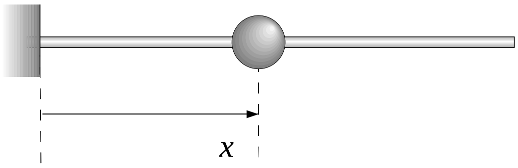
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 6

LP 6.1



Accelerationen söks. Vi utnyttjar definitionerna av

hastighet: $\dot{x} \equiv \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

och

acceleration: $\ddot{x} \equiv \dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}$

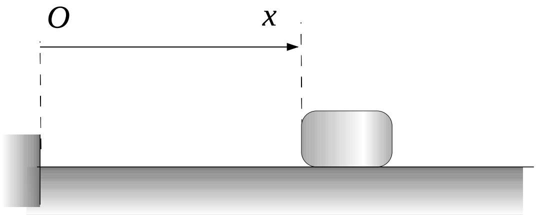
Här är läget x en funktion av tiden.

$$x = a + bt^2 + ct^3 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{x} = 0 + 2bt + 3ct^2 \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{x} = 2b + 2 \cdot 3ct \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\ddot{x} = 2b + 6ct}}$$

LP 6.2



Vi utnyttjar definitionerna på

hastighet: $\dot{x} \equiv \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

och

acceleration: $\ddot{x} \equiv \dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}$

Hastigheten fås genom integrering av accelerationen. Läget fås genom integrering av hastigheten. De undre integrationsgränserna bestäms av

begynnelsevillkoret: $\quad t = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = v \end{cases}$

Vi integrerar här varje term för sig:

$$\ddot{x} = k + pt \quad \Rightarrow$$

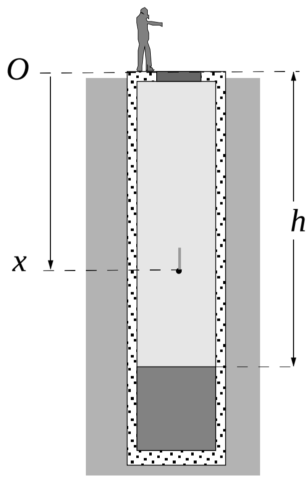
$$\dot{x} - v = k(t - 0) + \frac{1}{2}pt^2 - 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = v + kt + \frac{1}{2}pt^2 \quad \Rightarrow$$

$$x - d = vt - 0 + \frac{1}{2}kt^2 - 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}pt^3 - 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = d + vt + \frac{1}{2}kt^2 + \frac{1}{6}pt^3}}$$

Kontrollera resultatet genom att derivera!

LP 6.3



Begynnelsevillkoret är givet:

$$t = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

Accelerationen (=tyngdaccelerationen g) är också given. Hastigheten fås genom att utnyttja definitionen på acceleration:

$$\ddot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}$$

Vi utnyttjar begynnelsevillkoret vid integreringen:

$$\ddot{x} = g$$

$$\dot{x} = gt + 0$$

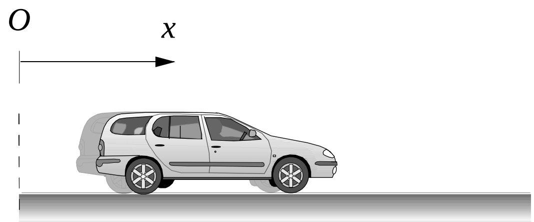
$$x = \frac{1}{2}gt^2 + 0$$

$x = h$ ger tidpunkten $t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ och sluthastigheten $v_1 = gt_1 = \sqrt{2gh}$.

Stenarna rör sig på samma sätt. Tidsintervallet mellan plasken är därför τ.

Sluthastigheten är $\underline{\underline{v_1 = \sqrt{2gh}}}$

LP 6.4



Om hastigheten är given kan accelerationen fås med derivering. Läget fås med integrering och då behövs också en integrationskonstant. Begynnelsevillkoret är:

$$t = 0 \qquad x = 0$$

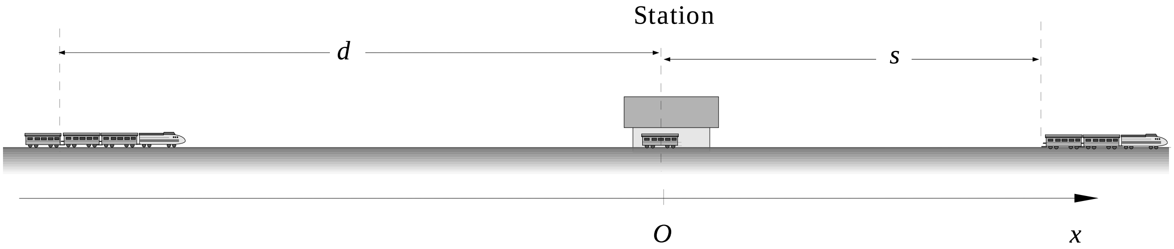
a) Accelerationen fås genom att utnyttja definitionen av acceleration:

$$\ddot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = kt^2 + ct \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\ddot{x} = 2kt + c}}$$

b) Läget fås genom att utnyttja definitionen på hastighet $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

$$\dot{x} = kt^2 + ct \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x = \frac{1}{3}kt^3 + \frac{1}{2}ct^2 + 0}}$$

LP 6.5



Det *kan* vara naturligt att studera vagnens och tågets rörelse var för sig. Vi lägger origo vid stationen, betecknar tågets fart v_0 och antar att vagnens acceleration är $\ddot{x} = -a$. Tågets x-koordinat fås enkelt i den högra kolumnen men varken farten v_0 eller tiden t_1 då vagnen når stationen är kända.

