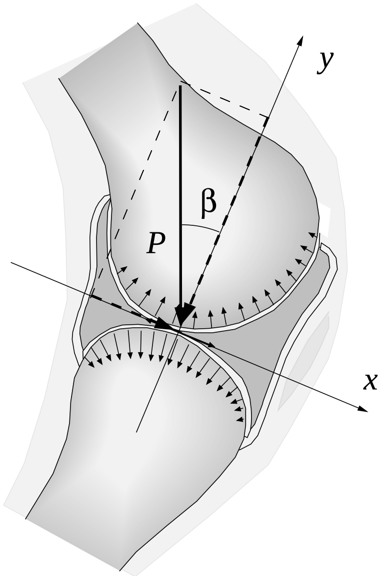
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 2

LP 2.1



Kraften har storleken P. Dess riktning relativt koordinataxlarna är också känd och given av vinkeln β. Kraftens x-komponent är då $P\sin\beta$, medan y-komponenten är $-P\cos\beta$. Vi kan skriva kraften på vektorform:

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{e}_x + P_y\mathbf{e}_y = P\sin\beta\,\mathbf{e}_x - P\cos\beta\,\mathbf{e}_y$$

eller komponentform

$$\mathbf{P} = \left(P_x,\, P_y,\, 0\right) = \left(P\sin\beta,\, -P\cos\beta,\, 0\right)$$

Men β är given: $\tan\beta = \dfrac{3}{4}$ $\quad\Rightarrow$

$$\sin\beta = \frac{3}{5} \quad \text{och} \quad \cos\beta = \frac{3}{5}$$

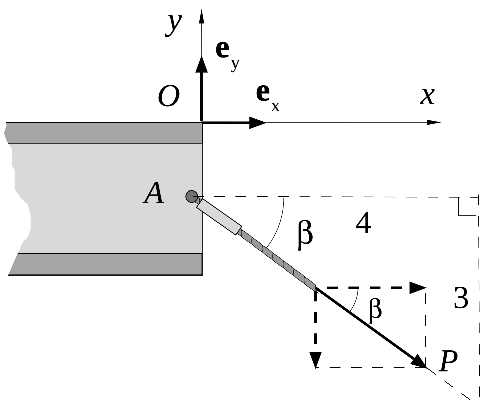
$$\Rightarrow \qquad \mathbf{P} = P\cdot\frac{3}{5}\mathbf{e}_x - P\cdot\frac{4}{5}\mathbf{e}_y$$

Storleken $P = 800$ N är också given:

$$F_x = P\sin\beta = 800\cdot\frac{3}{5}\text{ N} = \underline{\underline{480\text{ N}}}$$

$$F_y = -P\cos\beta = -800\cdot\frac{4}{5}\text{ N} = \underline{\underline{-640\text{ N}}}$$

LP 2.2



Kraften har storleken P. Dess riktning är också känd och given av vinkeln β. Kraftens x-komponent är då $P\cos\beta$, medan y-komponenten är $-P\sin\beta$. Vi kan skriva:

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{e}_x + P_y\mathbf{e}_y = P\cos\beta\,\mathbf{e}_x - P\sin\beta\,\mathbf{e}_y$$

eller

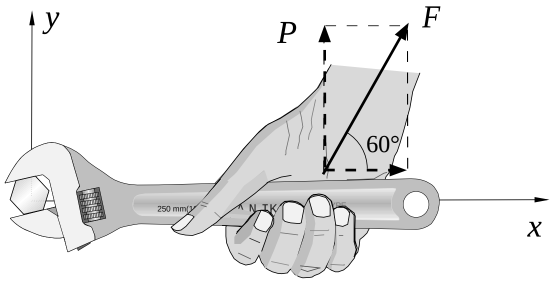
$$\mathbf{P} = \left(P_x,\, P_y,\, 0\right) = \left(P\cos\beta,\, -P\sin\beta,\, 0\right)$$

Men β är given $\qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{P} = P\cdot\dfrac{4}{5}\mathbf{e}_x - P\cdot\dfrac{3}{5}\mathbf{e}_y$

Storleken $P = 10$ kN är också given $\qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{P} = \left(\dfrac{40}{5}\mathbf{e}_x - \dfrac{30}{5}\mathbf{e}_y\right)$ kN

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{P} = \left(8\,\mathbf{e}_x - 6\,\mathbf{e}_y\right)\ \text{kN}}}$$

LP 2.3



Vi vet att y-komponenten av kraften **F** är P, alltså

$$P = F\sin 60° \;\Rightarrow\; F = \frac{P}{\sin 60°}$$

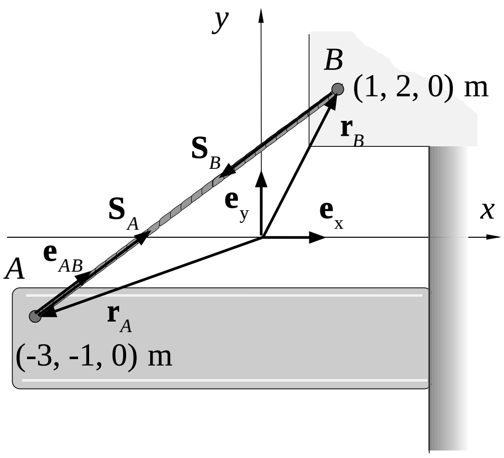
$$\Rightarrow\; \underline{\underline{F = \frac{2P}{\sqrt{3}}}}$$

x-komponenten av kraften **F** blir

$$F_x = F\cos 60° \;\Rightarrow\; F_x = F\cdot\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\; \underline{\underline{F_x = \frac{P}{\sqrt{3}}}}$$

LP 2.4



Vektorn mellan A och B är

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$

$$= (1,\,2,\,0)\text{ m} - (-3\,,-1,\,0)\text{ m} = (\;4\;,\,3,\,0)\text{ m}$$

Kraftens riktning ges av enhetsvektorn

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{16+9}}(\;4\;,\,3,\,0) = \frac{1}{5}(\;4\;,\,3,\,0)$$

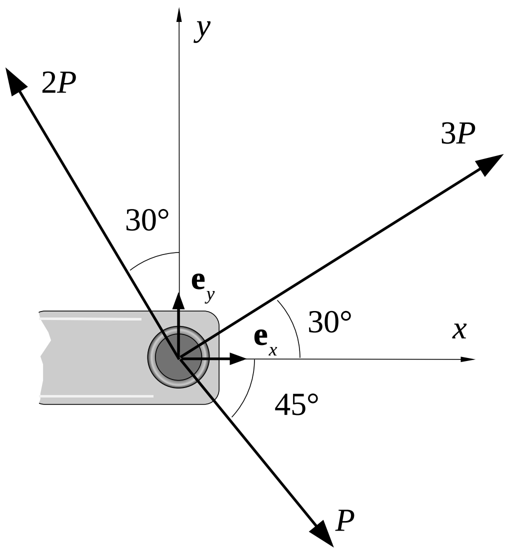
Kraften S i linan har storleken 50 N.

Kraften på respektive ögla är

$$\mathbf{S}_A = S\mathbf{e}_{AB} = \frac{50}{5}(\;4\;,\,3,\,0)\text{ N} = \underline{\underline{10(\;4\;,\,3,\,0)\text{ N}}}$$

$$\mathbf{S}_B = -S\mathbf{e}_{AB} = \underline{\underline{-10(\;4\;,\,3,\,0)\text{ N}}}$$

LP 2.5



Krafterna har samma angreppspunkt O.
De kan skrivas på vektorform

$$\mathbf{F}_1 = P\cos 45°\mathbf{e}_x - P\sin 45°\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{F}_2 = 3P\cos 30°\mathbf{e}_x + 3P\sin 30°\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{F}_3 = -2P\sin 30°\mathbf{e}_x + 2P\cos 30°\mathbf{e}_y$$

Detta kan också skrivas

$$\mathbf{F}_1 = P\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_x - P\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{F}_2 = 3P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x + 3P\cdot\frac{1}{2}\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{F}_3 = -2P\cdot\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + 2P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y$$

eller

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\sqrt{2}P}{2}\left(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y\right)$$
$$\mathbf{F}_2 = \frac{3P}{2}\left(\sqrt{3}\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\right)$$
$$\mathbf{F}_3 = P\left(-\mathbf{e}_x + \sqrt{3}\mathbf{e}_y\right)$$

Kraftsumman är

$$\mathbf{F} = \sum\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

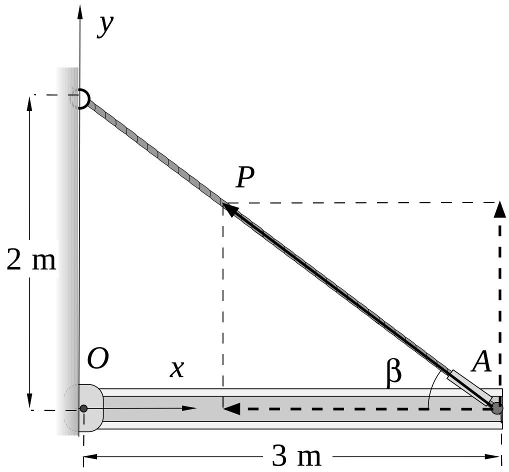
$$= \left(\frac{\sqrt{2}P}{2} + \frac{3\sqrt{3}P}{2} - P\right)\mathbf{e}_x + \left(-\frac{\sqrt{2}P}{2} + \frac{3P}{2} + \sqrt{3}P\right)\mathbf{e}_y$$

eller

$$\mathbf{F} = \frac{P}{2}\left(\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\right)\mathbf{e}_x + \left(-\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{3}\right)\mathbf{e}_y$$

Kraftresultanten är denna kraftsumma med angreppspunkt i origo. Den kan ersätta det givna kraftsystemet. *Kraftsumman* har ingen angreppspunkt!

LP 2.6



Trådens längd är enligt Pythagoras sats

$$\sqrt{2^2+3^2}\ \text{m} = \sqrt{13}\ \text{m}$$

Vinkeln β är bestämd:

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{och} \quad \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Kraftens komponenter blir då

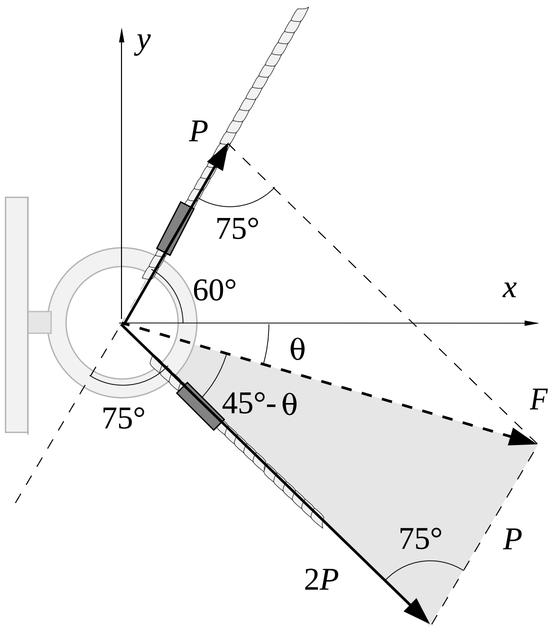
$$F_x = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_x = -P\cos\beta = -130\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\ \text{N}$$

$$F_y = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_y = P\sin\beta = 130\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\ \text{N}$$

$$\underline{\underline{F_x = -30\sqrt{13}\ \text{N}}}$$

$$\underline{\underline{F_y = 20\sqrt{13}\ \text{N}}}$$

LP 2.7



Kalla kraftresultantens storlek F. Vinkeln θ söks. Eftersom $\alpha+\beta=105^\circ$ kan vinkeln $75^\circ=180^\circ-105^\circ$ i figuren identifieras.

