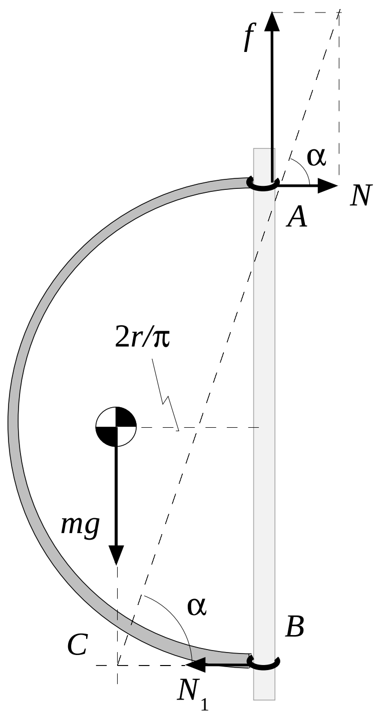
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 5

LP 5.1



Frilägg kurvbågen från den vertikala stången!

Vi börjar med att i figuren sätta ut tyngdkraften, som antas vara mg. Masscentrums avstånd från stången $2r/\pi$, där r är radien, antas här vara känt. Vi har alltså infört två storheter r och m, som inte är givna.

Inför kontaktkrafterna! Vid B finns ingen friktionskraft.

Jämvikt fordrar att kraftsystemet på kurvbågen bildar ett *nollsystem*, dvs att kraftsumman är nollvektorn och kraftmomentet med avseende på någon punkt är nollvektorn:

$$\rightarrow: \quad N - N_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad f - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft B: \quad mg \cdot \frac{2r}{\pi} - N \cdot 2r = 0 \qquad (3)$$

Ekv (2) och (3) ger

$$f = mg \qquad (4)$$

$$N = \frac{mg}{\pi} \qquad (5)$$

Friktionsvillkoret är

$$f \le \mu N \qquad (6)$$

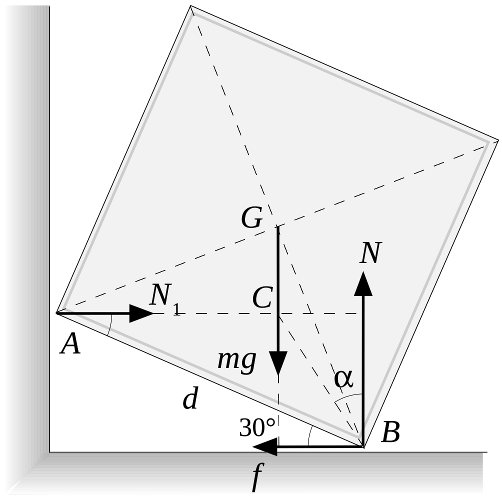
Insättning ger

$$mg \le \mu \frac{mg}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu \ge \pi}}$$

Svaret är dimensionsriktigt eftersom friktionstalet, som är ett förhållande mellan två krafter, har dimensionen 1 (är dimensionslöst).
Är friktionstalet μ orimligt stort? Även om μ i de flesta fall för någorlunda släta ytor oftast är mindre än 1, finns det ingen gräns för hur stort det kan vara. Problemet är ju också så formulerat att svaret ger vilket friktionstal som *krävs*, oberoende av om det finns så stora friktionstal eller inte.

Alternativ lösning: Kurvbågen är en trekraftskropp. Kraftsystemet måste vara ett strålkraftsystem. Verkningslinjen för kontaktkraften i A måste alltså gå genom punkten C (se figur!): $\quad (\tan\alpha =) \quad \dfrac{f}{N} = \dfrac{2r}{2r/\pi} = \pi$

LP 5.2



Frilägg kuben från den vertikala glatta väggen och det sträva golvet!

Vi börjar med att i figuren sätta ut tyngdkraften, som antas vara mg. Kubens kantlängd antas vara d. Vi har alltså infört två storheter d och m, som inte är givna i texten.

Inför kontaktkrafterna! Vid A finns ingen friktionskraft.

Jämvikt fordrar att kraftsystemet på kuben bildar ett *nollsystem*, dvs både kraftsumman och kraftmomentet med avseende på någon punkt är noll.

Vi betraktar gränsfallet mot glidning då lutningsvinkeln är $30°$. Vinkeln mellan linjen BG och horisontalplanet är då $30° + 45°$.

