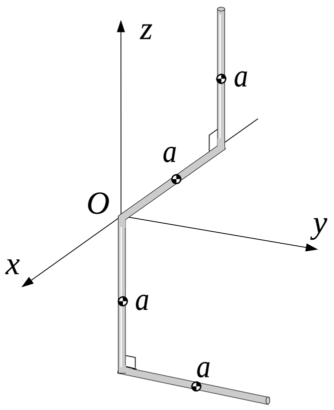
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 4

LP 4.1



Låt kroppens totala massa vara $4m$, så att varje rak stång har massan m och längden a.

Masscentrum för en rak homogen stång ligger självklart i mitten.

Masscentrums x-koordinat för den sammansatta kroppen är allmänt

$$x_G = \frac{m_1 x_{g1} + m_2 x_{g2} + m_3 x_{g3} + m_4 x_{g4}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Insättning ger: (numrera stängerna uppifrån och ned)

$$x_G = \frac{m(-a) + m(-a/2) + m \cdot 0 + m \cdot 0}{4m} = -\frac{3}{8}a$$

Motsvarande för y- och z-koordinaterna blir

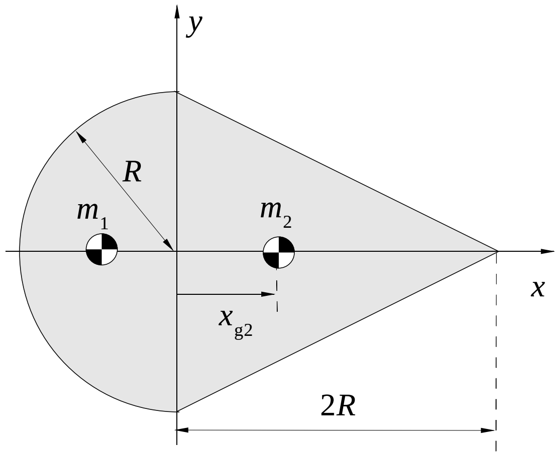
$$y_G = \frac{m \cdot 0 + m \cdot 0 + m \cdot 0 + m(a/2)}{4m} = \frac{1}{8}a$$

$$x_G = \frac{m(a/2) + m \cdot 0 + m(-a/2) + m(-a)}{4m} = -\frac{1}{4}a$$

Lägevektorn från origo till masscentrum G är alltså

$$\mathbf{r}_G = (x_G,\ y_G,\ z_G) = \underline{\underline{\left(-\frac{3}{8},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{4}\right)a}}$$

LP 4.2



Systemets masscentrum G måste på grund av symmetri ligga på x-axeln.

$$\Rightarrow \qquad z_G = 0,\; y_G = 0$$

Vi betecknar kropparna, halvcirkelskivan och triangeln, med index 1 och 2.

Massorna bestäms som areadensiteten gånger arean.

$$m_1 = \rho \frac{1}{2}\pi R^2, \quad m_2 = \rho \frac{1}{2} 2R \cdot 2R$$

Masscentrum för en halvcirkelskiva och triangel har bestämts i teoriboken. Vi utnyttjar resultaten här

$$x_{g1} = -\frac{4R}{3\pi}, \quad x_{g2} = \frac{2R}{3},$$

Masscentrums x-koordinat för den sammansatta kroppen är allmänt

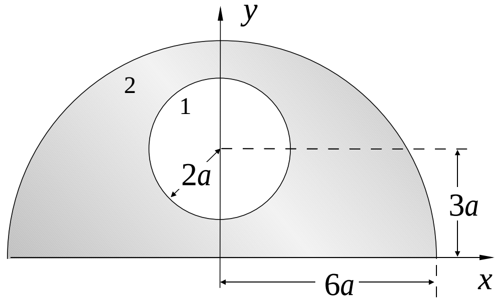
$$x_G = \frac{m_1 x_{g1} + m_2 x_{g2}}{m_1 + m_2}$$

Insättning ger

$$x_G = \frac{\rho \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot \left(-\frac{4R}{3\pi}\right) + \rho \frac{1}{2} 2R \cdot 2R \cdot \frac{2R}{3}}{\rho \frac{1}{2}\pi R^2 + \rho \frac{1}{2} 2R \cdot 2R} = \frac{-\frac{4R}{3} + \frac{8R}{3}}{\pi + 4} = \underline{\underline{\frac{4R}{3(\pi + 4)}}}$$

Man bör med ett närmevärde $x_G \approx 0.2R$ kolla att denna x-koordinat är rimlig.