Betrakta den gråmarkerade krafttriangeln! Kraftresultantens storlek fås med cosinus-satsen:

$$F=\sqrt{P^2+(2P)^2-2P\cdot(2P)\cos 75^\circ}$$

$$\Rightarrow \qquad F=P\sqrt{5-4\cos 75^\circ}$$

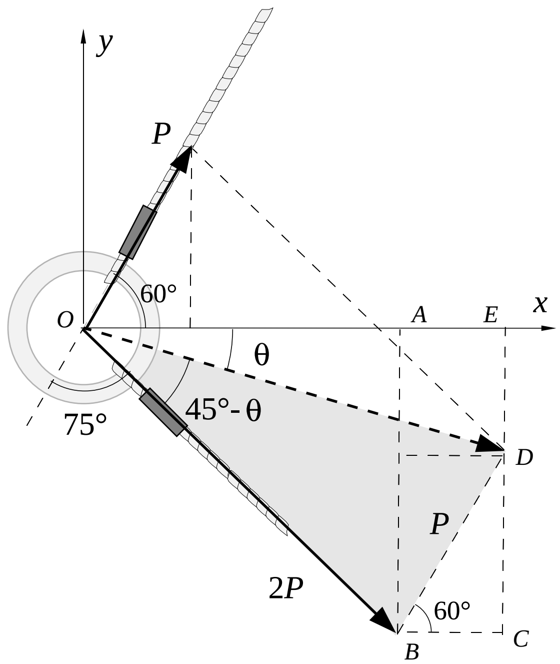
Vinkeln θ kan bestämmas med sinus-satsen:

$$\frac{\sin 75^\circ}{F}=\frac{\sin(45^\circ-\theta)}{P} \qquad \Rightarrow$$

$$\sin(45^\circ-\theta)=\frac{P\sin 75^\circ}{F} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \sin(45^\circ-\theta)=\frac{\sin 75^\circ}{\sqrt{5-4\cos 75^\circ}} \qquad \Rightarrow \qquad 45^\circ-\theta=\arcsin\frac{\sin 75^\circ}{\sqrt{5-4\cos 75^\circ}}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\theta=45^\circ-\arcsin\frac{\sin 75^\circ}{\sqrt{5-4\cos 75^\circ}}}}$$



Alternativt kan vinkeln θ kan bestämmas genom att bestämma längden av sidorna ED och OE i figuren.

AB har längden $\frac{2P}{\sqrt{2}}$

CD har längden $\frac{\sqrt{3}P}{2}$

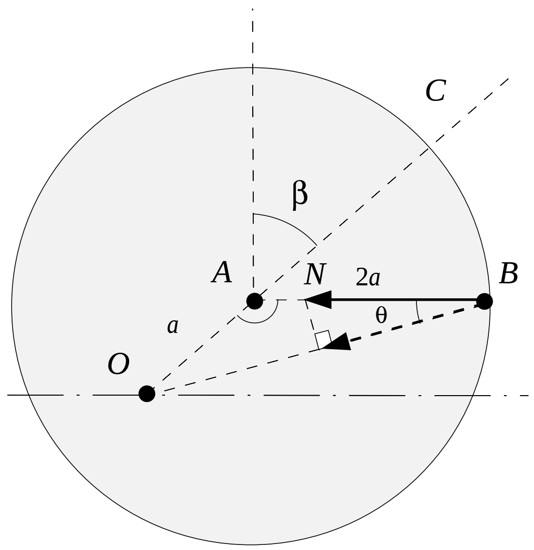
BC har längden $\frac{P}{2}$

$$\tan\theta=\frac{\frac{2P}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}P}{2}}{\frac{2P}{\sqrt{2}}+\frac{P}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\tan\theta=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+1}}}$$

LP 2.8



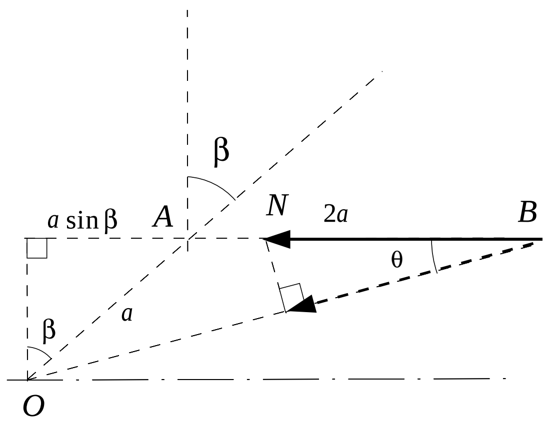
Projicera normalkraften N på linjen OB. Komponenten är $N\cos\theta$.

Vinkeln CAB är $\frac{\pi}{2}-\beta$.

Vinkeln OAB är $\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$.

Vinkeln θ kan bestämmas med sinussatsen. Man kan också direkt få cosinus för vinkeln med hjälp av den undre figuren

$$\cos\theta=\frac{2a+a\sin\beta}{\sqrt{(2a+a\sin\beta)^2+(a\cos\beta)^2}}$$



$\Rightarrow$

$$\cos\theta=\frac{2+\sin\beta}{\sqrt{4+\sin^2\beta+4\sin\beta+\cos^2\beta}}$$

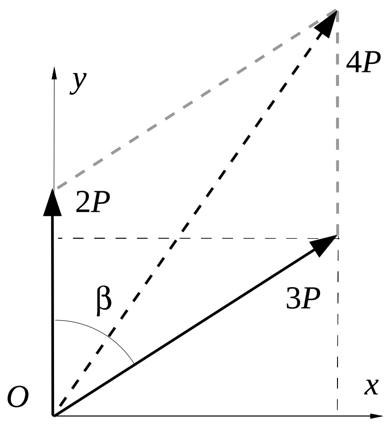
$$\Rightarrow \qquad \cos\theta=\frac{2+\sin\beta}{\sqrt{5+4\sin\beta}}$$

Kraftkomponenten blir alltså

$$N\cos\theta=\underline{\underline{\frac{2+\sin\beta}{\sqrt{5+4\sin\beta}}N}}$$

Observera att här är N den givna kraften. Det är alltså inte enheten newton som avses.

LP 2.9



Krafterna kan förskjutas längs sina verkningslinjer så att båda angriper i samma punkt O, som är öglans centrum. Krafter som har samma angreppspunkt får vektoradderas till en kraftresultant.

Inför ett koordinatsystem $Oxyz$ enligt figuren!
Kraftresultanten angriper i O och är

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = (0,\, 2P,\, 0) + (3P\sin\beta,\, 3P\cos\beta,\, 0)$$
$$= (3P\sin\beta,\, 2P + 3P\cos\beta,\, 0)$$

Kraftresultantens storlek är $|\mathbf{F}| = F = \sqrt{(3P\sin\beta)^2 + (2P + 3P\cos\beta)^2}$

Denna storlek skall enligt text vara $4P$

vilket ger ekvationen $\sqrt{(3P\sin\beta)^2 + (2P + 3P\cos\beta)^2} = 4P$

kvadrera! $\Rightarrow$ $(3P\sin\beta)^2 + (2P + 3P\cos\beta)^2 = 16P^2$

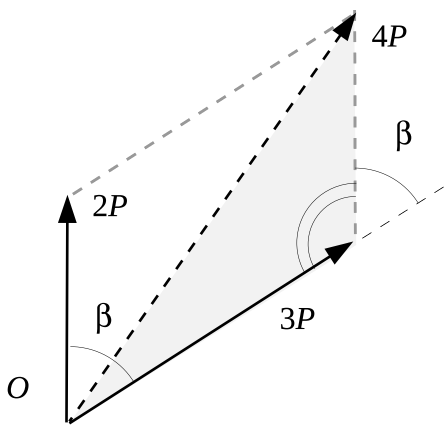
dividera med P ! $\Rightarrow$ $9\sin^2\beta + 4 + 9\cos^2\beta + 12\cos\beta = 16$

$\Rightarrow$ $9(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + 12\cos\beta = 12$

trigonometriska ettan $\Rightarrow$ $9 + 12\cos\beta = 12 \Rightarrow 12\cos\beta = 3$

$\Rightarrow$ $\cos\beta = \dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\beta = \arccos\dfrac{1}{4}}}$

Alternativ lösning:



Vi känner tre sidor i en kraft-triangel. Vinkeln β kan då bestämmas med cosinus-satsen:

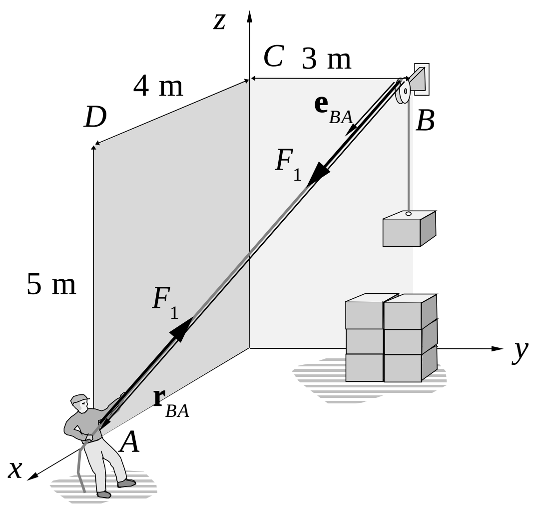
$$(4P)^2 = (3P)^2 + (2P)^2 - 2 \cdot 3P \cdot 2P\cos(\pi - \beta)$$

$\Rightarrow$ $16 = 9 + 4 - 12\cos(\pi - \beta)$

$\Rightarrow$ $3 = 12\cos\beta$

$\Rightarrow$ $\cos\beta = \dfrac{1}{4}$

LP 2.10



Vektorn mellan B och A är

$$\mathbf{r}_{BA} = (\ 4\ ,-3,-5)\ \text{m}$$

Den kan enklast i figuren ses som summan

$$\mathbf{r}_{BC} + \mathbf{r}_{CD} + \mathbf{r}_{DA} = \mathbf{r}_{BA}$$

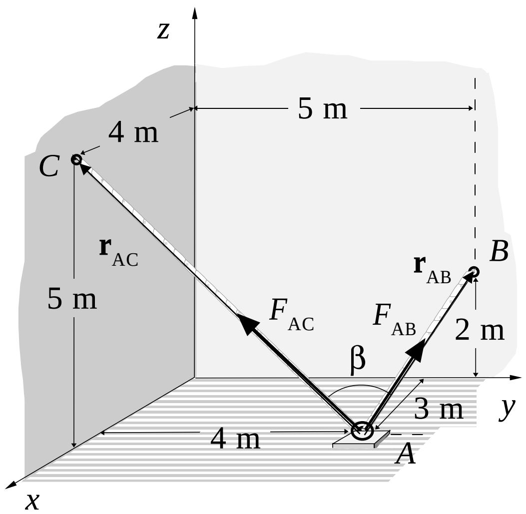
Kraftens riktning ges av enhetsvektorn

$$\mathbf{e}_{BA} = \frac{\mathbf{r}_{BA}}{|\mathbf{r}_{BA}|} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-5)^2}}(\ 4\ ,-3,-5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{50}}(\ 4\ ,-3,-5)$$

Kraften är alltså $\quad \mathbf{F}_1 = F_1\mathbf{e}_{BA} = \frac{300}{\sqrt{50}}(\ 4\ ,-3,-5)\ \text{N} = \underline{\underline{\frac{60}{\sqrt{2}}(\ 4\ ,-3,-5)\ \text{N}}}$

LP 2.11



Skalärprodukten ger vinkeln mellan två kända vektorer. För enhetsvektorerna $\mathbf{e}_{AB}$ och $\mathbf{e}_{AC}$ fås nämligen

$$\mathbf{e}_{AB} \cdot \mathbf{e}_{AC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\beta$$