Jämvikt för den frilagda kuben fordrar:

$$\rightarrow: \quad N_1 - f = 0 \tag{1}$$

$$\uparrow: \quad N - mg = 0 \tag{2}$$

$$\curvearrowleft B: \quad mg \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \cos 75° - N_1 \cdot \frac{d}{2} = 0 \tag{3}$$

Ekv (3) och (1) ger

$$f = \frac{2mg}{\sqrt{2}} \cos 75° \tag{4}$$

Ekv (1) ger $\quad N = mg \quad (5)$

Friktionsvillkoret är $\quad f \le \mu N \quad (6)$

Vid gränsfallet mot glidning fås

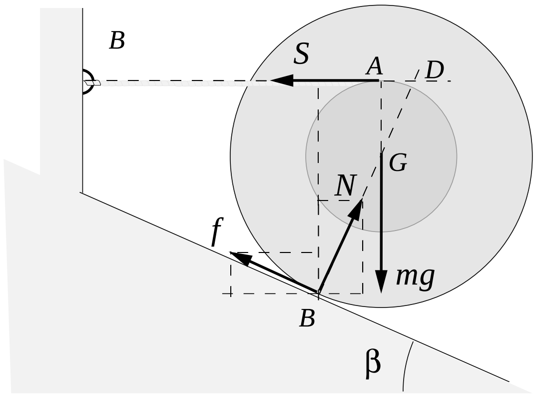
$$\frac{2mg}{\sqrt{2}} \cos 75° = \mu mg \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu = \sqrt{2} \cos 75°}}$$

Kommentar:
Svaret är dimensionsriktigt. En trigonometrisk funktion har dimensionen ett. Svarets närmevärde är $\mu \approx 0.36$ och verkar erfarenhetsmässigt rimligt?

Alternativ lösning: Kuben är en trekraftskropp. Kraftsystemet måste vara ett strålkraftsystem. Verkningslinjen för kontaktkraften i B måste alltså gå genom punkten C (se figur!):

$$(\tan \alpha =) \quad \frac{f}{N} = \frac{\frac{d}{\sqrt{2}} \cos 75}{\frac{d}{2}} = \sqrt{2} \cos 75$$

LP 5.3



Frilägg kabelrullen från underlaget och kabeln! Inför motsvarande krafter f, N och S.

Jämvikt fordrar att kraftsystemet på kabelrullen bildar ett *nollsystem*, dvs både kraftsumman och kraftmomentet med avseende på någon punkt är noll.

Jämvikt för den frilagda kabelrullen fordrar:

$$\rightarrow: \quad -f\cos\beta + N\sin\beta - S = 0 \tag{1}$$

$$\uparrow: \quad N\cos\beta + f\sin\beta - mg = 0 \tag{2}$$

$$G: \quad S\cdot r - f\cdot R = 0 \tag{3}$$

Ekv (3) ger $$S = \frac{R}{r}f \tag{4}$$

Insättning i ekv (1) ger $$-f\cos\beta + N\sin\beta - \frac{R}{r}f = 0 \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{R + r\cos\beta}{r\sin\beta}f \tag{6}$$

Insättning i ekv (2) ger $$\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\left(\frac{R}{r} + \cos\beta\right)f + f\sin\beta = mg \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{mgr\sin\beta}{r + R\cos\beta} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{R + r\cos\beta}{r + R\cos\beta}\,mg \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = \frac{mgR\sin\beta}{r + R\cos\beta}}}$$

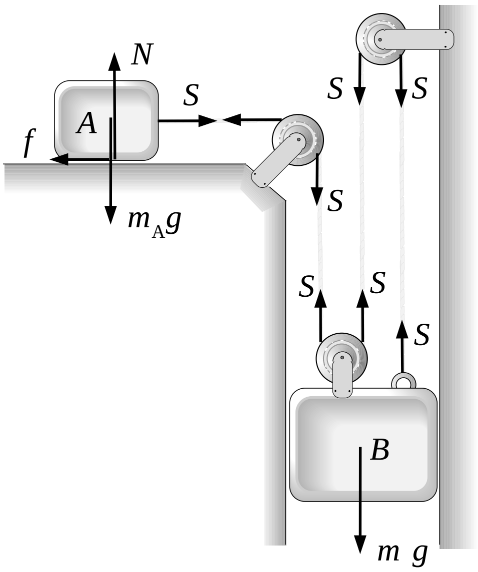
Friktionsvillkoret är $$f \le \mu N \tag{9}$$

Vid gränsfallet mot glidning fås alltså $$\frac{mgr\sin\beta}{r + R\cos\beta} \le \mu\frac{R + r\cos\beta}{r + R\cos\beta}\,mg$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu \ge \frac{r\sin\beta}{R + r\cos\beta}}}$$

Det finns andra sätt att lösa problemet. Tre momentekvationer med avseende på B, D och skärningspunkten till krafterna S och f ger krafterna utan att ett ekvationssystem behöver lösas. Observera att kontaktkraftens verkningslinje måste gå genom A. Det ger direkt friktionstalet!