Vagn

$$\ddot{x} = -a$$

$$\dot{x} = -at + v_0$$

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t - d$$

$$\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad -at_1 + v_0 = 0$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t - d = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0}{a} \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}a\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{a}\right) - d = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{v_0{}^2}{2a} = d \quad \Rightarrow \quad v_0{}^2 = 2ad$$

$$\Rightarrow \quad v_0 t_1 = \frac{v_0{}^2}{a} = 2d$$

Tåg

$$\ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = v_0$$

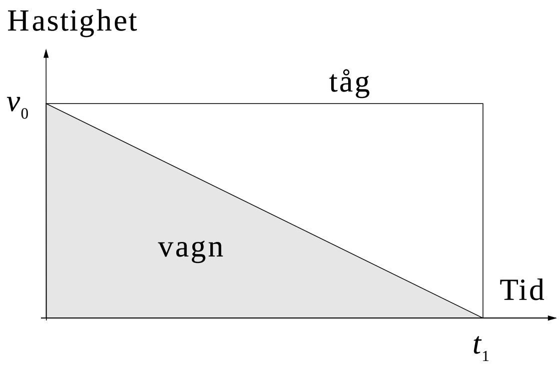
$$x = v_0 t - d$$

$$x_1 = v_0 t_1 - d$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 2d - d = d$$

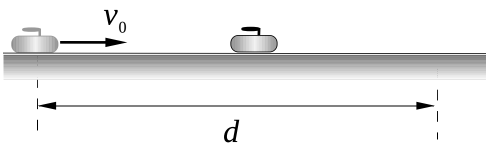
Betydligt enklare blir lösningen om man först studerar hastighet-tid-diagrammet för rörelserna.



Vagnen bromsas med konstant acceleration. Hastigheten avtar då rätlinjigt. Tågets hastighet är konstant.

Arean under hastighetskurvorna är detsamma som sträckan. Tåget har därför kommit dubbelt så långt när vagnen når stationen.

LP 6.6



Accelerationen är given: $\ddot{x} = -\mu g$.

Hastigheten fås genom integrering av accelerationen. Läget fås genom integrering av hastigheten. De undre integrationsgränserna bestäms av

$$\text{begynnelsevillkoret:} \qquad t = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases}$$

Vi lägger alltså origo i den punkt där stenen är vid $t = 0$. Vi får

$$\ddot{x} = -\mu g \quad \Rightarrow$$
$$\dot{x} - v_0 = -\mu g(t-0) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = v_0 - \mu g t \quad \Rightarrow$$
$$x - 0 = v_0(t-0) - \left(\frac{1}{2}\mu g t^2 - 0\right)$$
$$\Rightarrow \quad x = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2$$

Med vårt val av origo motsvaras glidsträckan av lägeskoordinaten då hastigheten är noll. Denna tidpunkt kallas t_1

$$(\dot{x} =)\ v_0 - \mu g t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{\mu g}$$

Läget vid denna tidpunkt är då

$$x_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}\mu g t_1^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = v_0\left(\frac{v_0}{\mu g}\right) - \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 \quad \Rightarrow$$
$$x_1 = \frac{v_0^{\ 2}}{\mu g} - \frac{v_0^{\ 2}}{2\mu g} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{v_0^{\ 2}}{2\mu g} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{d = \frac{v_0^{\ 2}}{2\mu g}}}$$

Detta är en onödigt krånglig metod som i ett allmännare fall blir mödosam.

Det gäller här i stället att inse att tiden är helt ointressant. Den finns inte på något sätt med i problemformuleringen. Vi söker ju i princip läget som funktion av hastigheten. Med beteckningen $\dot{x} \equiv v$ kan accelerationen skrivas

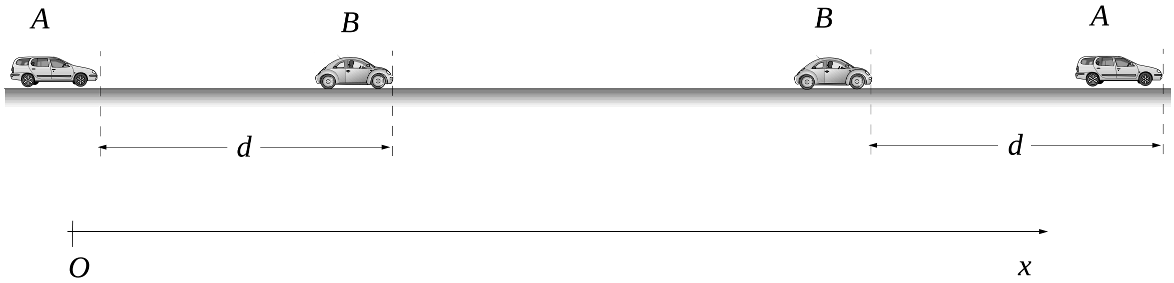
$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Alltså, lösningen blir

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\mu g \quad \Rightarrow \quad v\mathrm{d}v = -\mu g \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_0^x -\mu g \mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$
$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^{\ 2}}{2} = -\mu g x - (-0)$$

Läget då hastigheten $v = 0$ är då $\qquad x_1 = \dfrac{v_0^{\ 2}}{2\mu g}$

LP 6.7



Vi betraktar först bilarnas rörelser var för sig. Vi lägger origo där den bakre bilen är vid omkörningens början. Omkörningen antas vara avslutad efter tiden t_1.