Vi bestämmer först enhetsvektorerna. För att se komponenterna av vektorn $\mathbf{r}_{AB}$ kan man i figuren se hur långt man behöver gå längs de olika koordinataxlarna för att komma från A till B. (Alternativt beräknas $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, dvs drag A:s koordinater från B:s.

$$\mathbf{r}_{AB} = (-3,1,2)\ \text{m} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3,1,2)$$

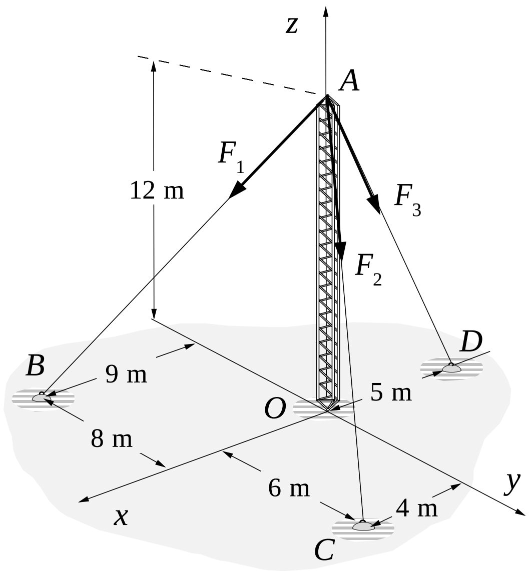
$$\mathbf{r}_{AC} = (1,-4,5)\ \text{m} \quad \Rightarrow \qquad \mathbf{e}_{AC} = \frac{\mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(1,-4,5)$$

Skalärprodukten blir $\quad \mathbf{e}_{AB} \cdot \mathbf{e}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3,1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}(1,-4,5) \qquad \Rightarrow$

$$\mathbf{e}_{AB} \cdot \mathbf{e}_{AC} = \frac{1}{\sqrt{14 \cdot 42}}\left(-3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 5\right) = \frac{3}{14\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\beta = \frac{3}{14\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\beta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{14}}}$$

LP 2.13



Storleken på varje kraft är känd. För att kunna skriva krafterna som vektorer börjar vi med att bestämma enhetsvektorerna i krafternas riktningar:

$$\mathbf{r}_{AB} = (\ 9, -8, -12)\ \text{m}$$
$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{1}{17}(\ 9, -8, -12)$$

$$\mathbf{r}_{AC} = (\ 4,\ 6, -12)\ \text{m}$$
$$\mathbf{e}_{AC} = \frac{1}{7}(\ 2,\ 3, -6)$$

$$\mathbf{r}_{AD} = (\ -5,\ 0, -12)\ \text{m}$$
$$\mathbf{e}_{AD} = \frac{1}{13}(\ -5,\ 0, -12)$$

Krafterna kan nu skrivas som vektorer:

$$\mathbf{F}_1 = F_1\mathbf{e}_{AB} = \frac{340}{17}(\ 9, -8, -12)\ \text{N} = 20(\ 9, -8, -12)\ \text{N}$$

$$\mathbf{F}_2 = F_2\mathbf{e}_{AC} = \frac{420}{7}(\ 2,\ 3, -6)\ \text{N} = 60(\ 2,\ 3, -6)\ \text{N}$$

$$\mathbf{F}_3 = F_3\mathbf{e}_{AD} = \frac{390}{13}(\ -5,\ 0, -12)\ \text{N} = 30(\ -5,\ 0, -12)\ \text{N}$$

Kraftresultanten med självklar angreppspunkt A är då

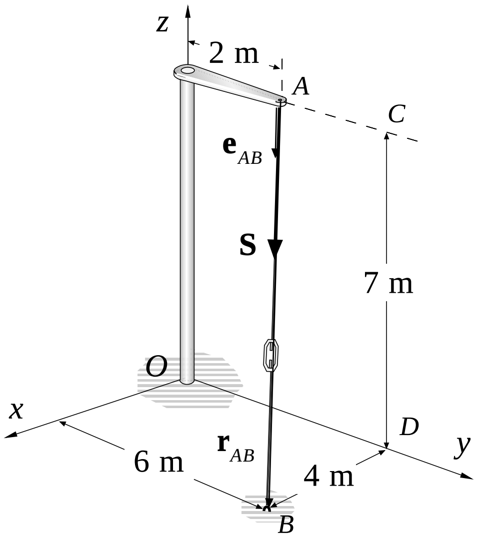
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (\ 180 + 120 - 150\ , -160 + 180\ , -240 - 360 - 360)\ \text{N}$$

$$= (\ 150\ ,\ 20\ , -960)\ \text{N}$$

Svar: Kraftresultanten har angreppspunkt A och är

$$\underline{\underline{\mathbf{F} = (\ 150\ ,\ 20\ , -960)\ \text{N}}}$$

LP 2.14



Kraftens riktning sammanfaller med staget:

$$\mathbf{r}_{AB} = (\ 4\ ,\ 4\ ,\ \text{-}\ 7)\ \text{m}$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

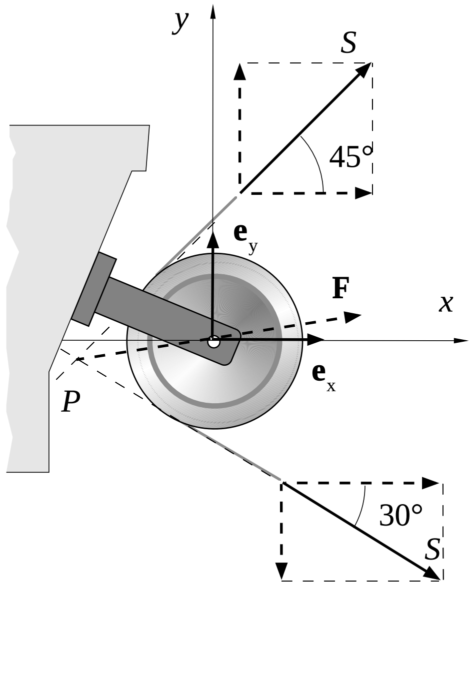
$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{16+16+49}}(\ 4\ ,\ 4\ ,\ \text{-}\ 7)$$
$$= \frac{1}{9}(\ 4\ ,\ 4\ ,\ \text{-}\ 7)$$

Kraften kan då skrivas

$$\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{AB} = \frac{900}{9}(\ 4,\ 4, \text{-}7)\ \text{N}$$
$$= 100(\ 4,\ 4\ , \text{-}7)\ \text{N}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{S} = 100(\ 4,\ 4\ , \text{-}7)\ \text{N}}}$$

LP 2.15



Om två krafter, som verkar på en stel kropp, har verkningslinjer som skär varandra i en skärningspunkt, kan de ersättas av kraftresultanten, som är kraftsumman med angreppspunkt i skärningspunkten. Kraftsumman är

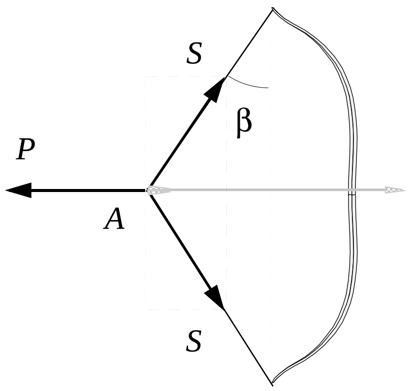
$$\mathbf{F} = \frac{S}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_x + \frac{S}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{3}S}{2}\mathbf{e}_x - \frac{S}{2}\mathbf{e}_y$$
$$= \frac{S}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\mathbf{e}_x + \frac{S}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{e}_y$$

eller

$$\underline{\underline{\mathbf{F} = 100\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\mathbf{e}_x + \left(\sqrt{2}-1\right)\mathbf{e}_y\right]\ \text{N}}}$$

Angreppspunkten på den linje som går genom skärningspunkten P och har samma riktning som kraftsumman $\mathbf{F}$.

LP 2.16



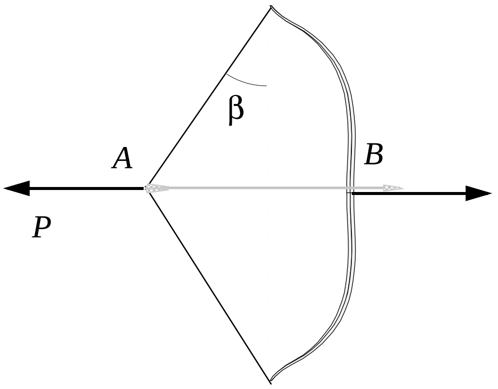
Antag att trådkraftens storlek är S. Den totala kraften i punkten A måste vara noll.

Vi får då för x- och y- komponenten:

$$\rightarrow: \quad -P + 2S\sin\beta = 0$$

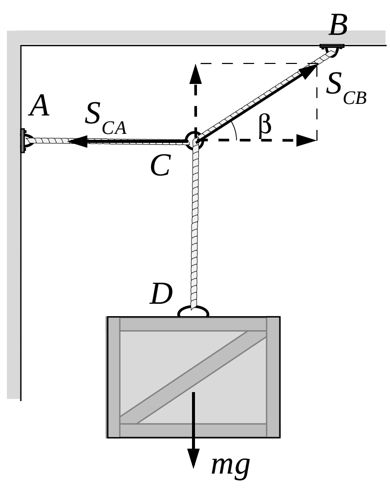
$$\uparrow: \quad S\cos\beta - S\cos\beta = 0$$

$$\Rightarrow \qquad S = \frac{P}{2\sin\beta}$$



Hela systemet pilbåge+pil påverkas av den yttre kraften P bakåt i punkten A. Vänsterhanden måste då ge en kraft P framåt i punkten B.

LP 2.17



Antag att krafterna i repen är S_{CA} och S_{CB}. Kraftsumman på ringen C är noll. Vi skriver kraftsummans horisontella och vertikala komponent:

$$\rightarrow: \quad S_{CB}\cos\beta - S_{CA} = 0$$

$$\uparrow: \quad S_{CB}\sin\beta - mg = 0$$

Den andra ekvationen ger

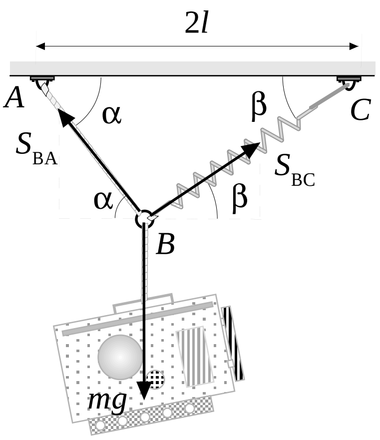
$$S_{CB} = \frac{mg}{\sin\beta}$$

Den första ekvationen ger då

$$S_{CA} = \frac{mg}{\sin\beta}\cos\beta$$

Svar: Trådkrafterna är $\underline{\underline{S_{CB} = \frac{mg}{\sin\beta}}}$ och $\underline{\underline{S_{CA} = \frac{mg}{\tan\beta}}}$

LP 2.18



Krafterna, som har angreppspunkt i ringen B, kan adderas till en kraftresultant, som måste vara noll. I komponentform fås

$$\rightarrow: \quad S_{BC}\cos\beta - S_{BA}\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad S_{BC}\sin\beta + S_{BA}\sin\alpha - mg = 0 \qquad (2)$$

Ekv (1) ger

$$S_{BA} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} S_{BC} \qquad (3)$$

Insättning i ekv (2) ger

$$\left(\sin\beta + \frac{\cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) S_{BC} = mg \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}{\cos\alpha} S_{BC} = mg \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\beta+\alpha) S_{BC} = mg\cos\alpha \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \quad S_{BC} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\beta+\alpha)} mg \qquad (7)$$