LP 5.4



Frilägg kropparna från lina och kontaktytor! Inför motsvarande krafter S, f och N.

Trissorna är lätta och lättrörliga. Det betyder att trådkraften är lika på båda sidor om varje trissa. Det följer av momentekvationen med avseende på centrumaxeln för varje trissa.

Jämvikt för kropp B fordrar

$$\uparrow: \quad 3S - m_B g = 0 \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{m_B g}{3}$$

Jämvikt för kropp A fordrar

$$\rightarrow: \quad S - f = 0 \tag{2}$$

$$\uparrow: \quad N - m_A g = 0 \tag{3}$$

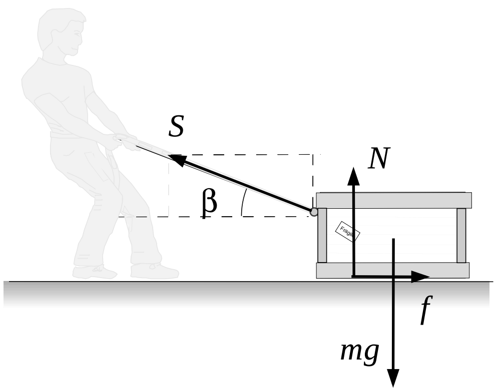
$$\Rightarrow \quad f = \frac{m_B g}{3} \quad \text{och} \quad N = m_A g$$

Friktionsvillkoret är $\quad f \le \mu N \qquad (4)$

Vid gränsfallet mot glidning fås alltså

$$\frac{m_B g}{3} \le \mu m_A g \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mu \ge \frac{m_B}{3m_A}}}$$

LP 5.5



Frilägg lådan från rep och kontaktyta!
Inför motsvarande krafter S, f och N.

Jämvikt för lådan fordrar

$$\rightarrow\ :\quad -S\cos\beta + f = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow\ :\quad S\sin\beta + N - mg = 0 \qquad (2)$$

Vid glidning är friktionskraften fullt utbildad (maximal)

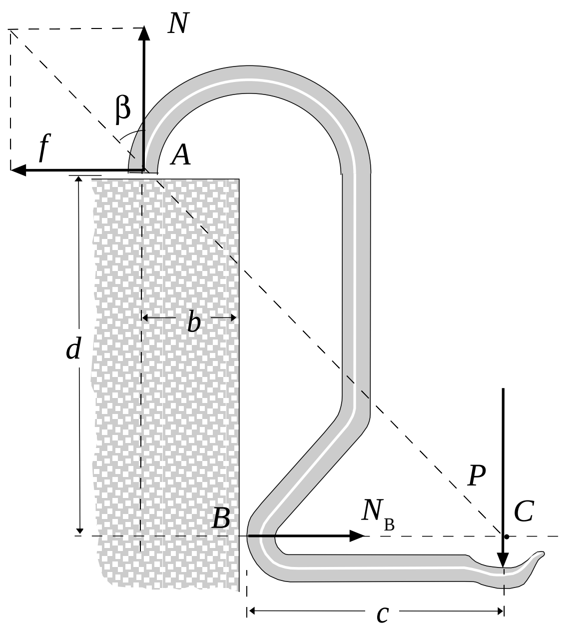
$$f = \mu N \qquad (3)$$

Sätt in detta i ekv (1). För att bestämma kraften S eliminerar vi sedan N genom att multiplicera ekv (1) med μ och dra den från ekv (2):

$$\left.\begin{aligned} -S\cos\beta + \mu N &= 0 \\ \mu S\sin\beta + \mu N - \mu mg &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mu S\sin\beta + S\cos\beta - \mu mg = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{S = \frac{\mu mg}{\mu\sin\beta + \cos\beta}}}$$

LP 5.6



Frilägg hållaren från kontaktytorna!
Inför motsvarande krafter N, f och N_B.
Hållaren antas vara lätt jämfört med tyngden P.