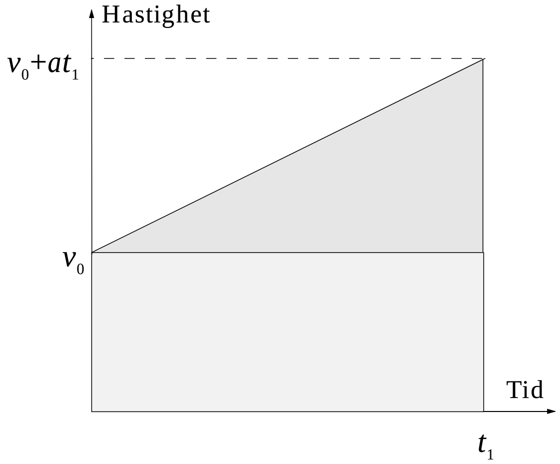
A	B
$\ddot{x}_A = a$	$\ddot{x}_B = 0$
$\dot{x}_A = at + v_0$	$\dot{x}_B = v_0$
$x_A = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + 0$	$x_B = v_0 t + d$
	$x_1 = v_0 t_1 - d$

Vid tiden $t = t_1$ gäller alltså $x_A - x_B = d$. Insättning ger

$$\frac{1}{2}at_1{}^2 + v_0 t_1 - v_0 t_1 - d = d \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}at_1{}^2 = 2d \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{4d}{a}} \quad \Rightarrow$$

$$\left(x_A\right)_{t=t_1} = \frac{1}{2}a\left(\frac{4d}{a}\right) + v_0\sqrt{\frac{4d}{a}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\left(x_A\right)_{t=t_1} = 2d + 2v_0\sqrt{\frac{d}{a}}}}$$

Något enklare blir lösningen om man studerar den relativa rörelsen, den omkörande bilens rörelse relativt den omkörda.



$$\left(\ddot{x}_{\text{rel}}\right)_A = a \quad \Rightarrow$$

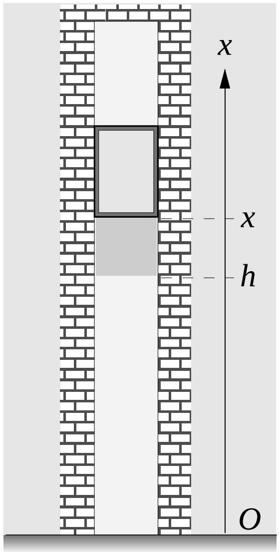
$$\left(\dot{x}_{\text{rel}}\right)_A = at \quad \Rightarrow$$

$$\left(x_{\text{rel}}\right)_A = \frac{1}{2}at^2 - d$$

$$\left(x_{\text{rel}}\right)_A = d \quad \text{ger} \quad \frac{1}{2}at_1{}^2 = 2d$$

A har kört sträckan $2d$ längre än B. Denna sträcka motsvaras av triangel-arean i diagrammet. Då tiden t_1 alltså är känd kan den totala sträckan för A också bestämmas ur diagrammet.

LP 6.8



Accelerationen är given:

$$\ddot{x} = -g\,.$$

Begynnelsevillkoret är

$$t = 0 \qquad \begin{cases} x = h \\ \dot{x} = v_0 \end{cases}$$

Både hastigheten och läget fås genom integrering. Begynnelsevillkoret ger integrationskonstanterna

$$\ddot{x} = -g$$

$$\dot{x} = -gt + v_0$$

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h$$

Vid vilken tidpunkt inträffar vändläget? $\dot{x} = 0$ ger $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$.

Insättes detta fås läget eller den maximala höjden

$$x_1 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) + h \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{x_1 = \frac{v_0^{\,2}}{2g} + h}}$$

Vid vilken tidpunkt når hissen botten läget?

$$x = 0 \text{ ger } -\frac{1}{2}gt_2^{\,2} + v_0 t_2 + h = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_2^{\,2} - \frac{2v_0}{g}t_2 - \frac{2h}{g}h = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$t_2 = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^{\,2}}{g^2} + \frac{2gh}{g^2}}$$

Sätt in detta i hastighetsuttrycket $\dot{x} = -gt + v_0$!

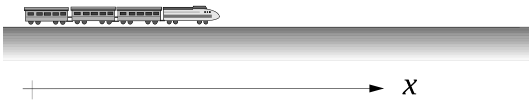
$$\dot{x}_2 = -g\left(\frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^{\,2}}{g^2} + \frac{2gh}{g^2}}\right) + v_0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_2 = -\sqrt{v_0^{\,2} + 2gh}$$

På uppvägen liksom nervägen är farten v_0 vid $x = h$. Hastighetstillskottet efter fritt fall från höjden h är $\sqrt{2gh}$.

Alternativt utnyttjas att accelerationen kan skrivas $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -g \qquad \Rightarrow$

$$\int v\,\mathrm{d}v = -\int g\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^{\,2}}{2} = 0 + gh \qquad \Rightarrow \qquad v = \pm\sqrt{v_0^{\,2} + 2gh}$$

LP 6.9



Hastigheten är given:

$$\dot{x} \equiv v = v_1\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Vi utnyttjar definitionerna av

hastighet: $\dot{x} \equiv \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

och

acceleration: $\ddot{x} \equiv \dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}$

a) Accelerationen fås genom tidsderivering:

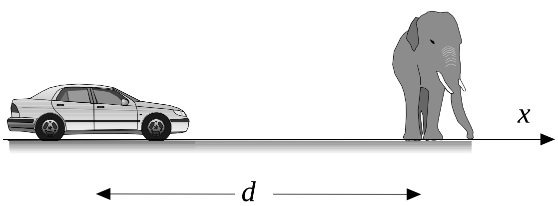
$$\ddot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v_1(-k)e^{-kt} = \underline{\underline{kv_1 e^{-kt}}}$$

b) Läget fås med integrering. Begynnelsevillkoret är: $t = 0, \quad x = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_1\left(1 - e^{-kt}\right) \quad \Rightarrow \quad \int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t v_1\left(1 - e^{-kt}\right)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x - 0 = \left[v_1 t + \frac{v_1}{k}e^{-kt}\right]_0^t \quad \Rightarrow$$

$$x = v_1\left[t + \frac{1}{k}\left(e^{-kt} - 0\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = v_1\left(t + \frac{1}{k}e^{-kt}\right)}}$$