LP 4.3



Kroppens masscentrum måste på grund av symmetri ligga på y-axeln. Både x- och y-koordinaten för den sökta kroppens masscentrum är noll.

Vi betecknar kropparna, den bortagna cirkelskivan och den resterande kroppen, med index 1 respektive 2. Deras massor betecknas m_1 och m_2.
Den ursprungliga halvcirkelskivan har då massan $m = m_1 + m_2$.

Det är masscentrum för kropp 2 som skall bestämmas.

Massorna bestäms som areadensiteten gånger arean.

$$m_1 = \rho\pi(2a)^2 = 4\rho\pi a^2, \qquad m = \rho\frac{1}{2}\pi(6a)^2 = 18\rho\pi a^2 \qquad \Rightarrow$$

$$m_2 = m - m_1 = \rho\frac{1}{2}\pi(6a)^2 - \rho\pi(2a)^2 = 14\rho\pi a^2$$

Masscentrum för en halvcirkelskiva har bestämts i teoriboken. Vi utnyttjar resultatet här

$$y_{g1} = 3a, \qquad y_G = \frac{4\cdot 6a}{3\pi} = \frac{8a}{\pi}, \qquad y_{g2} = ?$$

Masscentrums y-koordinat för hela halvcirkelskivan är allmänt

$$y_G = \frac{m_1 y_{g1} + m_2 y_{g2}}{m_1 + m_2}$$

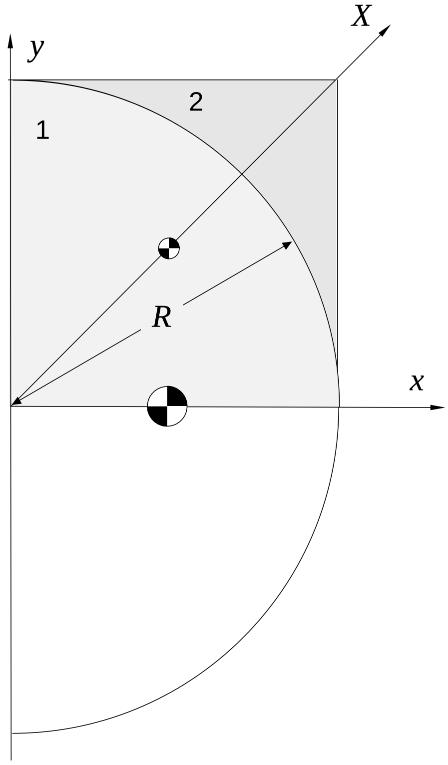
Insättning ger

$$\frac{8a}{\pi} = \frac{4\rho\pi a^2\cdot 3a + 14\rho\pi a^2\cdot y_{g2}}{18\rho\pi a^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{8a}{\pi} = \frac{6a + 7y_{g2}}{9} \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y_{g2} = \frac{6}{7}\left(\frac{12}{\pi} - 1\right)a}} \qquad\qquad y_{g2} \approx 2.4a$$

Från början, för hela halvcirkelskivan är $y_G \approx 2.7a$. När cirkelskivan vid $y = 3a$ tas bort måste masscentrums läge sänkas.

LP 4.4



Kroppens masscentrum måste på grund av symmetri ligga på X-axeln. Det betyder att x- och y-koordinaten för den sökta kroppens masscentrum är lika. Vi bestämmer därför bara x-koordinaten.

Vi betecknar kropparna, den bortagna kvartcirkelskivan och den resterande kroppen, med index 1 respektive 2. Deras massor betecknas m_1 och m_2. Den ursprungliga kvadratiska skivan har då massan $m = m_1 + m_2$.

Masscentrums x-koordinat för kvart-cirkelskivan måste vara densamma som för halvcirkelskivan. Det är dessa masscentra som markerats i figuren. Det är masscentrum för kropp 2 som skall bestämmas.

Massorna bestäms som areadensiteten gånger arean:

$$m_1 = \rho \frac{1}{4}\pi R^2, \qquad m = \rho R^2 \qquad \Rightarrow$$

$$m_2 = m - m_1 = \rho R^2 - \rho \frac{1}{4}\pi R^2 = \rho\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)R^2$$

Masscentrum för en halvcirkelskiva har bestämts i teoriboken och finns i en tabell i problemsamlingen. Vi utnyttjar resultatet här

$$x_{g1} = \frac{4R}{3\pi}, \qquad x_G = \frac{R}{2}, \qquad x_{g2} = ?$$

Masscentrums x-koordinat för hela den kvadratiska skivan är allmänt

$$x_G = \frac{m_1 x_{g1} + m_2 x_{g2}}{m_1 + m_2} \qquad \Rightarrow \qquad x_{g2} = \frac{m x_G - m_1 x_{g1}}{m_2}$$