Jämvikt för hållaren fordrar

$$\rightarrow : \quad N_B - f = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow : \quad N - P = 0 \qquad (2)$$

$$\overset{\curvearrowleft}{A}: \quad N_B \cdot d - P \cdot (b + c) = 0 \qquad (3)$$

Detta betyder att

$$N = P \qquad (4)$$

$$f = \frac{b+c}{d} P \qquad (5)$$

Friktionsvillkoret är $\qquad f \leq \mu N \qquad (6)$

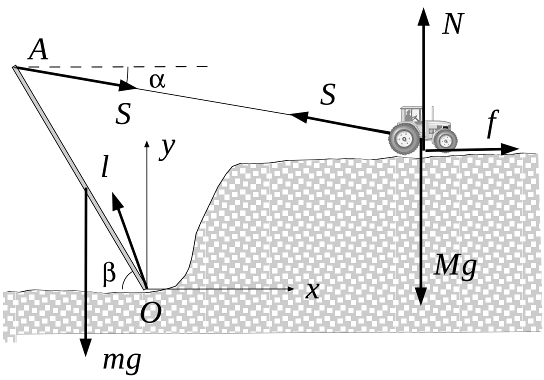
Vid gränsfallet mot glidning fås alltså

$$\frac{b+c}{d} P \leq \mu P \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mu \geq \frac{b+c}{d}}}$$

Kommentar: Hållaren är en trekraftskropp. Kontaktkraften i A måste ha en verkningslinje som går genom C. Det ger en geometrisk lösning för gränsfallet mot glidning:

$$\mu = \frac{f}{N} = \tan \beta = \frac{b+c}{d}$$

LP 5.7



Frilägg både traktorn och stången! Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på varje kropp med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Detta problem är plant och då kan villkoret för varje kropp skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Dela upp kraften S i en horisontell och en vertikal komponent.

Stången $\curvearrowleft O$: $\quad S\sin\alpha \cdot l\cos\beta - S\cos\alpha \cdot l\sin\beta + mg\cdot\frac{l}{2}\cos\beta = 0 \qquad (3)$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{mg\cos\beta}{2\sin(\beta-\alpha)} \tag{4}$$

Den dragkraften måste traktorn klara av att ge.

Traktorn $\rightarrow$: $\quad f - S\cos\alpha = 0 \qquad (5)$

$\uparrow$: $\quad N - Mg + S\sin\alpha = 0 \qquad (6)$

Den maximala friktionskraften är $f = \mu N \qquad (7)$

Ekv(6) ger $\quad N = Mg - S\sin\alpha \qquad (8)$

Ekv(5) ger $\quad f = S\cos\alpha \qquad (9)$

Om resultatet (4) sätts in får vi

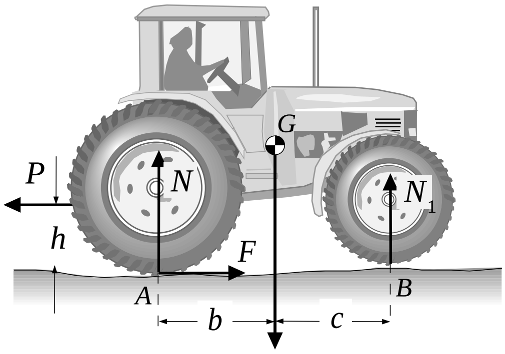
$$N = Mg - \frac{mg\cos\beta\sin\alpha}{2\sin(\beta-\alpha)} \qquad f = \frac{mg\cos\beta\cos\alpha}{2\sin(\beta-\alpha)}$$

Insättning i (7) ger

$$\mu = \frac{f}{N} = \frac{mg\cos\beta\cos\alpha}{2\sin(\beta-\alpha)Mg - mg\cos\beta\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu = \frac{m\cos\beta\cos\alpha}{2M\sin(\beta-\alpha) - m\cos\beta\sin\alpha}}}$$

LP 5.8



Traktorn har konstant hastighet så att den befinner sig i jämvikt. Vi frilägger den först från underlaget och inför motsvarande kontaktkrafter.

Friktionskraften vid framhjulen är noll. Hjulet rullar ju fritt och kraftmomentet med avseende på ett framhjuls axel skulle annars inte vara noll.

Friktionskraften vid bakhjulen är inte noll. Kraftmomentet med avseende på ett bakhjuls blir noll eftersom det också finns ett drivande kraftparsmoment vid axeln.

Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på traktorn med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Detta problem är plant och då kan villkoret för kroppen skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Insättning ger

$$\rightarrow: \quad f - P = 0 \tag{3}$$

$$\uparrow: \quad N + N_1 - mg = 0 \tag{4}$$

$$\curvearrowleft A: \quad N_1 \cdot (b + c) - mg \cdot b + P \cdot h = 0 \tag{5}$$