Men fjäderkraften är enligt Hookes lag

$$S_{BC} = k\Delta l \qquad (8)$$

Fjäderns aktuella längd $|\mathbf{r}_{BC}|$ bestäms med sinussatsen:

$$\frac{|\mathbf{r}_{BC}|}{\sin\alpha} = \frac{2l}{\sin[\pi - (\alpha+\beta)]} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{BC}| = \frac{2l\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (9)$$

Förlängningen är då

$$\Delta l = \left[\frac{2\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - 1\right] l \qquad (10)$$

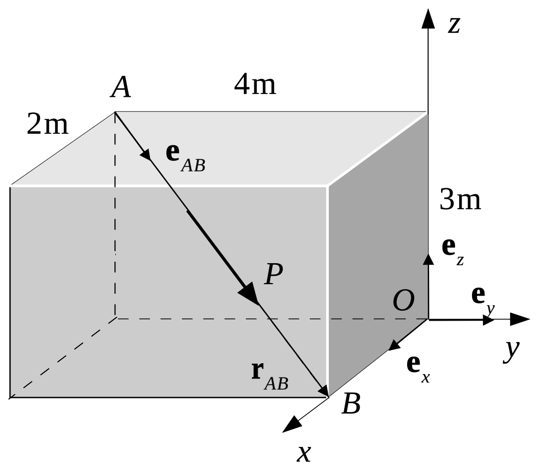
Utnyttja nu ekv (8), (10) och (7)

$$k\left[\frac{2\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - 1\right] l = \frac{\cos\alpha}{\sin(\beta+\alpha)} mg \qquad (11)$$

$$k\left[\frac{2\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right] l = \frac{\cos\alpha}{\sin(\beta+\alpha)} mg \qquad (12)$$

$$\underline{\underline{mg = \frac{2\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} kl}}$$

LP 2.19



Kraftens riktning sammanfaller med rymddiagonalen AB som kan skrivas som en vektor genom att gå omvägen

$$A \to C \to O \to B:$$

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_{AC} + \mathbf{r}_{CO} + \mathbf{r}_{OB}$$

$$\mathbf{r}_{AB} = \left(4\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z + 2\mathbf{e}_y \right) \mathrm{m}$$

eller

$$\mathbf{r}_{AB} = \left(2, 4, -3 \right) \mathrm{m}$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{4+16+9}} \left(2\,,\ 4\,,\ -3 \right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{29}} \left(2\,,\ 4\,,\ -3 \right)$$

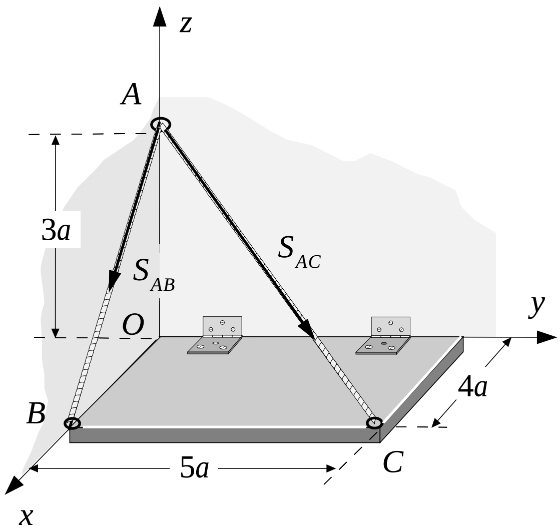
Kraften kan då skrivas

$$\mathbf{P} = P\mathbf{e}_{AB} = \frac{200}{\sqrt{29}} \left(2,\ 4, -3 \right)\ \mathrm{N}$$

eller

$$\underline{\underline{\mathbf{P} = \frac{200}{\sqrt{29}} \left(2\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z \right)\ \mathrm{N}}}$$

LP 2.20



Den totala kraften på A orsakad av trådkrafterna är

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{AB} + \mathbf{S}_{AC} = P\mathbf{e}_{AB} + \sqrt{2}P\mathbf{e}_{AC}$$

Vi bestämmer enhetsvektorerna:

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (\ 4,\ 0, 0\ )a - (\ 0,\ 0, 3\ )a$$

$$= (\ 4,\ 0, -3\ )a$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{16+0+9}}(\ 4\ ,\ 0\ ,\ \text{-}\ 3)$$
$$= \frac{1}{5}(\ 4\ ,\ 0\ ,\ \text{-}\ 3)$$

$$\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A = (\ 4,\ 5, 0\ )a - (\ 0,\ 0, 3\ )a$$

$$= (\ 4,\ 5, -3\ )a$$

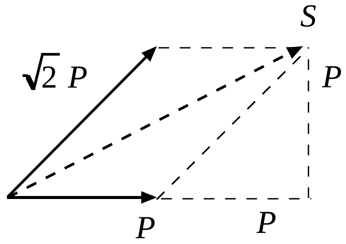
Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\mathbf{e}_{AC} = \frac{\mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{16+25+9}}(\ 4\ ,\ 5\ ,\ \text{-}\ 3) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(\ 4\ ,\ 5\ ,\ \text{-}\ 3)$$

Kraften kan då skrivas

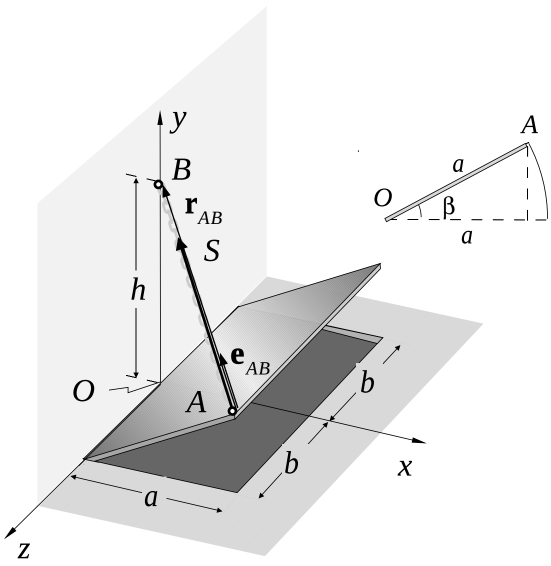
$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{AB} + \mathbf{S}_{AC} = \frac{P}{5}(\ 4\ ,\ 0\ ,\ \text{-}\ 3) + \frac{P}{5}(\ 4\ ,\ 5\ ,\ \text{-}\ 3)$$
$$\mathbf{S} = \frac{P}{5}(\ 8\ ,\ 5\ ,\ \text{-}\ 6)$$

Storleken av denna kraft är $\quad \mathbf{S} = \frac{P}{5}\sqrt{64+25+36} = \sqrt{5}P$



En enkel alternativ lösning utnyttjar figuren här till vänster. Eftersom tråden AB har samma längd $5a$ som kanten BC och $\mathbf{r}_{AB} \perp \mathbf{r}_{BC}$ måste vinkeln mellan trådarna vara $45°$. Då fås en enkel geometri för krafttriangeln. Kraftens storlek bestäms med Pythagoras sats: $S = \sqrt{P^2 + (2P)^2} = \sqrt{5}P$

LP 2.21



Kraften har samma riktning som kedjan

$$\mathbf{S} = P\mathbf{e}_{AB}$$

Vi bestämmer först enhetsvektorn:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AB} &= \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \\ &= (\ 0,\ h,\ 0\ ) - (\ a\cos\beta,\ a\sin\beta, b\ ) \\ &= (\ -a\cos\beta,\ h - a\sin\beta,\ -b\ )\end{aligned}$$

Men $h = a$ och $\beta = 30°$ $\quad\Rightarrow$

$$\mathbf{r}_{AB} = \left(\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{1}{2}a,\ -b\ \right)$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|}$$

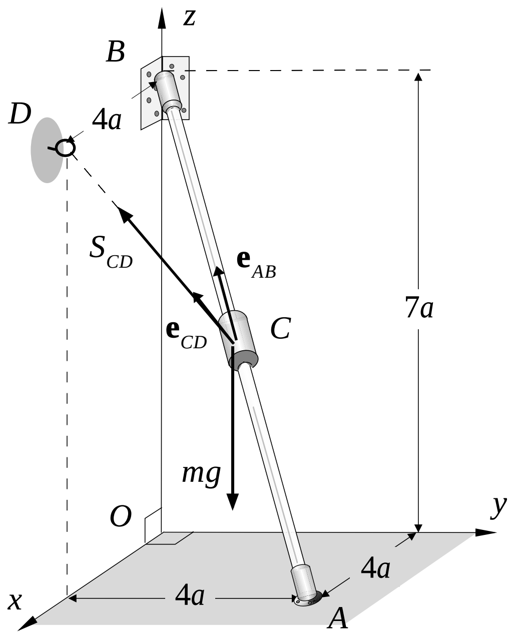
$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3a^2 + a^2 + 4b^2}}\left(-\sqrt{3}\,a\ ,\ a\ , -2b\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\left(-\sqrt{3}\,a\ ,\ a\ , -2b\right)$$

Kraften kan då skrivas

$$\mathbf{S} = P\mathbf{e}_{AB} = \underline{\underline{\frac{P}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\left(-\sqrt{3}\,a\ ,\ a\ , -2b\right)}}$$

LP 2.23



Frilägg hylsan C! Friläggningsfiguren visar trådkraften, normalkraften N och tyngdkraften mg som verkar på ringen. Vektorsumman av alla dessa krafter ska vara noll. Normalkraften behöver inte bestämmas. Vi väljer då att projicera krafterna på stångens riktning. Detta gör att normalkraften aldrig kommer med i ekvationerna. Eftersom trådkraftens riktning är känd ur geometrin är det bara beloppet som ska bestämmas. Trådkraften genom C och D skrivs som en vektor $\mathbf{S}_{CD} = S_{CD}\mathbf{e}_{CD}$, där S_{CD} är beloppet av $\mathbf{S}_{CD}$. Bestäm först enhetsvektorerna $\mathbf{e}_{CD}$ och $\mathbf{e}_{AB}$.

$$\mathbf{r}_{CD} = \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_C = (4,\ 0,\ 7)a \text{ - } (2,\ 2,\ 7/2)a = (2, -2,\ 7/2)a$$

$$\mathbf{e}_{CD} = \frac{\mathbf{r}_{CD}}{|\mathbf{r}_{CD}|} = \frac{(4,-4,-7)a}{|(4,-4,-7)a|} = \frac{(4,-4,-7)}{\sqrt{16+16+49}} = \frac{1}{9}(4,-4,\ 7)$$

På samma sätt fås

$$\mathbf{r}_{AB} = (-4,-4,\ 7)a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{(-4,-4,\ 7)a}{|\sqrt{16+16+49}\ a|} = \frac{1}{9}(-4,-4,\ 7)$$

Summan av krafternas komponenter med avseende på riktningen $\mathbf{e}_{AB}$ skall vara noll:

$$S_{CD}\mathbf{e}_{CD} \cdot \mathbf{e}_{AB} - mg\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{AB} = 0$$

I komponentform:

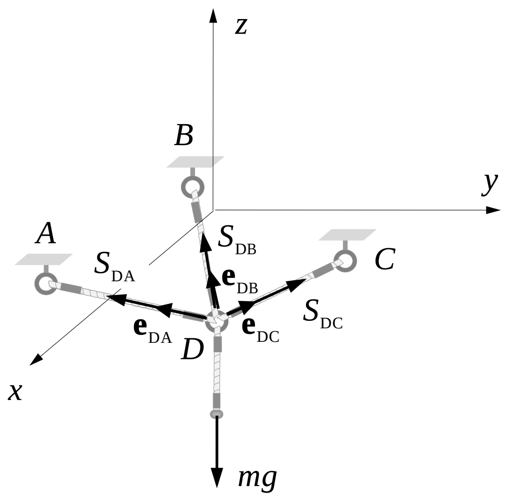
$$S_{CD}\frac{1}{9}(4,-4,\ 7) \cdot \frac{1}{9}(-4,-4,\ 7) - mg(0,\ 0,\ 1) \cdot \frac{1}{9}(-4,-4,\ 7) = 0$$

$$S_{CD}\frac{1}{81}(-16+16+49)) - mg\frac{1}{9}(0+0+7) = 0$$

$$\frac{49}{81}S_{CD} = mg\frac{7}{9} \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{S_{CD} = \frac{9}{7}mg}}$$