LP 6.10



Begynnelsevillkoret är givet

$$t = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases}$$

Under tidsintervallet $(0, \tau)$ är hastigheten konstant:

$$\dot{x} = v_0 \quad \Rightarrow \quad x = v_0 t \quad \Rightarrow \quad (x)_{t=\tau} = v_0\tau$$

Efter denna tid är retardationen konstant:

$$\ddot{x} = -r \quad \Rightarrow$$

Vid $t = t_1$ är $x = d$ $\Rightarrow$

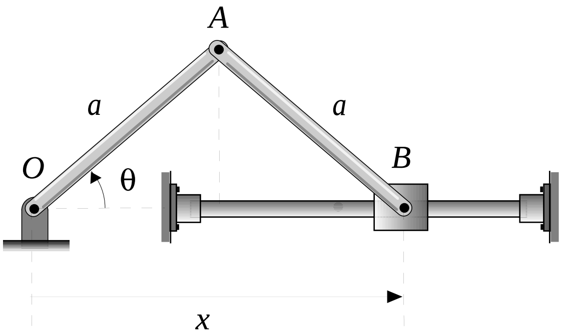
$$d = -\frac{r}{2}\left(t_1 - \tau\right)^2 + v_0\left(t_1 - \tau\right) + v_0\tau \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{d = -\frac{r}{2}\left(t_1 - \tau\right)^2 + v_0 t_1}}$$

Om reaktionstiden är $\tau = t_1$ så blir avståndet $d = v_0 t_1$

Om reaktionstiden är $\tau = 0$ så blir avståndet $d = -\dfrac{r t_1^{\,2}}{2} + v_0 t_1$

LP 6.11



Hylsans läge ges av koordinaten

$$x = 2 \cdot a\cos\theta \qquad (1)$$

Hastigheten blir

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2a\cos\theta) =$$
$$-2a\sin\theta \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -2a\sin\theta \cdot \dot{\theta} \qquad (2)$$

Detta är hastigheten som funktion av tiden. Vid den aktuella tidpunkten fås

$$\underline{\underline{\dot{x} = -2a\omega\sin\theta}} \qquad (3)$$

Observera att ω är ett ögonblicksvärde på vinkelhastigheten. När hastigheten tidsderiveras får vi inte anta att vinkelhastigheten är konstant. Vi deriverar hellre uttrycket (2) där $\dot{\theta}$ är en tidsfunktion.

Accelerationen blir

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-2a\sin\theta \cdot \dot{\theta}\right) = -2a\cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 - 2a\sin\theta \cdot \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \qquad (4)$$

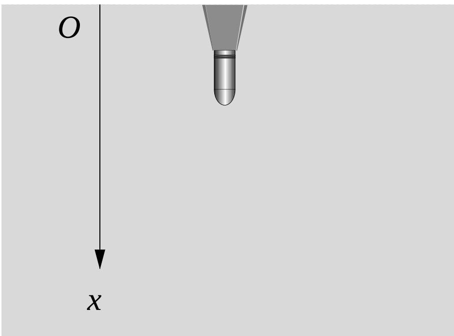
$$\ddot{x} = -2a\cos\theta \cdot \omega^2 - 2a\sin\theta \cdot \alpha \quad \Rightarrow \qquad (5)$$

$$\underline{\underline{\ddot{x} = -2a\left(\omega^2\cos\theta + \alpha\sin\theta\right)}} \qquad (6)$$

Kommentarer:
Att stången OA har en vinkelhastighet kring axeln vid O behöver inte betyda att den går hela varvet runt. Den kan t ex svänga fram och tillbaka några grader kring en viss vinkel θ_0.

Om vinkelhastigheten är konstant visar (3) att en cirkelrörelse hos A motsvaras av en rätlinjig sinusformad svängning hos hylsan.

LP 6.14



Accelerationen är given som funktion av hastigheten:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^3 \tag{1}$$

Begynnelsevillkoret är

$$t = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases}$$

Det går inte att integrera högerledet i ekv (1) med avseende på tiden, eftersom det fordrar att hastigheten v är en känd funktion av tiden.

Separera variabler! $$\frac{\mathrm{d}v}{v^3} = -k\mathrm{d}t \tag{2}$$

Tidsintegration ger $$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^3} = -k\int_0^t \mathrm{d}t \tag{3}$$

$$\left[-\frac{1}{2}v^{-2}\right]_{v_0}^{v} = -kt \tag{4}$$

$$-v^{-2} + v_0^{-2} = -2kt \tag{5}$$

$$v^{-2} = v_0^{-2} + 2kt \tag{6}$$

$$\underline{\underline{v = \left(\frac{1}{v_0^2} + 2kt\right)^{-\frac{1}{2}}}} \tag{7}$$

b) Med definitionen på hastighet får vi in lägeskoordinaten och (7) blir

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{1}{v_0^2} + 2kt\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{8}$$

Ekvationen går att tidsintegrera direkt:

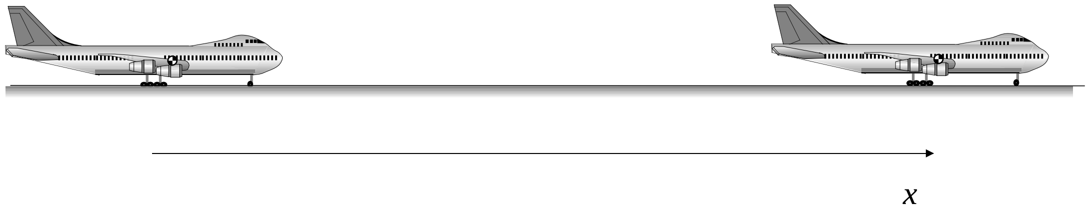
$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \left(\frac{1}{v_0^2} + 2kt\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \tag{9}$$

$$x - 0 = \left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{v_0^2} + 2kt\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^t \tag{10}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{k}\left[\left(\frac{1}{v_0^2} + 2kt\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{v_0}\right]}} \tag{11}$$

Vid $t = 0$ är $x = 0$ och $\dot{x} = v_0$. Begynnelsevillkoret är alltså satisfierat. Med tidsderiveringar av svaret kan man också få en kontroll.