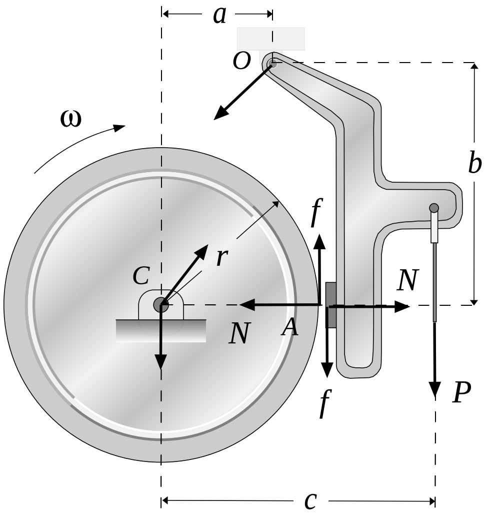
Ekv (5) ger $\qquad \underline{\underline{N_1 = \dfrac{mgb - Ph}{b + c}}} \qquad N_1 \approx 21 \text{ kN}$

Ekvation (4) ger normalkraften på bakhjulen

$$\underline{\underline{N = \frac{mgc + Ph}{b + c}}} \qquad N \approx 19 \text{ kN}$$

Men varför är friktionstalet givet? Jo, man kan kontrollera att friktionskraften verkligen kan matcha kraften P. Den maximala friktionskraften är $f = \mu N \approx 10$ kN så att traktorn klarar verkligen att dra lasten.

LP 5.11



Antag att cylindern roterar medurs. Observera att friktionskraften som krävs är f. Den är alltså given och får ingå i svaret.

Frilägg armen! Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på armen med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Detta problem är plant och då kan villkoret för kroppen skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

I O finns en reaktionskraft som ej efterfrågas. Egentligen söker vi bara en enda kraft, dragkraften P. Enda sättet att eliminera kraften i O från räkningarna är att ställa upp momentekvationen med avseende på en axel genom denna punkt:

$$\text{armen } OA \qquad \curvearrowleft O \;:\quad N\cdot b - f\cdot(r-a) - P\cdot(c-a) = 0 \tag{3}$$

Vi utnyttjar nu också att friktionskraften är fullt utbildad vid glidning $f = \mu N$, eller eftersom kraften f är känd, $N = f/\mu$.

Insättning ger

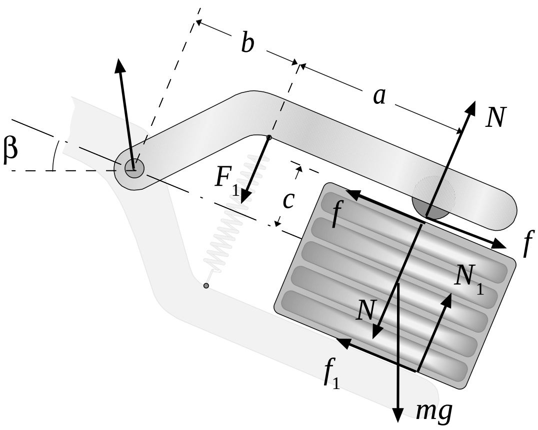
$$\frac{f}{\mu}\cdot b - f\cdot(r-a) = P\cdot(c-a) \qquad \Rightarrow \tag{4}$$

$$P = \frac{b-\mu(r-a)}{\mu(c-a)} f \tag{5}$$

Men cylinderns rotationsriktning är inte känd. Om den roterar moturs skulle friktionskraften ha motsatt riktning. Tecknet framför mittentermen $f\cdot(r-a)$ i ekv(3) skulle då vara plus. Ett fullständigt svar är

$$\underline{\underline{P = \frac{b \pm \mu(r-a)}{\mu(c-a)} f}} \qquad \text{plustecken gäller moturs rotation}$$

LP 5.12



Frilägg vinkelarmen och lådan och inför motsvarande kontaktkrafter! Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på varje kropp med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Detta problem är plant och då kan villkoret för varje kropp skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

För armen ställer vi bara upp momentekvationen med avseende på B**,** eftersom den ointressanta reaktionskraften i B kommer att ingå i alla andra jämviktsekvationer.

Armen $\quad B: \quad N(b+a) - f \cdot c - F_1 \cdot b = 0 \quad (3)$

Lådan $\quad \nearrow: \quad N_1 - N - mg\cos\beta = 0 \quad (4)$

$\nwarrow: \quad f_1 + f - mg\sin\beta = 0 \quad (5)$

Friktionsvillkoren är $f \le \mu N$ och $f_1 \le \mu N_1$.

Vid gränsfallet mot glidning gäller $f = \mu N$ och $f_1 = \mu N_1$ (6)

Insättning i ekv (5) ger $\quad \mu N_1 + \mu N - mg\sin\beta = 0 \quad (7)$

Multiplicera ekv (4) med $-\mu$! $\quad -\mu N_1 + \mu N + mg\mu\cos\beta = 0 \quad (8)$

Addera ekv (7) och (8)!