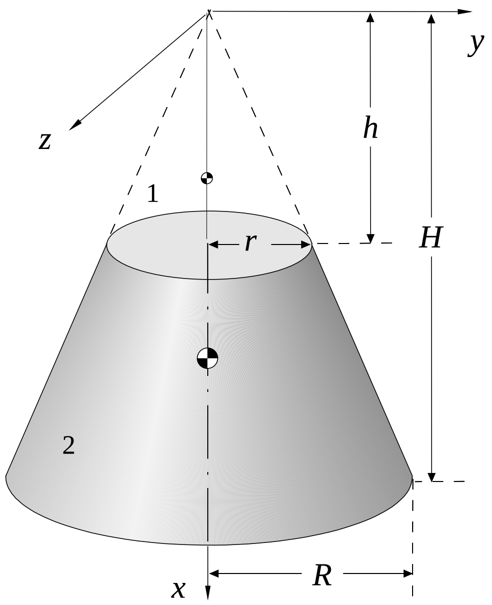
Insättning ger

$$x_{g2} = \frac{\rho R^2 \cdot \frac{R}{2} - \rho \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot \frac{4R}{3\pi}}{\rho\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)R^2} \qquad \Rightarrow$$

$$x_{g2} = y_{g2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{4-\pi}{4}} R = \frac{6-4}{3(4-\pi)} R = \underline{\underline{\frac{2}{3(4-\pi)}}} R \approx 0.8\, R$$

Det numeriska värdet visar att masscentrums koordinater är rimliga.

LP 4.5



Kroppens masscentrum måste på grund av symmetri ligga på x-axeln. Det betyder att y- och z-koordinaterna för den sökta kroppens masscentrum är noll. Vi bestämmer därför bara x-koordinaten.

Vi betecknar kropparna, den bortagna konen och den resterande kroppen, med index 1 respektive 2. Deras massor betecknas m_1 och m_2. Den ursprungliga konen har då massan $m = m_1 + m_2$.

Masscentrum för en kon med höjden h ligger på avståndet $3h/4$ från spetsen. Detta är egentligen en del av problemet, men har bestämts i teoriboken och finns i tabell i problemsamlingen. Det är masscentrums läge för kropp 2 som skall bestämmas.

Toppkonens radie fås med likformighet: $r = \dfrac{h}{H} R$

Massorna bestäms som densiteten gånger arean:

$$m_1 = \rho\pi r^2 h, \qquad m = \rho\pi R^2 H \quad \Rightarrow$$

$$m_2 = m - m_1 = \rho\pi R^2 H - \rho\pi r^2 h = \rho\pi R^2 \left(H - \frac{h^2}{H^2} h \right) = \rho\pi R^2 \frac{H^3 - h^3}{H^2}$$

Masscentrum för en kon har bestämts i teoriboken och finns i en tabell i problemsamlingen. Vi utnyttjar resultatet här

$$x_{g1} = \frac{3h}{4}, \qquad x_G = \frac{3H}{4}, \qquad x_{g2} = ?$$

Masscentrums x-koordinat för hela konen är allmänt

$$x_G = \frac{m_1 x_{g1} + m_2 x_{g2}}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad x_{g2} = \frac{m x_G - m_1 x_{g1}}{m_2}$$

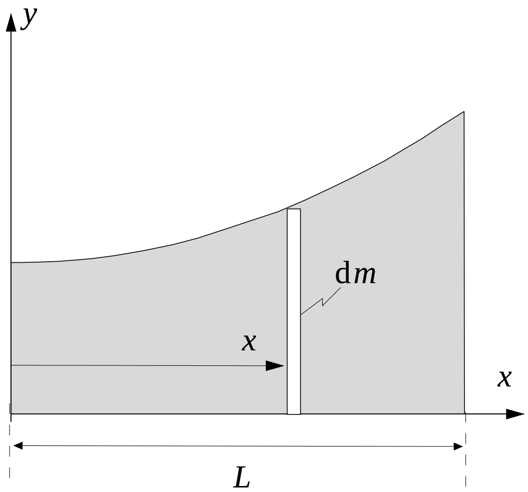
Insättning ger

$$x_{g2} = \frac{\rho\pi R^2 H \cdot \dfrac{3H}{4} - \rho\pi r^2 h \cdot \dfrac{3h}{4}}{\rho\pi R^2 \dfrac{H^3 - h^3}{H^2}} \quad \Rightarrow$$

$$x_{g2} = 3H^2 \frac{R^2 H^2 - r^2 h^2}{4R^2 \left(H^3 - h^3 \right)} \quad \Rightarrow \quad x_{g2} = \frac{3\left(H^4 - h^4 \right)}{4\left(H^3 - h^3 \right)}$$