LP 2.24



Frilägg ringen D! Friläggningsfiguren visar trådkrafterna som verkar på ringen. Vektorsumman av alla dessa krafter ska vara noll. Detta betyder tre ekvationer, en för varje komponent, och då kan de tre obekanta krafternas storlekar bestämmas. Eftersom krafternas riktningar är kända ur geometrin är det bara beloppen som ska bestämmas. Trådkraften genom t ex D och B skrivs som vektor $\mathbf{S}_{DB} = S_{DB}\mathbf{e}_{DB}$, där S_{DB} är beloppet av $\mathbf{S}_{DB}$.
Bestäm först enhetsvektorerna i krafternas riktningar!

$$\mathbf{r}_{DA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_D = (3,-3,0)a - (0,0,-4)a = (3,-3,4)a$$
$$\mathbf{e}_{DA} = \frac{\mathbf{r}_{DA}}{|\mathbf{r}_{DA}|} = \frac{(3,-3,4)a}{|(3,-3,4)a|} = \frac{(3,-3,\ 4)}{\sqrt{9+9+16}} = \frac{1}{\sqrt{34}}(3,-3,\ 4)$$

På samma sätt fås

$$\mathbf{r}_{DB} = (-2,-2,4)a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{DB} = \frac{\mathbf{r}_{DB}}{|\mathbf{r}_{DB}|} = \frac{(-1,-1,\ 2)a}{\left|\sqrt{1+1+4}\ a\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,\ 2)$$

$$\mathbf{r}_{DC} = (2,4,4)a \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{DC} = \frac{\mathbf{r}_{DC}}{|\mathbf{r}_{DC}|} = \frac{(2,4,4)a}{\left|\sqrt{4+16+16}\ a\right|} = \frac{1}{3}(1,2,2)$$

Summan av trådkrafterna $\mathbf{S}_{DA} = S_{DA}\mathbf{e}_{DA}$, $\mathbf{S}_{DB} = S_{DB}\mathbf{e}_{DB}$ och $\mathbf{S}_{DC} = S_{DC}\mathbf{e}_{DC}$ samt tyngdkraften $-mg\mathbf{e}_z$ skall bli noll:

$$S_{DA}\mathbf{e}_{DA} + S_{DB}\mathbf{e}_{DB} + S_{DC}\mathbf{e}_{DC} - mg\mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

I komponentform:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{34}}S_{DA} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}S_{DB} + \dfrac{1}{3}S_{DC} = 0 & (1) \\ -\dfrac{3}{\sqrt{34}}S_{DA} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}S_{DB} + \dfrac{2}{3}S_{DC} = 0 & (2) \\ \dfrac{4}{\sqrt{34}}S_{DA} + \dfrac{2}{\sqrt{6}}S_{DB} + \dfrac{2}{3}S_{DC} - mg = 0 & (3) \end{cases}$$

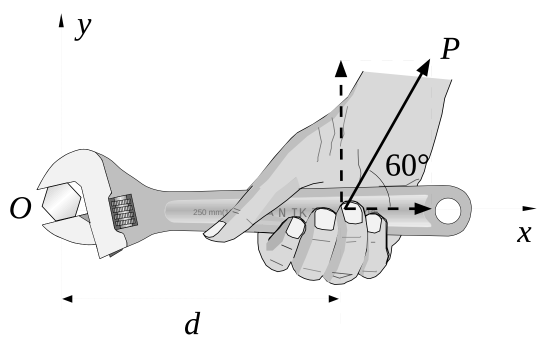
Addera (1) och (2): $\quad \dfrac{2}{\sqrt{6}}S_{DB} = S_{DC}$

Insättning i (1) ger $\quad S_{DB} = \dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{17}}S_{DA}$

Insättning i (3) ger resultatet

$$\underline{\underline{S_{DA} = \frac{mg}{\sqrt{34}}; \quad S_{DB} = \frac{9\sqrt{6}\,mg}{34}; \quad S_{DC} = \frac{9mg}{17}}}$$

LP 2.26



Kraften P från handen på skiftnyckeln är ju i sig en kraftresultant till alla de krafter som verkar på varje liten del av kontaktytan mellan hand och nyckel. Kraftmomentet med avseende på punkten O beräknas enligt

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$$

Här är $\mathbf{r} = (d, 0, 0)$ och $\mathbf{F} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)P$

Insättning ger

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ d & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} \frac{P}{2} = \left(0, 0, d\sqrt{3}\right)\frac{P}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{M}_O = \frac{\sqrt{3}Pd}{2}\mathbf{e}_z}}$$

b) Kraftmomentet med avseende på z-axeln är

$$\boxed{M_z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_z}$$

Insättning ger

$$M_z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\sqrt{3}Pd}{2}\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\sqrt{3}Pd}{2}$$

Detta är komponenten. Det går lika bra att svara med vektorn:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}_z = \frac{\sqrt{3}Pd}{2}\mathbf{e}_z}}$$

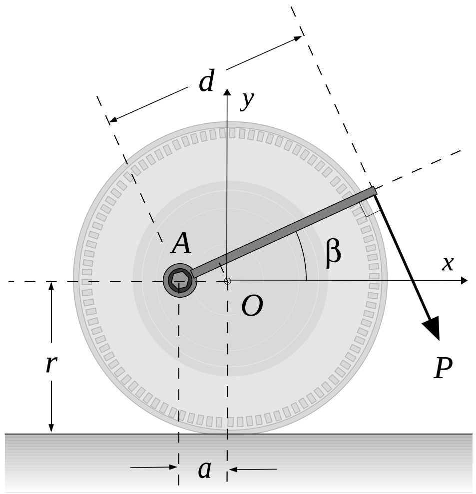
Kommentar: Här utnyttjar vi de nya definitionerna mest för att träna på dem i ett mycket enkelt fall. Problemet är ju så enkelt att man lika gärna räknar med hävarm gånger kraft och sedan anger riktningen moturs genom att sätta ut enhetsvektorn $\mathbf{e}_z$.

Hävarmen till kraften P är $\frac{\sqrt{3}}{2}d$.

Hävarmen till y-komposanten av kraften P är d.

Momentarmen till kraften P är vektorn $\mathbf{r}$.

LP 2.27



Kraften P har med avseende på en axel genom P en hävarm d så att kraftmomentet blir

$$M_A = -d \cdot P \tag{1}$$

Detta moment skall betraktas som en komponent av en vektor så att

$$M_A \equiv (\mathbf{M}_A)_z \tag{2}$$

Vi väljer moturs som den positiva riktningen så att den överensstämmer med z-axelns riktning. Minustecknet talar då om att momentet är medurs.

Motsvarande kraftmoment med avseende på en axel genom O blir

$$M_O = -(d - a\cos\beta) \cdot P \tag{3}$$

Här valde vi att bestämma hävarmen till hela kraften. Alternativt kan man dela upp kraften i en vertikal och en horisontell komponent och addera de kraftmoment som de komponenterna ger.

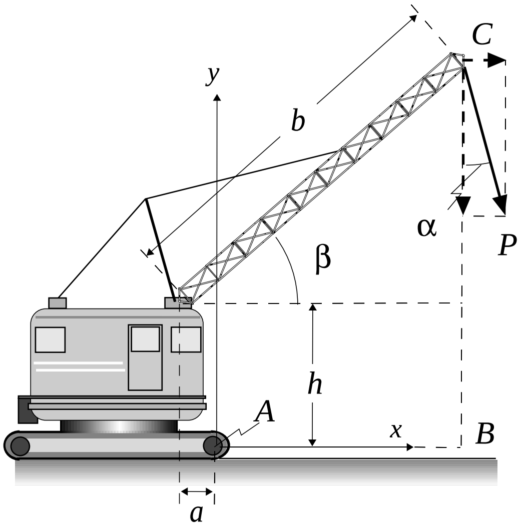
Vi kollar slutligen att sambandsformeln $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}$ gäller. Högerledet av sambandsformeln blir

$$(\mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F})_z = -dP + \left[-a\mathbf{e}_x \times (P\sin\beta\,\mathbf{e}_x - P\cos\beta\,\mathbf{e}_y)\right]_z = \tag{4}$$

$$= -dP + aP\cos\beta = -(d - a\cos\beta)P \tag{5}$$

vilket enligt ovan överensstämmer med vänsterledet M_O enl (3).

LP 2.28



Vi delar först upp kraften i komposanter, vars hävarmar är lättare att hitta än hävarmen till hela kraften

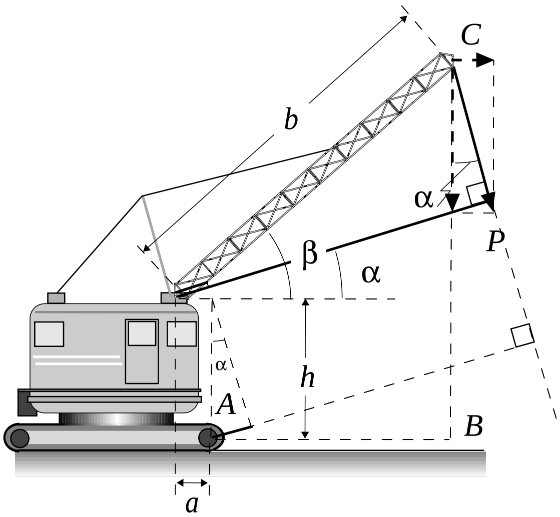
$$\left(\mathbf{M}_A\right)_z = \left(\mathbf{r}\times\mathbf{F}\right)_z$$

$$= -\left(h + b\sin\beta\right)P\sin\alpha - \left(b\cos\beta - a\right)P\cos\alpha$$

Detta kan också skrivas:

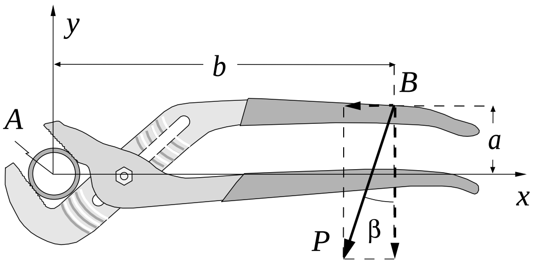
$$\left(\mathbf{M}_A\right)_z = \left[a\cos\alpha - h\sin\alpha - b\left(\cos\beta\cos\alpha + b\sin\beta\sin\alpha\right)\right]P$$

$$= -\left[b\cos\left(\beta-\alpha\right) - a\cos\alpha + h\sin\alpha\right]P$$



Innanför klammern står alltså hävarmen till P, dvs avståndet mellan A och kraftens verkningslinje. Kan du ur geometrin se att hävarmen är den rätta? De tre sträckorna i klammern är markerade i figuren.