LP 6.15



Accelerationen är given som funktion av hastigheten:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0 - kv^2 \tag{1}$$

Begynnelsevillkoret är $\qquad t = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$

Det går inte att integrera högerledet i ekv (1) med avseende på tiden, eftersom det fordrar att hastigheten v är en känd funktion av tiden. Eftersom tiden inte är intressant i problemet väljer vi att utnyttja det alternativa uttrycket för acceleration:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

Ekv (1) kan då skrivas

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a_0 - kv^2 \tag{3}$$

Separera variabler och integrera!

$$\int \frac{v\mathrm{d}v}{a_0 - kv^2} = \int \mathrm{d}x \tag{4}$$

Multiplicera med $-2k$ så att täljaren är nämnarens derivata!

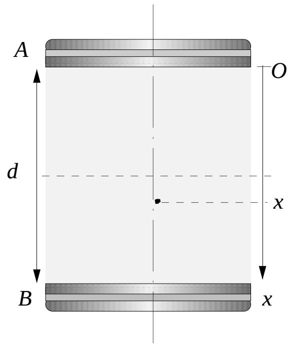
$$\int \frac{-2k\,v\mathrm{d}v}{a_0 - kv^2} = -2k\int \mathrm{d}x \tag{5}$$

Integrationsgränserna är $v = 0$ och $v = v_1$ samt $x = 0$ och $x = x_1$.

$$\Rightarrow \qquad \ln\frac{a_0 - kv_1^{\,2}}{a_0} = -2kx_1 \tag{6}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{x_1 = -\frac{1}{2k}\ln\left(1 - \frac{kv_1^{\,2}}{a_0}\right)}}$$

LP 6.17



Accelerationen är given som funktion av hastigheten:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kx \qquad (1)$$

Begynnelsevillkoret är

$$t = 0 \qquad \begin{cases} x = d/2 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

a) Det går inte att integrera högerledet i ekv (1) med avseende på tiden, eftersom det fordrar att läget x är en känd funktion av tiden. Med beteckningen $v \equiv \dot{x}$ kan accelerationen med kedjeregeln emellertid skrivas

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad (2)$$

Insättning i (1) ger
$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = kx \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad v\mathrm{d}v = kx\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int_0^v v\mathrm{d}v = \int_{d/2}^x kx\mathrm{d}x \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow v^2 = k\left(x^2 - \frac{d^2}{4}\right) \qquad (5)$$

$x = d$ ger
$$v_1{}^2 = k\left(d^2 - \frac{d^2}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_1 = \frac{d}{2}\sqrt{3k}}} \qquad (6)$$

b)

Ekv (5) kan skrivas
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{k\left(x^2 - \frac{d^2}{4}\right)} \qquad (7)$$

Separera variabler!
$$\int_{d/2}^{d} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{k\left(x^2 - \frac{d^2}{4}\right)}} = \int_0^{t_1} \mathrm{d}t \qquad (8)$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}\int_{d/2}^{d} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - \frac{d^2}{4}}} \qquad (9)$$

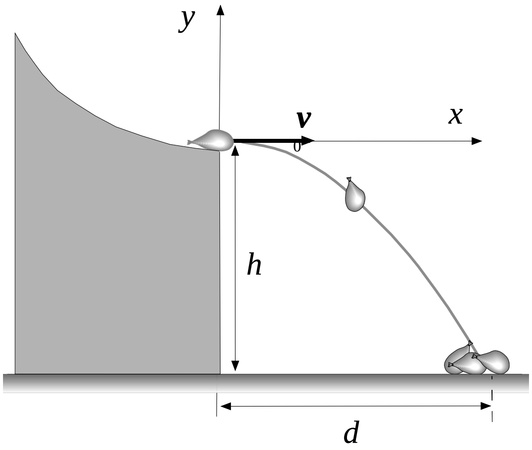
Integraltabell ger
$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 - \frac{d^2}{4}}\right)\right]_{d/2}^{d} \qquad (10)$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}\left[\ln\left(d + \sqrt{\frac{3}{4}}d\right) - \ln\left(\frac{d}{2}\right)\right] \qquad (11)$$

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}\ln\frac{d + \sqrt{\frac{3}{4}}d}{\frac{d}{2}} \qquad (12)$$

Svar:
$$\underline{\underline{t_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)}}$$

LP 6.25



Vid fritt fall är accelerationen

$$\mathbf{a} = -g\,\mathbf{e}_y$$

där g är tyngdaccelerationen.