Kontroll: $h \to 0 \quad \Rightarrow \quad x_{g2} \to \dfrac{3H}{4}$

LP 4.6



Väggen kan sägas bestå av många smala, höga rektanglar. En av dessa rektanglar ligger på avståndet x ifrån y-axeln. Den har bredden $\mathrm{d}x$ och höjden $y = a + bx^2$. Dess masscentrum har läget

$$x_g = x$$

$$y_g = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\left(a + bx^2\right)$$

Denna rektangel väljs här som masselement.

Masselementet är

$$\mathrm{d}m = \rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x$$

Hela kroppens masscentrum fås då enligt formeln för en sammansatt kropps masscentrum:

$$x_G = \frac{\int x_g \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}; \qquad y_G = \frac{\int y_g \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

Insättning ger

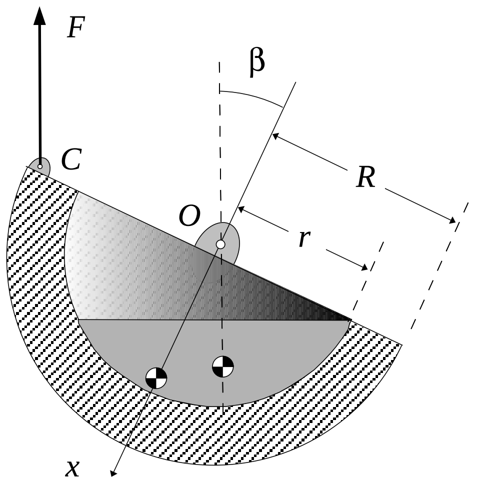
$$x_G = \frac{\int x\rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x}{\int \rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x} = \frac{\int \left(ax + bx^3\right)\mathrm{d}x}{\int \left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x}$$

$$x_G = \frac{\int_0^L \left(ax + bx^3\right)\mathrm{d}x}{\int_0^L \left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x} = \frac{\left[\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4\right]_0^L}{\left[ax + \frac{1}{3}bx^3\right]_0^L} = \frac{\frac{1}{2}aL^2 + \frac{1}{4}bL^4}{aL + \frac{1}{3}bL^3} = \underline{\underline{\frac{6a + 3bL^2}{12a + 4bL^2}L}}$$

$$y_G = \frac{\int_0^L \frac{1}{2}\left(a + bx^2\right)\rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x}{\int_0^L \rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^L \frac{1}{2}\left(a^2 + 2abx^2 + b^2x^4\right)\mathrm{d}x}{\int_0^L \rho\left(a + bx^2\right)\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[a^2x + \frac{2}{3}abx^3 + \frac{1}{5}b^2x^5\right]_0^L}{\left[ax + \frac{1}{3}bx^3\right]_0^L} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2L + \frac{2}{3}abL^3 + \frac{1}{5}b^2L^5}{aL + \frac{1}{3}bL^3} = \underline{\underline{\frac{15a^2 + 10abL^2 + 3b^2L^4}{30a + 10bL^2}}}$$

LP 4.7



Det här är ett jämviktsproblem där man måste bestämma läget för kroppens masscentrum. För att se vilken hävarm till kroppens tyngdkraft som blir aktuell ställer vi först upp jämviktsekvationen. Jämvikt fordrar att kraftmomentet med avseende på upphängningsaxeln AB är noll. Man ser att tyngden av smältan inte har någon hävarm med avseende på denna axel.
Låt behållarens massa vara m_2 och låt x_{g2} vara masscentrums avstånd från upphängningsaxeln AB. I figuren är masscentrum för smältan och behållaren markerade

$$\circlearrowleft O: \quad x_{g2}\cdot m_2 g\sin\beta - R\cos\beta\cdot F = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F=\frac{m_2 g\sin\beta}{R\cos\beta}x_{g2}$$

Vi måste bestämma massan m_2 och masscentrums x-koordinat x_{g2}. Vi betecknar kropparna, det bortagna halvklotet och den resterande kroppen, med index 1 respektive 2. Deras massor betecknas m_1 och m_2. Det ursprungliga halvklotet har då massan $m = m_1 + m_2$. Det är masscentrums läge för kropp 2 som skall bestämmas. Massorna bestäms som densiteten gånger arean:

$$m_1=\rho\frac{2}{3}\pi r^3, \qquad m=\rho\frac{2}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow$$

$$m_2 = m - m_1 = \rho\frac{2}{3}\pi R^3 - \rho\frac{2}{3}\pi r^3 = \rho\frac{2}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$$