LP 2.29



Kraften delas upp i komposanter. Kraftmomentet med avseende på punkten A är

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Kraftmomentet med avseende på en axel genom A vinkelrät mot nyckelns plan är

$$(\mathbf{M}_A)_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z$$

$$= aP\sin\beta - bP\cos\beta$$

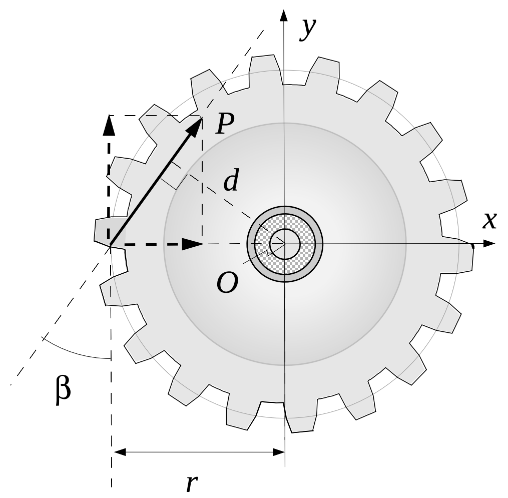
Vi kan även bestämma kraftmomentet med en determinant:

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ b & a & 0 \\ -P\sin\beta & -P\cos\beta & 0 \end{vmatrix} = (-bP\cos\beta + aP\sin\beta)\mathbf{e}_z$$

Det går också att svara

Momentet är $(a\sin\beta - b\cos\beta)P$ moturs eftersom då riktningen också framgår.

LP 2.30



Den vridande förmågan är detsamma som kraftmomentet. Den i figuren horisontella komponenten av kraften P har en verkningslinje som går genom punkten O. Den delen av kraften bidrar alltså därför inte till momentet.

Den vertikala kraftkomponenten är $P\cos\beta$ och har hävarmen r med avseende på kugghjulets axel. Den ger ett kraftmoment $rP\cos\beta$ medurs med avseende på axeln.

Det frågas efter kraftmomentet med avseende på *punkten* O. I detta fall är det detsamma som momentet med avseende på axeln, alltså

$$\underline{\underline{\mathbf{M}_O = -rP\cos\beta\,\mathbf{e}_z}}$$

Insättning av givna värden ger

$$\mathbf{M}_O = -0.080\cdot 60\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_z \text{ Nm}$$

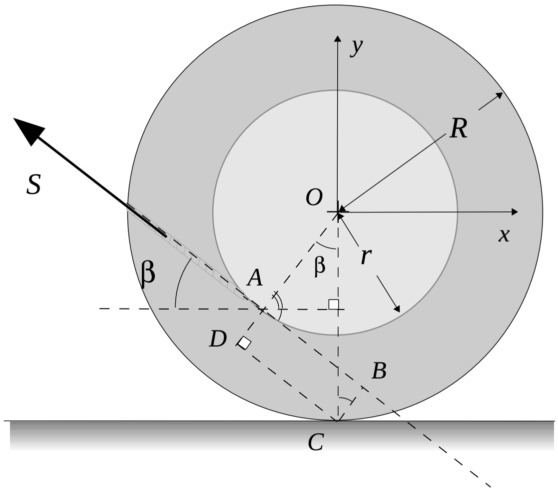
$$\Rightarrow \qquad \mathbf{M}_O \approx -4.16\,\mathbf{e}_z \text{ Nm}$$

Kommentar: När är kraftmomentet med avseende på en axel detsamma som kraftmomentet med avseende på en punkt på axeln?

Kraftmomentet med avseende på punkten O beräknas enligt $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$. Om hela denna vektor ligger längs axeln så är kraftmomentet med avseende på axeln detsamma som kraftmomentet med avseende på punkten på axeln.

Om i detta problem kraften hade haft en komposant i z-axelns riktning så hade kraftmomentet med avseende på punkten O fått en komposant i den negativa y-riktningen. Kraftmomentet med avseende på axeln hade däremot inte förändrats.

LP 2.31



Avståndet OA är r. Kraften $\mathbf{S}$ har alltså en hävarm r med avseende på en axel genom O. Enligt definitionen

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

fås

$$\underline{\underline{\mathbf{M}_O = -rS\,\mathbf{e}_z}}$$

Numeriskt värde:

$$\mathbf{M}_O = -0.12 \cdot 120\,\mathbf{e}_z \text{ Nm} = -14.4\,\mathbf{e}_z \text{ Nm}$$

Hävarmen med avseende på en axel genom C kan bestämmas ur figurens geometri. Avståndet BC är detsamma som avståndet OD minus avståndet OA, dvs hävarmen är

$$R\cos\beta - r$$

och momentet blir

$$\underline{\underline{\mathbf{M}_C = (R\cos\beta - r)S\,\mathbf{e}_z}}$$

Numeriskt värde: $\qquad \mathbf{M}_O = \left(0.200 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0.120\right) \cdot 120\mathbf{e}_z \text{ Nm} = 6.38\,\mathbf{e}_z \text{ Nm}$

Kraftmomentet $\mathbf{M}_C$ blir noll för

$$R\cos\beta - r = 0 \quad \Rightarrow \quad R\cos\beta - r = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{r}{R}$$

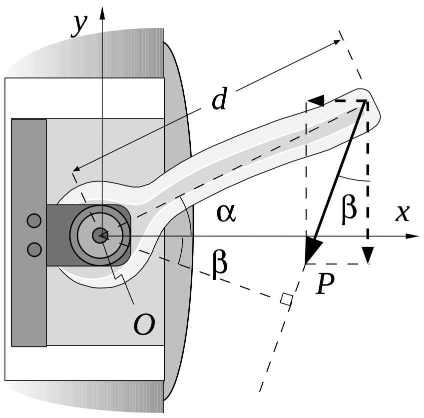
Detta motsvaras av att kraftens verkningslinje går genom kontaktpunkten C.

Kommentar:

Enligt sambandsformeln skall gälla: $\qquad \mathbf{M}_C = \mathbf{M}_O + \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{S}$

Kontrollera gärna att den stämmer med de bestämda uttrycken på $\mathbf{M}_C$ och $\mathbf{M}_O$!

LP 2.32



Den vridande förmågan eller kraftmomentet med avseende på punkten O beräknas enligt

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$$

Inför ett koordinatsystem enligt figuren!

Här är

$$\mathbf{r} = (d\cos\alpha,\, d\sin\alpha,\, 0)$$

och

$$\mathbf{F} = (-P\sin\beta,\, -P\cos\beta,\, 0)$$

Insättning ger

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ d\cos\alpha & d\sin\alpha & 0 \\ -P\sin\beta & -P\cos\beta & 0 \end{vmatrix} = \left(0,\, 0,\, Pd(-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{M}_O = Pd(-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\mathbf{e}_z$$

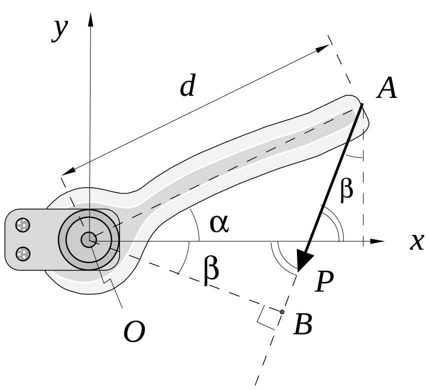
eller med ett känt trigonometriskt samband

$$\underline{\underline{\mathbf{M}_O = -Pd\cos(\alpha+\beta)\mathbf{e}_z}}$$

I figuren kan man se och identifiera hävarmen $d\cos(\alpha+\beta)$ till hela kraften.

Numeriskt värde: $\mathbf{M}_O = -2 \cdot 0.025\cos 60^\circ \mathbf{e}_z$ Nm $= -0.025\mathbf{e}_z$ Nm

Kommentar:



Även i detta fall kan vi bestämma kraftmomentet genom att söka upp antingen hävarmarna till den horisontella och vertikala kraftkomposanten eller också hävarmen r_{OB} till hela kraften.

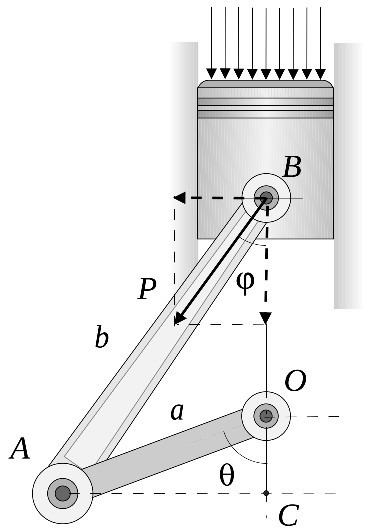
Figuren visar hur man bestämmer detta avstånd mellan O och B.

Den tvåstrukna vinkeln är $\dfrac{\pi}{2} - \beta$.

vilket betyder att hävarmen är

$r_{OB} = d\cos(\alpha+\beta)$

LP 2.36



Tryckkraften x i stången är given. Antingen bestämmer man hävarmen till hela denna kraft, dvs avståndet mellan stång och punkten O, eller också delar man upp kraften i två komposanter och bestämmer hävarmarna till dessa.

Dela upp kraften i punkten B i två komposanter enligt figur. Den vertikala komposanten bidrar ej till kraftmomentet, eftersom verkningslinjen går genom punkten O. Då återstår bara att bestämma hävarmen till den horisontella komposanten som är avståndet r_{OB}. Denna fås med cosinussatsen

$$r_{OB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta - \varphi)}$$

$$M_O = r_{OB} \cdot P\sin\varphi$$

Vinkeln φ bestäms med sinussatsen:

$$\frac{\sin\varphi}{a} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\varphi = \frac{a\sin\theta}{b} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2\theta}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta} \tag{2}$$

Avståndet r_{OC} är $r_{OC} = a\cos\theta$ (3)

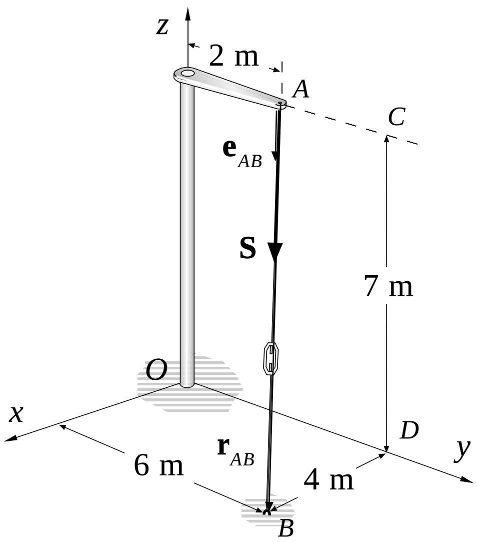
Då är $r_{OB} = b\cos\varphi - a\cos\theta$ (4)

Insättning av (2) ger $r_{OB} = \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta} - a\cos\theta$ (5)

Kraftmomentets *storlek* är då hävarm gånger kraft, dvs

$$\underline{\underline{M_O = \left(\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\theta} - a\cos\theta\right)\frac{a\sin\theta}{b}P}}$$

LP 2.39



Kraftens riktning sammanfaller med staget:

$$\mathbf{r}_{AB} = (\ 4\ ,\ 4\ ,\ \text{-}\ 7)\ \text{m}$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{16+16+49}}(\ 4\ ,\ 4\ ,\ \text{-}\ 7)$$
$$= \frac{1}{9}(\ 4\ ,\ 4\ ,\ \text{-}\ 7)$$

Kraften kan då skrivas

$$\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{AB} = \frac{900}{9}(\ 4,\ 4, \text{-}7)\ \text{N}$$
$$= 100(\ 4,\ 4\ , \text{-}7)\ \text{N}$$