Resultatet är $\quad 2\mu N - mg\sin\beta + mg\mu\cos\beta = 0$

$$N = \frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{2\mu} mg \quad f = \mu N = \frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{2} mg$$

Insättning i ekv (3) ger

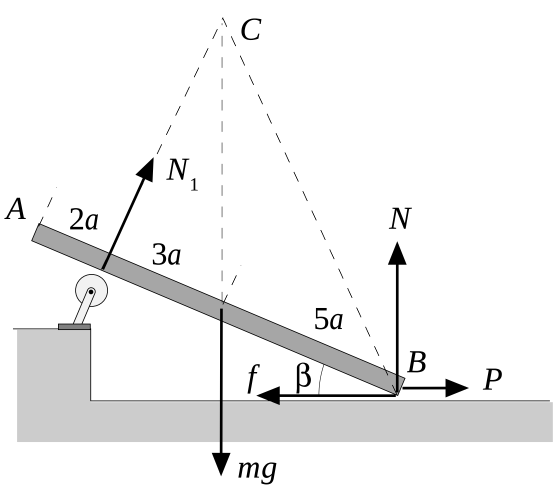
$$F_1 = \frac{c}{b} f - \frac{b+a}{b} N \quad F_1 = \frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{2b} mgc - \frac{\sin\beta - \mu\cos\beta}{2\mu b} mg(b+a)$$

$$F_1 = \frac{mg}{2\mu b}(a + b - \mu c)(\mu\cos\beta - \sin\beta)$$

LP 5.15

Frilägg skivan från trissa och underlag!

Skivans tyngd är mg**.** Vid kontaktytan mot den lättrörliga trissan finns bara en normalkraft N_1. Vid B verkar både kontaktkraften och dragkraften P. Vi utgår från att denna dragkraft är riktad åt höger.



Jämvikt för den frilagda skivan fordrar:

$$\rightarrow: \quad P - f + N_1 \sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N + N_1 \cos\beta - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft B: \quad mg \cdot 5a\cos\beta - N_1 \cdot 8a = 0 \qquad (3)$$

Ekv (3) ger normalkraften $\quad N_1 = \frac{5}{8} mg\cos\beta \qquad (4)$

Ekv (2) ger då normalkraften $\quad N = \left(1 - \frac{5}{8}\cos^2\beta\right)mg \qquad (5)$

Ekv (1) ger då friktionskraften $\quad f = P + \frac{5}{8} mg\sin\beta\cos\beta \qquad (6)$

Vid gränsfallet mot glidning är friktionskraften maximal, dvs

$$f = f_{\max} = \mu N = \mu\left(1 - \frac{5}{8}\cos^2\beta\right)mg \qquad (7)$$

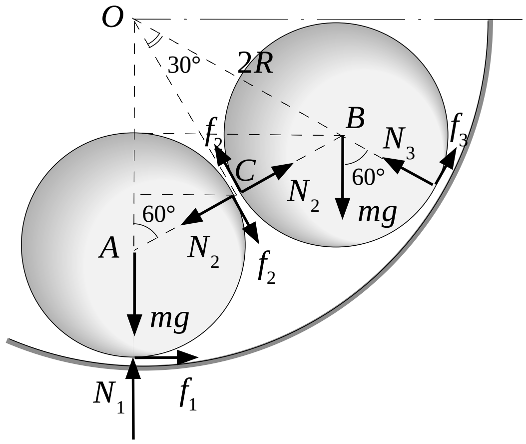
Vid jämvikt måste denna friktionskraft vara den som ges av ekv (6). Det ger ekvationen

$$P + \frac{5}{8} mg\sin\beta\cos\beta = \mu\left(1 - \frac{5}{8}\cos^2\beta\right)mg \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{P = \left[\mu\left(1 - \frac{5}{8}\cos^2\beta\right) - \frac{5}{8}\sin\beta\cos\beta\right]mg}}$$

Kommentar:
Vi har här utgått från att det verkligen krävs en kraft P *åt höger* för att skivan ska börja röra sig. Det betyder att vi förutsätter att friktionstalet μ är tillräckligt stort. Det minsta friktionstal för vilket lösningen gäller är det värde som ger $P = 0$ i svaret. Om friktionstalet är mindre krävs ju en yttre kraft åt vänster för att skivan ska vara i jämvikt. Ökas denna kraft åt vänster så störs jämvikten vid ett annat värde på den yttre kraften.

LP 5.19



Frilägg kloten! De två tyngdkrafterna balanseras vid jämvikt av de tre kontaktkrafterna. Vid kontaktstället C mellan de båda kloten utnyttjas Newtons tredje lag, lagen om verkan och motverkan.