Masscentrum för ett halvklot har bestämts i teoriboken och finns i en tabell i problemsamlingen. Vi utnyttjar resultatet här

$$x_{g1}=\frac{3r}{8}, \qquad x_G=\frac{3R}{8}, \qquad x_{g2}=?$$

Masscentrums x-koordinat för hela kroppen är allmänt

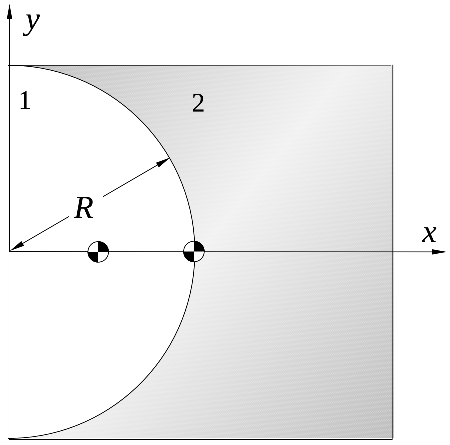
$$x_G=\frac{m_1x_{g1}+m_2x_{g2}}{m_1+m_2} \quad \Rightarrow \quad x_{g2}=\frac{mx_G-m_1x_{g1}}{m_2}$$

Insättning ger

$$x_{g2}=\frac{\rho\frac{2}{3}\pi R^3\cdot\frac{3R}{8}-\rho\frac{2}{3}\pi r^3\cdot\frac{3r}{8}}{\rho\frac{2}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)} \quad \Rightarrow \quad x_{g2}=\frac{\rho\frac{1}{4}\pi\left(R^4-r^4\right)}{\rho\frac{2}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)}=\frac{3\left(R^4-r^4\right)}{8\left(R^3-r^3\right)}$$

$$F=\rho\frac{2}{3}\pi\left(R^3-r^3\right)\cdot\frac{g\tan\beta}{R}\cdot\frac{3\left(R^4-r^4\right)}{8\left(R^3-r^3\right)} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F=\frac{\pi\rho g\tan\beta}{4R}\cdot\left(R^4-r^4\right)}}$$

LP 4.8



Kroppens masscentrum måste på grund av symmetri ligga på x-axeln. Det betyder att y- och z-koordinaterna för den sökta kroppens masscentrum är noll. Vi bestämmer därför bara x-koordinaten.

Vi betecknar kropparna, den bortagna halvcirkelskivan och den resterande kroppen, med index 1 respektive 2. Deras massor betecknas m_1 och m_2. Den ursprungliga kvadratiska skivan har då massan $m = m_1 + m_2$.

Masscentrum för en kon med höjden h ligger på avståndet $3h/4$ från spetsen. Detta är egentligen en del av problemet, men har bestämts i teoriboken och finns i tabell i problemsamlingen. Det är masscentrums läge för kropp 2 som skall bestämmas.

Massorna bestäms som areadensiteten gånger arean:

$$m_1 = \rho \frac{1}{2} \pi R^2, \qquad m = \rho (2R)^2 = 4\rho R^2 \quad \Rightarrow$$

$$m_2 = m - m_1 = 4\rho R^2 - \rho \frac{1}{2} \pi R^2 = \rho R^2 \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)$$

Masscentrum för en halvcirkelskiva har bestämts i teoriboken och finns i en tabell i problemsamlingen. Vi utnyttjar resultatet här

$$x_{g1} = \frac{4R}{3\pi}, \qquad x_G = R, \qquad x_{g2} = ?$$

Masscentrums x-koordinat för hela kroppen är allmänt

$$x_G = \frac{m_1 x_{g1} + m_2 x_{g2}}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad x_{g2} = \frac{m x_G - m_1 x_{g1}}{m_2}$$

Insättning ger

$$x_{g2} = \frac{4\rho R^2 \cdot R - \rho \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot \frac{4R}{3\pi}}{\rho R^2 \left(4 - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \Rightarrow$$

$$x_{g2} = \frac{24 - 4}{24 - 3\pi} R = \underline{\underline{\frac{20}{24 - 3\pi}}} \, R \approx 1.3R$$

Från början, för hela kvadraten, är x-koordinaten för masscentrum $x_G = R$. När halvcirkelskivan tas bort måste masscentrums läge förflyttas åt höger i figuren och vara mindre än $x = 1.5R$.