Kraftmomentet med avseende på origo O blir

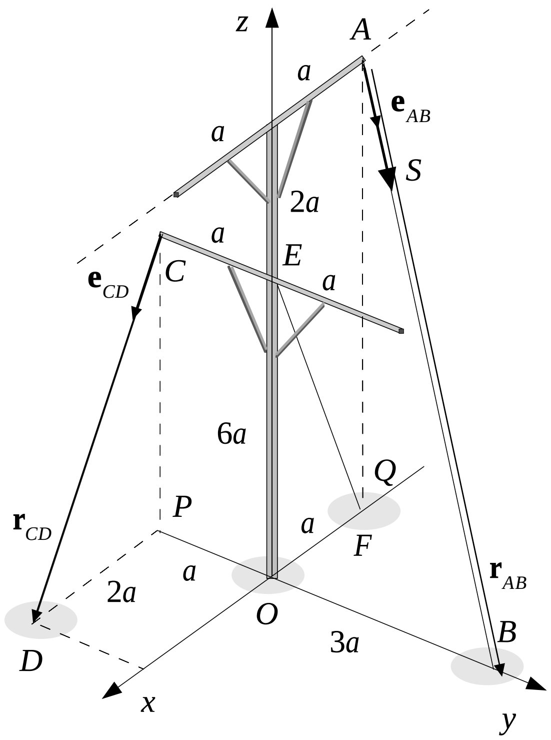
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{S} \qquad \text{där} \qquad \mathbf{r}_{OA} = (\ 0,\ 2\ ,7)\ \text{m}$$

$$\mathbf{M}_O = 100 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & -7 \end{vmatrix} \text{Nm} = 100(\text{-}42,\ 28,\ \text{-}\ 8)\ \text{Nm} = 200(\text{-}21,\ 14,\ \text{-}\ 4)\ \text{Nm}$$

Kraftmomentet är

$$\mathbf{M}_O = \underline{\underline{200(\text{-}21,\ 14,\ \text{-}\ 4)\ \text{Nm}}}$$

LP 2.40



Kraftmomentet med avseende på punkten O beräknas enligt

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \tag{1}$$

Här är

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{OA} = (-a,\, 0,\, 8a) \tag{2}$$

och

$$\mathbf{F} = S\mathbf{e}_{AB} \tag{3}$$

Vi måste alltså först bestämma enhetsvektorn $\mathbf{e}_{AB}$.

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \tag{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{r}_{AB} = (0,\, 3a,\, 0) - (-a,\, 0,\, 8a) \tag{5}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{r}_{AB} = (a,\, 3a,\, -8a) \tag{6}$$

Denna vektor kan också bestämmas genom att i figuren gå från A till B längs koordinataxlarna.

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{e}_{AB} = \frac{(a,\, 3a,\, -8a)}{|(a,\, 3a,\, -8a)|} \qquad \Rightarrow \tag{7}$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{(1,\, 3,\, -8)}{|(1,\, 3,\, -8)|} = \frac{(1,\, 3,\, -8)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{74}}(1,\, 3,\, -8) \tag{8}$$

Kraften på vektorform är alltså

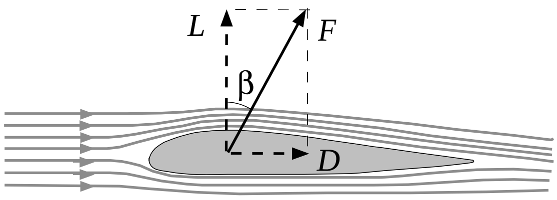
$$\mathbf{F} = S\mathbf{e}_{AB} = \frac{S}{\sqrt{74}}(1,\, 3,\, -8) \tag{9}$$

Insättning i (1) ger

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & -8 \end{vmatrix} \frac{aS}{\sqrt{74}} = (-24,\, 0,\, -3)\frac{aS}{\sqrt{74}}$$

$$M_z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_z = (-24,\, 0,\, -3)\frac{aS}{\sqrt{74}} \cdot (0,\, 0,\, 1) = -\frac{3aS}{\sqrt{74}}$$

LP 2.44



Två krafter med samma angreppspunkt kan ersättas av kraftsumman i samma punkt. Det är då kraftresultanten man bestämt, eftersom kraftmomentet med avseende på angreppspunkten inte förändras. Det är noll för båda systemen.

Kraftresultanten kan också förskjutas längs sin verkningslinje.

Kraftresultantens storlek fås med Pythagoras sats:

$$F = \sqrt{L^2 + D^2}$$

Vinkeln med vertikalen ges av

$$\tan\beta = \frac{D}{L}$$

Med de givna numeriska värdena fås

$$F = \sqrt{400^2 + 30^2}\ \text{N} = \sqrt{160000 + 900}\ \text{N} = \sqrt{160900}\ \text{N}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{F \approx 401\ \text{N}}}$$

$$\tan\beta = \frac{30}{400} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\beta = \frac{3}{40}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\beta \approx 4.29°}}$$

LP 2.46

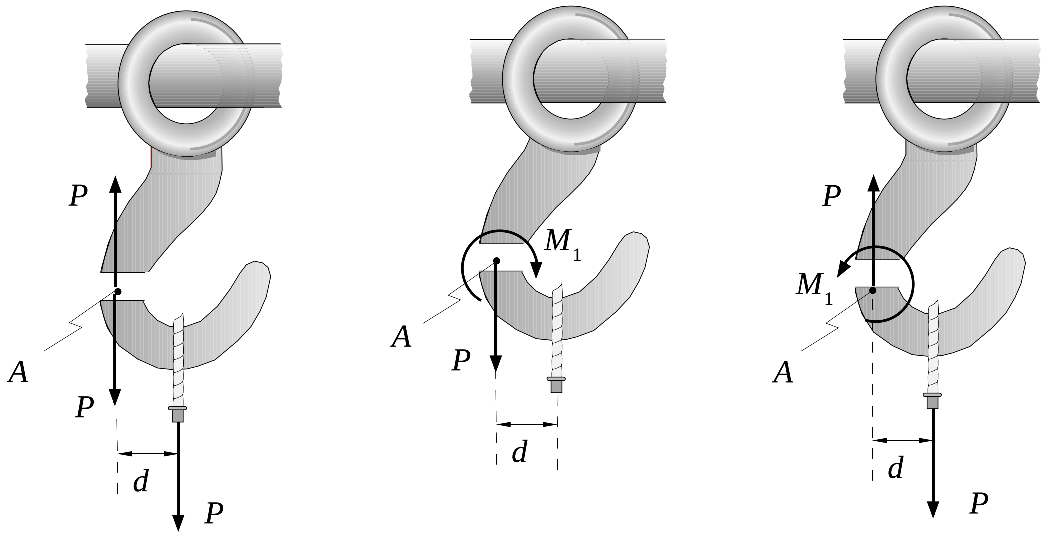


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Vilken är verkan av kraften P (belastningen) i punkten A?

Ansätt i punkten A två krafter P med motsatta riktningar. Se figur 1!
Identifiera kraftparet och ersätt det med ett kraftparsmoment M_1 enligt figur 2, som visar belastningens verkan i punkten A.

Storleken av kraftparsmomentet är

$$M_1 = Pd$$

Det maximalt tillåtna värdet på M_1 är 3200 N.

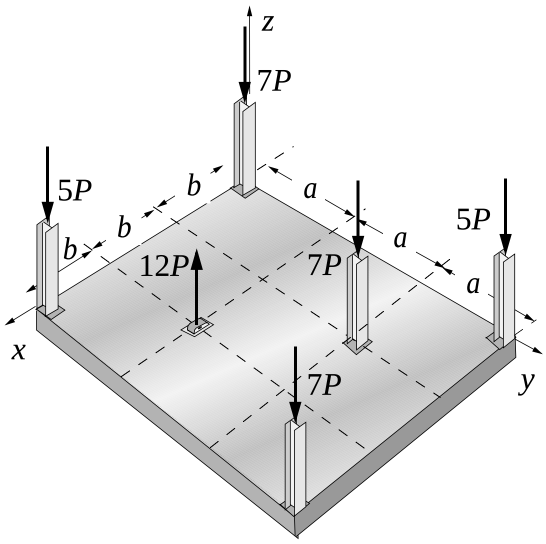
Det ger den maximala belastningen

$$P = \frac{M_1}{d} = \frac{3200 \text{ Nm}}{0.080 \text{ m}} = 80000 \text{ N}$$

Svar: Den maximala belastningen är $\underline{\underline{P = 80 \text{ kN}}}$

Kommentar: Figur 3 vill visa att om man sågar av (frilägger) kroken vid A, måste man ansätta ett kraftsystem enligt figuren för att den avsågade delen fortfarande skall vara i jämvikt.

LP 2.54



För att kunna bestämma *kraftresultanten*, som vi vet existerar för ett parallellkraftsystem, behöver man veta *resultanten* i någon punkt t ex origo. För det givna kraftsystemet är kraftsumman

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \sum \mathbf{F}_k \\
&= \left(12P - 5P - 7P - 7P - 7P - 5P\right)\mathbf{e}_z \\
&= -19P\mathbf{e}_z
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Ingen av krafterna kan ge något kraftmoment i z-riktningen. Bestäm nu varje krafts kraftmoment, först med avseende på x-riktningen och sedan med avseende på y-riktningen. Alternativt beräknas varje kraftmoment med en determinant.

Kraftmomentet med avseende på O

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_O &= \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \left(12P\cdot a - 7P\cdot 2a - 12P\cdot 3a\right)\mathbf{e}_x + \left(7P\cdot b - 12P\cdot 2b + 12P\cdot 3b\right)\mathbf{e}_y \\
&= -38Pa\,\mathbf{e}_x + 19Pb\mathbf{e}_y
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$\mathbf{F}$ och $\mathbf{M}_O$ bildar tillsammans *resultanten* i O.

Ersätt nu det givna kraftsystemet med en *kraftresultant*. Denna kraftresultant är lika med kraftsumman $\mathbf{F}$, som redan bestämts. Antag att dess angreppspunkt är $\mathbf{r} = \left(x,\ y,\ z\right)$. Kraftresultanten ska vara ekvimoment med det givna systemet och då måste den ge lika kraftmoment med avseende på origo som det givna kraftsystemet. Ekvationen blir

$$
\underbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{F}}_{\text{nya}} = \underbrace{\mathbf{M}_O}_{\text{givna}} \tag{3}
$$

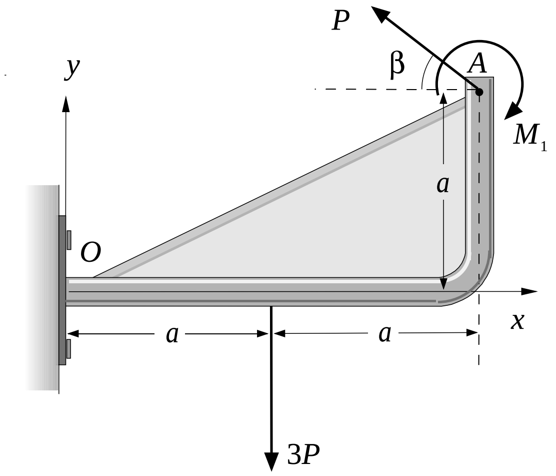
$$
\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ 0 & 0 & -19P \end{vmatrix} = \left(-38Pa,\ 19Pb,\ 0\right) \tag{4}
$$

$$
\begin{cases} -y\cdot 19P = -38Pa \\ x\cdot 19P = 19Pb \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = b;\ \ y = 2a;\ \ z \text{ obestämd} \tag{5}
$$

Kraftresultanten är $\mathbf{F} = -19P\mathbf{e}_z$

med verkningslinjen $x = b;\ \ y = 2a;\ \ z$ obestämd

LP 2.62



Dela upp kraften vid A i två komposante en horisontell och en vertikal.

Vi beräknar kraftsumman:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = -3P\mathbf{e}_y - P\cos\beta\mathbf{e}_x + P\sin\beta\mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F} = \left(-P\cos\beta, P\sin\beta - 3P, 0\right)$$

Vinkeln β är given $\beta = 30°$,

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right)P$$

Kraftmomentet i origo O bestäms enligt den allmänna formeln

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum \mathbf{C}_l$$

där den sista termen står för kraftparsmomenten.