Med figurens koordinatsystem blir begynnelsevillkoret

$$t = 0 \quad \begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{0} = (0, 0, 0) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0) \end{cases}$$

Komponentvis tidsintegration, med hänsyn taget till begynnelsevillkoret, av den givna accelerationen ger:

$$\ddot{x} = 0 \qquad (1) \qquad\qquad \ddot{y} = -g \qquad (4)$$

$$\dot{x} = v_0 \qquad (2) \qquad\qquad \dot{y} = -gt + 0 \qquad (5)$$

$$x = v_0\,t + 0 \qquad (3) \qquad\qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + 0 \qquad (6)$$

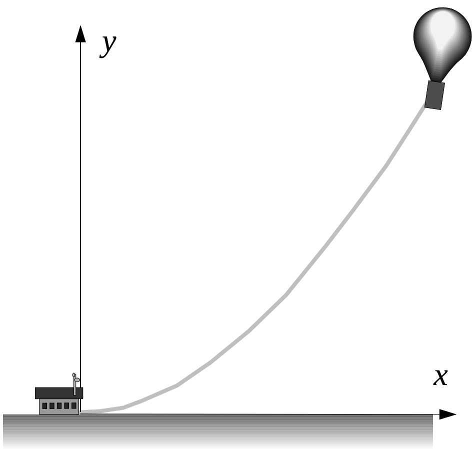
När säcken når golvet är $y = -h$.
Den tid det tar att falla till golvet fås då ur ekv (6):

$$-h = -\frac{1}{2}gt_1^{\,2} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}}} \qquad (7)$$

Det sökta avståndet d fås då om tiden $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ sätts in i ekv (3):

$$d = v_0\,t_1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{d = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}}} \qquad (8)$$

LP 6.26



Ballongens koordinater är givna:

$$x = v_x t \qquad (1)$$
$$y = kx^2 \qquad (2)$$

Läget som funktion av tiden är då känt, eftersom x i (2) ges av (1) och v_x samt k är konstanter enligt texten.

a) Lägevektorns komponenter motsvaras av ballongens koordinater:

$$\mathbf{r} = \left(x,\, y,\, z\right) = \left(v_x t,\, kx^2,\, 0\right) = \left(v_x t,\, k{v_x}^2 t^2,\, 0\right) \qquad (3)$$

b) Enligt definitionen på hastighet $\mathbf{v} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$ fås

$$\mathbf{v} = \left(\dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z}\right) = \left(v_x,\, 2k{v_x}^2 t,\, 0\right) \qquad (4)$$

c) Enligt definitionen på acceleration $\mathbf{a} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$ fås

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_x,\, 2k{v_x}^2 t,\, 0\right) = \left(0,\, 2k{v_x}^2,\, 0\right) \qquad (5)$$

Om koordinatsystemet är angivet kan man svara med vektorerna i komponent-form. Om minsta tveksamhet föreligger, tex om flera koordinatsystem har använts, är det bättre att ange resultatet med basvektorerna:

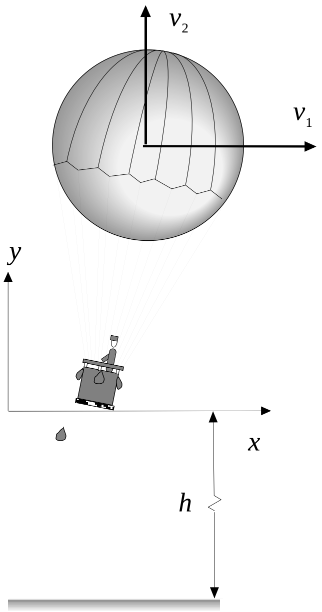
Svar:

a) $\mathbf{r} = v_x t\, \mathbf{e}_x + k{v_x}^2 t^2\, \mathbf{e}_y$

b) $\mathbf{v} = v_x\, \mathbf{e}_x + 2k{v_x}^2 t\, \mathbf{e}_y$

c) $\mathbf{a} = 2k{v_x}^2\, \mathbf{e}_y$

LP 6.29



Vi ska räkna på säckens rörelse. Vid fritt fall utan luftmotstånd är accelerationen

$$\mathbf{a} = -g\,\mathbf{e}_y$$

där g är tyngdaccelerationen.
Begynnelsevillkoret är givet i texten. Säcken har samma läge och hastighet som ballongen, då den släpps. Med figurens koordinatsystem blir begynnelsevillkoret

$$t = 0 \quad \begin{cases} \mathbf{r} = (0, h, 0) \\ \mathbf{v} = (v_1, v_2, 0) \end{cases}$$

Komponentvis tidsintegration, med hänsyn taget till begynnelsevillkoret, av den givna accelerationen ger:

$$\ddot{x} = 0 \qquad (1) \qquad\qquad \ddot{y} = -g \qquad (4)$$

$$\dot{x} = v_1 \qquad (2) \qquad\qquad \dot{y} = -gt + v_2 \qquad (5)$$

$$x = v_1 t + 0 \qquad (3) \qquad\qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t + h \qquad (6)$$

Säcken når marken då $y = 0$. Detta villkor i ekv (6) ger tidpunkten t_1:

$$-\frac{1}{2}g t_1^{\,2} + v_2 t_1 + h = 0 \qquad (7)$$

Vi löser andragradsekvationen:

$$t_1^{\,2} - \frac{2v_2}{g}t_1 - \frac{2h}{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_2}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_2}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{t_1 = \frac{v_2}{g}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_2^{\,2}}}\right]}} \qquad (8)$$

Säckens fart är $\quad |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \qquad (9)$

Insättning av (2) och (5) ger $\quad v = \sqrt{v_1^{\,2} + (-gt + v_2)^2} \qquad (10)$

Vid tidpunkten t_1 är farten

$$v_{(t=t_1)} = \sqrt{v_1^{\,2} + (-gt_1 + v_2)^2} = \sqrt{v_1^{\,2} + g^2 t_1^{\,2} + v_2^{\,2} - 2g v_2 t_1} \qquad (11)$$

