{1}{2}m_1k^2\dot{\theta}_0{}^2$$

Här är $h = 2r\theta_1$ och $v = 2r\dot{\theta}$.

LP 14.26

Tyngdkraften och trådkraften S verkar på kroppen. Kraftekvationen och momentekvationen ger

$$mg - S = m\ddot{x}_G \qquad (1)$$

$$S \cdot r = I\ddot{\theta} \qquad (2)$$

Kinematik (rullning) $\quad \dot{x}_G = r\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta} \qquad (3)$

Sätt in (2) och (3) i (1)!

$$mg - \frac{I}{r}\cdot\frac{\ddot{x}_G}{r} = m\ddot{x}_G$$

$$mg = \left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x}_G \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_G = \frac{g}{1 + \dfrac{I}{mr^2}}$$

Accelerationen konstant $\Rightarrow$ $\dot{x}_G = \sqrt{\dfrac{2g}{1 + \dfrac{I}{mr^2}}x_G}$

Jämför $\quad \dot{x} = \sqrt{2gx} \quad$ vid fritt fall

LP 14.27

Antag att kraften vid rotationsaxeln har komponenterna H och V. Vinkelaccelerationen är α. Momentekvationen och kraftekvationen ger

$$mgb\cos\theta = I\alpha \tag{1}$$

$$H = mb\alpha\sin\theta \tag{2}$$

$$-V + mg = mb\alpha\cos\theta \tag{3}$$

LP 14.28

I det första ögonblicket är (vinkel)hastigheten noll. Krafterna är tyngdkraften och normalkrafterna i ändpunkterna. Normalkrafterna har radiella riktningar och bidrar ej till momentet med avseende på centrumaxeln. Momentekvationen

$$M_z = \dot{H}_z \tag{1}$$

ger

$$mg\frac{b}{4} = I_O\ddot{\theta} \tag{2}$$

Tröghetsmomentet bestäms med Steiners sats:

$$I_O = I_G + m\left(\frac{b}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{mb^2}{12} + \frac{mb^2}{12} = \frac{mb^2}{6} \tag{3}$$

Insättning i ekv (2) ger

$$\ddot{\theta} = \frac{mgb}{4I_O} = \frac{6mgb}{4mb^2} = \frac{3g}{2b}$$

LP 14.32

Lagen om arbetet

$$U = T - T_0 \tag{1}$$

$$S \cdot b = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 - 0 \tag{2}$$

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2Sb}{m}} \tag{3}$$

LP 14.34

Momentekvationen

$$M_z = \dot{H}_z \tag{1}$$

Inget yttre kraftmoment M_z ger att H_z är en rörelsekonstant:

$$\left(m_1 d^2 + \frac{mb^2}{12} + mc^2 \right) \omega_0 = \left[m_1 d^2 + \frac{mb^2}{12} + m\left(c^2 + b^2\right) \right] \omega_1 \tag{2}$$

$$\omega_1 = \frac{m_1 d^2 + \dfrac{mb^2}{12} + mc^2}{m_1 d^2 + \dfrac{mb^2}{12} + m\left(c^2 + b^2\right)} \omega_0 \tag{3}$$

LP 14.35

Momentekvationen för hela systemet:

$$M_z = \dot{H}_z \tag{1}$$

Inget yttre kraftmoment M_z betyder att H_z är en rörelsekonstant:

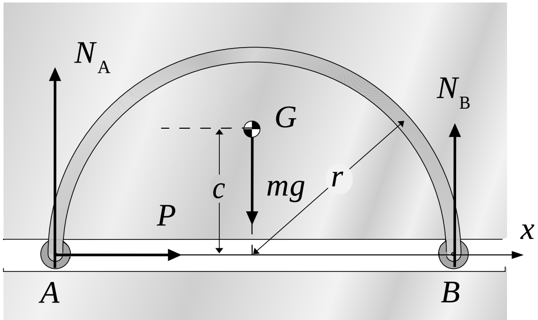
$$I\omega_0 = \left(I + m_1 R^2\right)\omega_1 \tag{2}$$

$$\left(I + m_1 R^2\right)\omega_1 + R m_2 v_2 = \left(I + m_1 R^2 + m_2 R^2\right)\omega_2 \tag{3}$$

$$\omega_1 = \frac{I}{I + m_1 R^2} \omega_0$$

$$\omega_2 = \frac{I\omega_0 + R m_2 v_2}{I + m_1 R^2 + m_2 R^2}$$

LP 14.37



Frilägg halvcirkelbågen! Verkande krafter är dragkraften P, tyngdkraften mg och normalkrafterna N_A och N_B. Accelerationen bestäms av kraftekvationen medan momentekvationen måste användas för att bestämma de två normalkrafterna.

Lägg en x-axel längs spåret med positiv riktning åt höger. Ställ upp komponenterna av kraftekvationen och momentekvationen:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \qquad \rightarrow : \quad P = m\ddot{x}_G \tag{1}$$

$$\uparrow : \quad N_A + N_B - mg = 0 \tag{2}$$

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad \circlearrowleft G : \quad r\cdot(N_B - N_A) + c\cdot P = I_G\ddot{\theta} \tag{3}$$

Ekv (1) ger direkt accelerationen

$$\underline{\underline{\ddot{x}_G = \frac{P}{m}}} \tag{4}$$

Vinkelaccelerationen $\ddot{\theta} = 0$. Ekvation (2) och (3) kan då skrivas

$$N_A + N_B = mg \tag{5}$$

$$N_A - N_B = \frac{c}{r}P \tag{6}$$

Vi vet masscentrums läge: $c = \dfrac{2r}{\pi}$. Addition av ekvationerna (5) och (6) ger

$$2N_A = mg + \frac{2}{\pi}P \tag{7}$$

Resultatet är alltså

$$\underline{\underline{N_B = \frac{mg}{2} - \frac{P}{\pi}}} \;;$$

$$\underline{\underline{N_A = \frac{mg}{2} + \frac{P}{\pi}}}$$

som visar att om $P = \dfrac{\pi}{2}mg$ så blir $N_B = 0$.