Här kan krafternas moment beräknas som hävarm gånger kraft. Riktningen ges av högerregeln och vi får

$$\mathbf{M}_O = \left(2a \cdot P\sin\beta + a \cdot P\cos\beta - a \cdot 3P\right)\mathbf{e}_z - M_1\mathbf{e}_z$$

$$\beta = 30° \Rightarrow \qquad \mathbf{M}_O = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)Pa - M_1\right]\mathbf{e}_z$$

Resultanten i origo är alltså

$$\mathbf{F} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right)P; \ \mathbf{M}_O = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)Pa - M_1\right]\mathbf{e}_z$$

b) Kraftresultanten finns eftersom $\mathbf{F} \perp \mathbf{M}_O$. Antag att kraftresultanten har en angreppspunkt som ges av lägevektorn $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Om det givna kraftsystemet ersätts av kraftresultanten måste kraftmomentet med avseende på origo ändå bli detsamma:

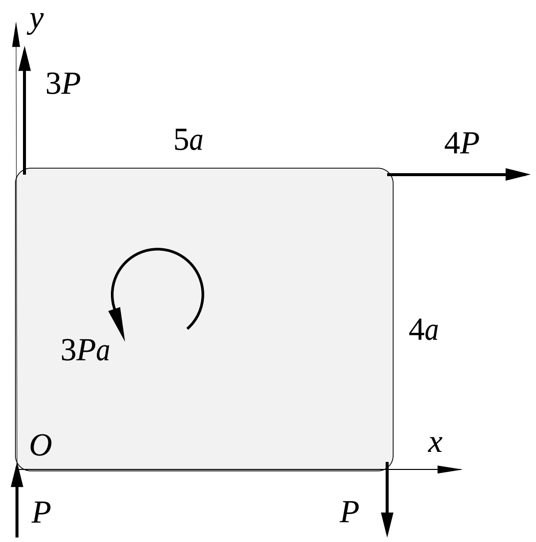
$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_O$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ -\sqrt{3} & -5 & 0 \end{vmatrix} \frac{P}{2} = \left(0, 0, \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right)Pa - M_1\right) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} -zP = 0 \\ 0 = 0 \\ -xP = 3Pa \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$x = 3a;\ z = 0;\ y$ obestämd

Kraftresultanten är $\mathbf{F} = -P\,\mathbf{e}_y$ med en angreppspunkt som ligger på den räta linjen $x = 3a;\ z = 0;\ y$ obestämd.

LP 2.65



Kraftresultanten är alltid samma vektor som kraftsumman. I ett problem där kraftresultanten efterfrågas skall alltså des angreppspunkt bestämmas.
Kraftsumman bestäms enligt:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = 4P\mathbf{e}_x + P\mathbf{e}_y - P\mathbf{e}_y + 3P\mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F} = 4P\mathbf{e}_x + 3P\mathbf{e}_y$$

I vilken punkt skall denna kraft angripa fö att kraftmomentet i någon punkt t ex orig ska bli detsamma som för det givna kraftsystemet? Kraftresultanten blir i så fa ekvimoment med det givna kraftsystemet

Vi beräknar kraftmomentet med avseende på origo för det givna kraftsystemet:

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k + \sum \mathbf{C}_l$$

där den sista termen står för kraftparsmomenten.
I stället för med determinanter bestäms kryssprodukterna som hävarm gånger kraft. Riktningen ges av högerregeln och vi får

$$\mathbf{M}_O = (-4a \cdot 4P - 5a \cdot P)\mathbf{e}_z + 3Pa\,\mathbf{e}_z$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{M}_O = -18Pa\,\mathbf{e}_z$$

Antag att kraftresultanten har en angreppspunkt som ges av lägevektorn $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Om det givna kraftsystemet ersätts av kraftresultanten måste kraftmomentet med avseende på origo vara detsamma:

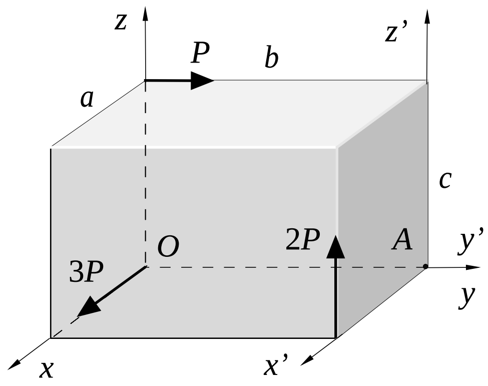
$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_O$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} P = (0, 0, -18Pa) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3zP = 0 \\ 4z = 0 \\ (3x - 4y)P = -18Pa \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{4}(3x + 18a); \; z = 0$$

Kraftresultanten är $\mathbf{F} = 4P\mathbf{e}_x + 3P\mathbf{e}_y$ med en angreppspunkt som ligger på den räta linjen $y = \frac{1}{4}(3x + 18a); \; z = 0$.

LP 2.67



För det givna kraftsystemet är kraftsumman

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = 3P\mathbf{e}_x + P\mathbf{e}_y + 2P\mathbf{e}_z$$

eller

$$\mathbf{F} = (3,\ 1,\ 2)P$$

Vid bestämning av kraftmomentet med avseende på A kan man tänka sig ett koordinatsystem $Ax'y'z'$ med origo i A.

Kraften P ger bara moment kring x'-axeln eftersom den är parallell med y'-axeln och verkningslinjen skär z'-axeln.

Kraften $3P$ ger bara moment kring z'-axeln eftersom den är parallell med x'-axeln och verkningslinjen skär y'-axeln.

Kraften $2P$ ger bara moment kring y'-axeln eftersom den är parallell med z'-axeln och verkningslinjen skär x'-axeln.

Om angreppspunkterna är Q_k så blir kraftmomentet med avseende på A

$$\mathbf{M}_A = \sum \mathbf{r}_{AQ_k} \times \mathbf{F}_k = -P \cdot c\,\mathbf{e}_x - 2P \cdot a\,\mathbf{e}_y + 3P \cdot b\,\mathbf{e}_z$$

Resultanten i punkten A är alltså

$$\mathbf{F} = (3,\ 1,\ 2)P$$

$$\mathbf{M}_A = (-c, -2a,\ 3b)P$$

Kraftresultant existerar om

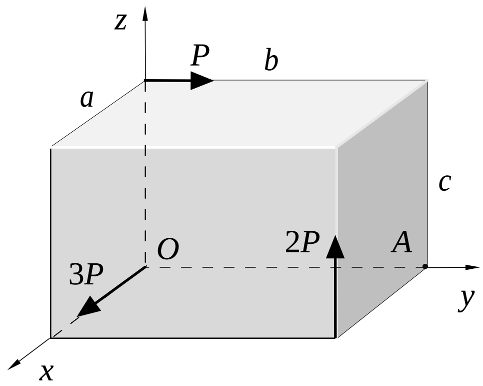
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A = 0.$$

Skalärprodukten är här $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A = (3,\ 1,\ 2)P \cdot (-c, -2a,\ 3b)P$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A = (-3c - 2a + 6b)P^2$$

Kraftresultanten existerar alltså om $-3c - 2a + 6b = 0$.

LP 2.68



För det givna kraftsystemet är kraftsumman

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = 3P\mathbf{e}_x + P\mathbf{e}_y + 2P\mathbf{e}_z$$

eller

$$\mathbf{F} = (3,\ 1,\ 2)P$$

Vid bestämning av kraftmomentet med avseende på O kan noteras att

kraften P ger bara moment kring x-axeln eftersom den är parallell med y-axeln och verkningslinjen skär z-axeln.

Kraften $3P$ ger inget med avseende på O verkningslinjen går genom O.

Kraften $2P$ ger inget moment med avseende på z-axeln eftersom den är parallell med z-axeln.

Kraftmomentet med avseende på O blir.

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = (2P \cdot b - P \cdot c)\mathbf{e}_x - 2P \cdot a\mathbf{e}_y$$

Resultanten i punkten O är alltså

$$\mathbf{F} = (3,\ 1,\ 2)P$$
$$\mathbf{M}_O = ((2b - c)P, -2P \cdot a, 0)$$

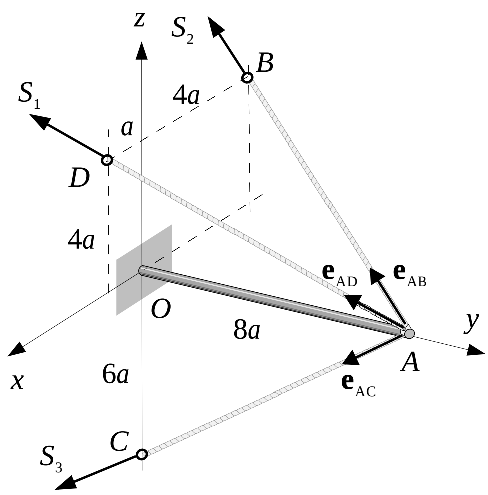
Antag att kraftsumman $\mathbf{F}$ angriper i en punkt med lägevektorn $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)$.
För att kraftsumman skall kunna ersätta alla krafter måste den ge samma moment som de ursprungliga krafterna.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} P = (2b - c, -2a, 0)$$

$$(2y - z)P = 2b - c$$
$$(3z - 2x)P = -2a$$
$$(x - 3y)P = 0$$

LP 2.71



Trådkrafterna bildar ett strålkraftsystem, eftersom alla verkningslinjer har en skärningspunkt i A.

För att kunna vektoraddera krafterna måste vi skriva dem som vektorer. Bestäm först enhetsvektorerna i verkningslinjernas riktningar!

$$\mathbf{r}_{AD} = \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_A = (1,0,4)a - (0,8,0)a = (1,-8,4)a$$

$$\mathbf{e}_{AD} = \frac{\mathbf{r}_{AD}}{|\mathbf{r}_{AD}|} = \frac{(1,-8,4)a}{|(1,-8,4)a|} = \frac{(1,-8,4)}{\sqrt{1+64+16}} = \frac{1}{9}(1,-8,4)$$

På samma sätt fås

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{(-4,-8,4)a}{|(-4,-8,4)a|} = \frac{(-1,-2,1)}{|(-1,-2,1)|} = \frac{(-1,-2,1)}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1)$$

$$\mathbf{e}_{AC} = \frac{\mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AC}|} = \frac{(0,-8,-6)a}{|(0,-8,-6)a|} = \frac{(0,-4,-3)}{|(0,-4,-3)|} = \frac{1}{\sqrt{16+9}}(0,-4,-3) = \frac{1}{5}(0,-4,-3)$$

Kraftsumman är

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 = S_1\mathbf{e}_{AD} + S_2\mathbf{e}_{AB} + S_3\mathbf{e}_{AC}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F} = 9P\cdot\frac{1}{9}(1,-8,4) + 3\sqrt{6}P\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1) + 10P\cdot\frac{1}{5}(0,-4,-3)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F} = (1,-8,4)P + (-3,-6,3)P + (0,-8,-6)P$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F} = (-2,-22,1)P$$

Eftersom kraftmomentet i A är noll för strålkraftsystemet består resultanten i denna punkt av enbart kraftsumman $\mathbf{F} = (-2,-22,1)P$. Kraftresultantens verkningslinje går genom punkten A.

b) Kraftmomentet i punkten B fås enklast med sambandsformeln

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}$$

Insättning ger

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{0} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 4 & 8 & -4 \\ -2 & -22 & 1 \end{vmatrix} Pa = (-80,\, 4,\, -72)Pa$$

Resultanten i punkten B är $\quad \underline{\underline{\mathbf{F} = (-2,-22,1)P}}\,;\ \underline{\underline{\mathbf{M}_B = (-80,\, 4,\, -72)Pa}}$