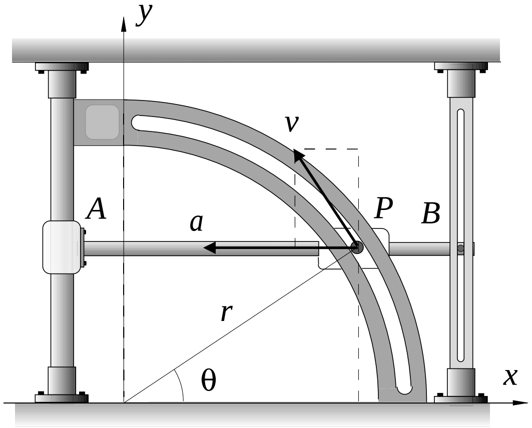
Med ekv (7) fås $\quad \underline{\underline{v_{(t=t_1)} = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + 2gh}}} \qquad (12)$

Bestämningen av farten kan göras enklare. Vi vet ju att $v_x = v_1$ är konstant, medan v_y bestäms som funktion av läget enligt

$$v_y \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}x} = -g \quad \Rightarrow \quad v_y \mathrm{d}v_y = -g\mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad \frac{v_y^{\,2}}{2} - \frac{v_2^{\,2}}{2} = -gy - (-gh)$$

För $y = 0$ fås då $v_y^{\,2} = v_2^{\,2} + 2gh$.

LP 6.37



Givet:

$$\dot{y} = v_0 \qquad (1)$$
$$\ddot{y} = 0 \qquad (2)$$

Bankurvans ekvation är

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (3)$$

Sambandet mellan $\dot{x}$ och $\dot{y}$ kan fås med differentiering av ekv (3):

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y} \qquad (5)$$

eller $$\dot{x} = -\frac{y}{x}v_0 \qquad (6)$$

Farten är

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\left(-\frac{y}{x}v_0\right)^2 + {v_0}^2} = v_0\sqrt{\frac{y^2 + x^2}{x^2}} = v_0\frac{r}{x} = \underline{\underline{\frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}v_0}} \qquad (7)$$

(I stället för differentieringen kan man utnyttja vinkeln θ och skriva

$v_x = -v\sin\theta$, där $v_0 = v\cos\theta$ och $\tan\theta = y/x$)

För att bestämma accelerationen tidsderiverar vi ekv (6). Vi vet ju att $\ddot{y} = 0$

$$\ddot{x} = -\dot{y}x^{-1}v_0 + (-y)(-x^{-2})\dot{x}v_0 \qquad (8)$$

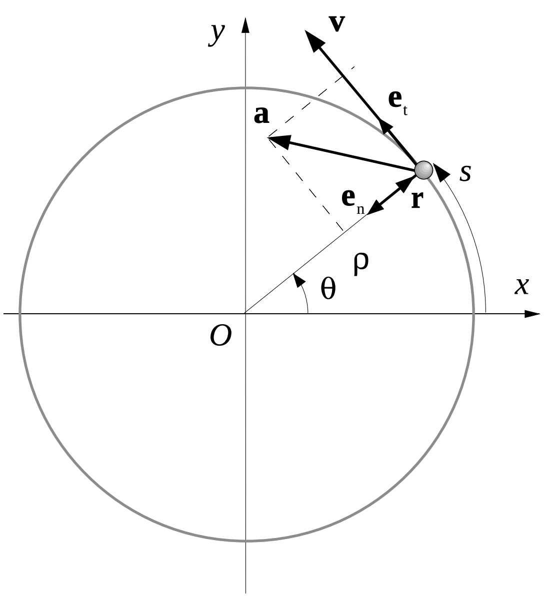
Sätt in (1) och (5) och utnyttja (3)!

$$\ddot{x} = -v_0x^{-1}v_0 - \frac{y^2}{x^3}{v_0}^2 = -{v_0}^2\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3}\right) = -{v_0}^2\frac{r^2}{(r^2 - y^2)^{3/2}} \qquad (9)$$

Accelerationens storlek är $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$ men eftersom $\ddot{y} = 0$ är $a = |\ddot{x}|$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{a = \frac{{v_0}^2 r^2}{(r^2 - y^2)^{3/2}}}}$$

LP 6.43



Inför det naturliga koordinatsystemet med koordinaten $s = 0$ vid tiden $t = 0$ då bilen startar, och basvektorerna $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$ enligt figur.

Begynnelsevillkoret är

$$t = 0 \quad \begin{cases} s = 0 \\ \dot{s} = 0 \end{cases}$$

Accelerationen ges av det allmänna uttrycket

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n \qquad (1)$$

Den tangentiella accelerationen är given i texten:

$$a_t = \ddot{s} = \frac{\mathrm{d}\dot{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t} = a_1 \qquad (2)$$

Accelerationen i normalriktningen bestäms enligt (1) av farten och krökningsradien ρ. Farten fås genom integrering av (2):

$$v_\mathrm{t} = a_1 t + 0 \qquad (3)$$

Insättning i (1) med utnyttjande av (2) och (3) ger

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{e}_t + \frac{{v_t}^2}{\rho}\mathbf{e}_n = a_1\mathbf{e}_t + \frac{(a_1 t)^2}{\rho}\mathbf{e}_n \qquad (4)$$

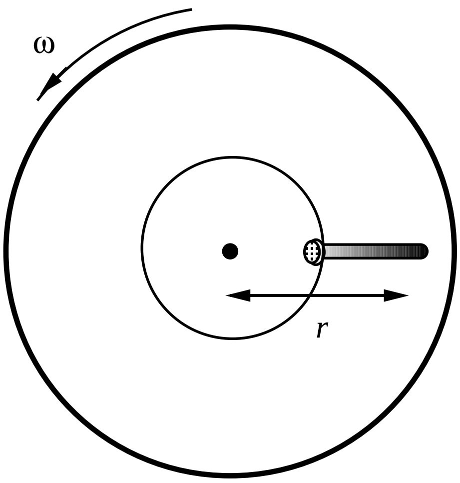
Accelerationens storlek är alltså

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + \left(\frac{{a_1}^2 t^2}{\rho}\right)^2} = \underline{\underline{a_1\sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2}{a_1}^2 t^4}}} \qquad (5)$$