Antalet obekanta krafter är sex, dvs lika många som antalet jämviktsekvationer som kan ställas upp.
Dessutom söker vi det speciella friktionstal som gör att jämvikten störs av att glidning inträffar. Denna obekanta storhet ges av friktionsvillkoret.
Vi gör här för övningens skull en lösning med enbart momentekvationer.

Jämvikt för det frilagda systemet fordrar:

Undre klotet: $\overset{\curvearrowleft}{A}$: $f_1 \cdot R - f_2 \cdot R = 0$ (1)

Övre klotet: $\overset{\curvearrowleft}{B}$: $f_3 \cdot R - f_2 \cdot R = 0$ (2)

Dessa ekvationer ger att friktionskrafterna är lika stora och vi kan därför släppa index i den följande lösningen:

$$f_1 = f_2 = f_3 \equiv f \qquad (3)$$

Hela systemet $\overset{\curvearrowleft}{O}$: $f_1 \cdot 3R + f_3 \cdot 3R - mg \cdot R\sqrt{3} = 0$ (4)

$\Rightarrow$ $f = \dfrac{\sqrt{3}}{6} mg$ (5)

Undre klotet: $\overset{\curvearrowleft}{C}$: $(mg - N_1) \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2} + f_1 \cdot \dfrac{3R}{2} = 0$ (6)

Övre klotet: $\overset{\curvearrowleft}{O}$: $(-mg + N_2) \cdot R\sqrt{3} + f_3 \cdot 3R = 0$ (7)

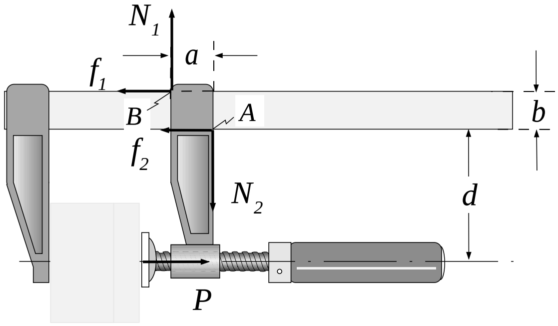
Övre klotet: $\overset{\curvearrowleft}{C}$: $(-mg + N_3) \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2} + f_3 \cdot \dfrac{3R}{2} = 0$ (8)

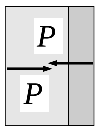
Ekv (6) och (5) ger $N_1 = \dfrac{3}{2} mg$

Ekv (7) och (8), som ser likadana ut ger $N_2 = \dfrac{1}{2} mg \qquad N_3 = \dfrac{1}{2} mg$

Friktionsvillkoret är $|\mathbf{f}| \le \mu |\mathbf{N}|$. Vid jämvikt måste villkoret gälla vid alla kontaktställen. Eftersom friktionskrafterna är lika stora här störs jämvikten lättast där normalkraften är minst:

LP 5.20





Frilägg den rörliga delen av tvingen! Den påverkas först av en lika stor kraft P som också pressar ihop det som skall limmas. Kraften vill vrida den frilagda kroppen så att kontakt med den andra fixa delen i första hand uppträder i A och B. Inför kontaktkrafterna i dessa punkter enligt figuren!

Jämvikt för den frilagda delen fordrar:

$$\rightarrow: \quad -f_1 + P - f_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N_1 - N_2 = 0 \qquad (2)$$

$$A: \quad P \cdot d - N_1 \cdot a + f_1 \cdot b = 0 \qquad (3)$$

Ekv (2) visar att normalkrafterna N_1 och N_2 är lika: $N_2 = N_1 \equiv N$
Vid fullt utbildad friktion måste friktionskrafterna alltså också vara lika stora:

$$f_1 = \mu N_1 \qquad f_2 = \mu N_2 \qquad \Rightarrow \qquad f_1 = f_2 \equiv f = \mu N$$

Om detta införes i (1) och (3) fås

$$P = 2f$$

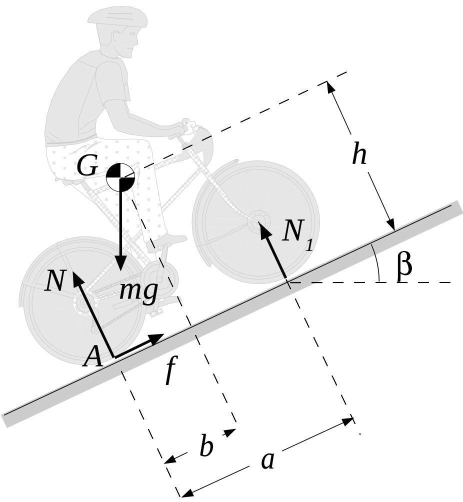
$$P \cdot d - Na + fb = 0 \qquad \Rightarrow P \cdot d - Na + \frac{P}{2} b = 0$$

Friktionsvillkoren är $f_1 \leq \mu N_1$ och $f_2 \leq \mu N_2$.

$$\mu \geq \frac{f}{N} \qquad \Rightarrow \qquad \mu \geq \frac{Pa}{2Pd + Pb} \qquad \Rightarrow \qquad \mu(2d + b) \geq a$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{d \geq \frac{a}{2\mu} - \frac{b}{2}}}$$

LP 5.23



Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på kroppen med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Detta problem är plant och då kan villkoret skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Om hela ekipaget friläggs från underlaget och motsvarande kontaktkrafter införs i figuren får vi ekvationssystemet

$$\nearrow: \quad f - mg\sin\beta = 0 \tag{3}$$

$$\nwarrow: \quad N + N_1 - mg\cos\beta = 0 \tag{4}$$

$$\curvearrowleft A: \quad N_1 \cdot a + mg\sin\beta \cdot h - mg\cos\beta \cdot b = 0 \tag{5}$$

Normalkrafterna och friktionskraften fås enkelt:

$$f = mg\sin\beta \tag{6}$$

$$N_1 = \frac{1}{a}(b\cos\beta - h\sin\beta)mg \tag{7}$$

$$N = \left[\left(1 - \frac{b}{a}\right)\cos\beta + \frac{h}{a}\sin\beta\right]mg \tag{8}$$

Friktionsvillkoret är $\qquad f \le \mu N \qquad (9)$

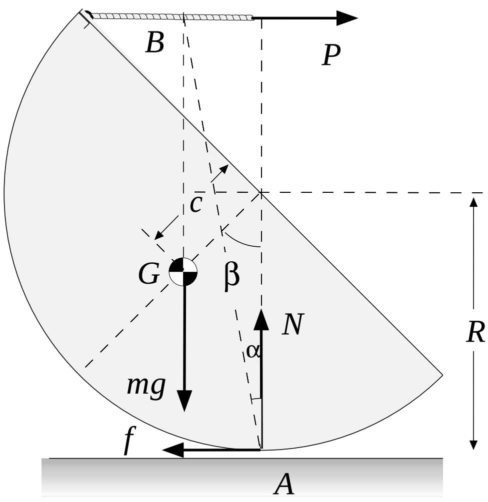
Vid gränsfallet mot glidning fås alltså

$$\frac{\sin\beta}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\cos\beta + \frac{h}{a}\sin\beta} = \mu \qquad \Rightarrow \qquad \tan\beta = \mu\left[\left(1 - \frac{b}{a}\right) + \frac{h}{a}\tan\beta\right]$$

$$(a - \mu h)\tan\beta = \mu(a - b) \qquad \Rightarrow \qquad \tan\beta = \frac{\mu(a - b)}{a - \mu h}$$

Om b ökar minskar β.

LP 5.26



Jämvikt fordrar att resultanten till hela kraftsystemet på kroppen med avseende på vilken punkt som helst är nollvektorn:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Detta problem är plant och då kan villkoret skrivas:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Om kroppen friläggs från underlaget och motsvarande kontaktkraft införs i figuren får vi ekvationssystemet

$$\rightarrow: \quad P - f = 0 \tag{3}$$

$$\uparrow: \quad N - mg = 0 \tag{4}$$

$$\curvearrowleft A: \quad mg\frac{4R}{3\pi}\sin\beta - P(R + R\sin\beta) = 0 \tag{5}$$

Kontaktkraftens komponenter fås alltså enkelt direkt ur (3) och (4):

$$f = P \tag{6}$$

$$N = mg \tag{7}$$

Vridningsvinkeln β bestäms ur (5): $$\sin\beta = \frac{3\pi P}{4mg - 3\pi P} \tag{8}$$

Detta är vridningsvinkeln om friktionskraften klarar att balansera P.

Friktionsvillkoret är $$f \le \mu N \tag{9}$$

Vid gränsfallet mot glidning fås alltså $P = \mu mg$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sin\beta = \frac{3\pi\mu}{4 - 3\pi\mu}}}$$

Kommentar: Resultatet fås direkt om man inser att cylindern är en trekraftskropp. Kontaktkraftens verkningslinje måste alltså gå genom P. Geometrin ger då

$$\mu = \tan\alpha = \frac{3\pi\mu}{4 - 3\pi\mu}$$