Speciellt för $t = 6$ s, $\rho = 60$ m och $a_1 = 2\ \mathrm{m/s^2}$ fås

$$a = 2\sqrt{2.44}\ \mathrm{m/s^2} \approx 3.1\ \mathrm{m/s^2}.$$

LP 6.44



Accelerationen i det naturliga systemet ges av det allmänna uttrycket

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{1}$$

I det här fallet har vi en cirkelrörelse med radien (krökningsradien) r. Eftersom båglängden är $s = r\theta$, så kan farten och fartökningen per tid uttryckas i vinkelhastigheten: $\dot{s} = r\dot{\theta}$, $\ddot{s} = r\ddot{\theta}$.

Accelerationens normalkomponent kallas ofta för centripetalaccelerationen:

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{r^2\dot{\theta}^2}{r} = r\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

a) Vid en viss vinkelhastighet $\dot{\theta} = \omega_1$ blir centripetalaccelerationen lika med den föreskrivna accelerationen $a = 1000g$. Insättning i (2) ger

$$1000g = r\omega_1^{\;2} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{1000g}{r}} \tag{4}$$

Enheten för vinkelhastighet är rad/s. Varvtalet fås genom att dividera med 2π och multiplicera med 60. Alltså, antalet varv per minut blir

$$\underline{\underline{\frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{1000g}{r}}}} \tag{5}$$

Närmevärdet för $r = 0.25$ m och $g = 10$ m/s^2 blir 1910 rpm

b) Om vinkelaccelerationen $\ddot{\theta}$ är konstant $\ddot{\theta} = \alpha$ fås med integrering av definitionen på vinkelaccelerationen

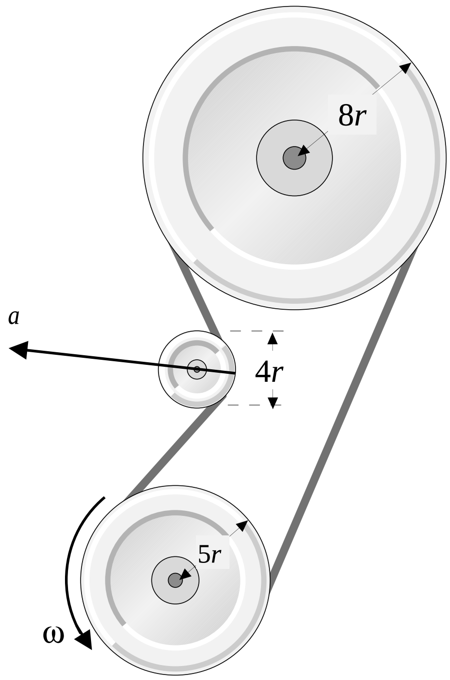
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha \tag{6}$$

$$\omega_1 = \alpha t_1 \tag{7}$$

Vinkelaccelerationen blir alltså $\alpha = \dfrac{\omega_1}{t_1}$. Insättning av vinkelhastigheten ovan ger

$$\underline{\underline{\alpha = \frac{1}{t_1}\sqrt{\frac{1000g}{r}}}} \qquad \text{eller} \qquad \alpha \approx 3.3 \text{ rad/s}^2$$

LP 6.45



Det allmänna uttrycket för accelerationen i det naturliga systemet är

$$\boxed{\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n}$$

Farten för varje del av bandet måste vara en och densamma. Eftersom vinkelhastigheten är känd för den understa cylindern är farten

$$\dot{s} = 5r \cdot \omega \qquad (1)$$

Konstant fart $\Rightarrow \quad \ddot{s} = 0$ (2)

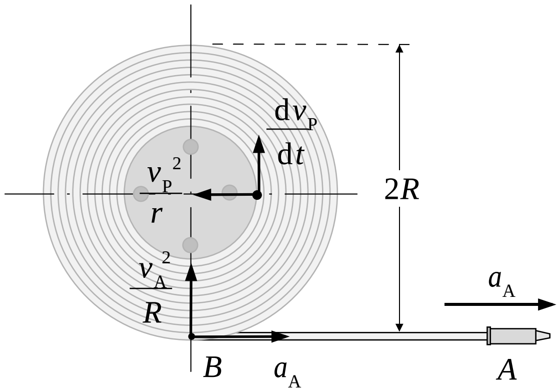
Accelerationen (i normalriktningen) är alltså störst då krökningsradien ρ är minst, dvs för den minsta cylindern

$$\Rightarrow \qquad a_{\max} = \frac{\dot{s}^2}{\rho_{\min}} = \frac{(5r\omega)^2}{2r} = \underline{\underline{\frac{25r\omega^2}{2}}}$$

Numeriskt fås

$$a_{\max} = \frac{25 \cdot 0.03 \cdot 300^2}{2}\ \mathrm{m/s^2} \approx 3.4 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s^2}$$

LP 6.46



Det allmänna uttrycket för accelerationen i det naturliga systemet är

$$\boxed{\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n} \qquad (1)$$

Trummans vinkelhastighet är

$$\dot{\theta} = \frac{v_B}{R} = \frac{v_A}{R} \qquad \Rightarrow$$

Vinkelaccelerationen är

$$\ddot{\theta} = \frac{a_A}{R}$$

(men $a_A \neq a_B$ eftersom B också har en acceleration inåt)

Farten för punkten P är $\quad v_P = r\dot{\theta} = r\frac{v_A}{R}$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dv_P}{dt} = r\ddot{\theta} = r\frac{a_A}{R}$$

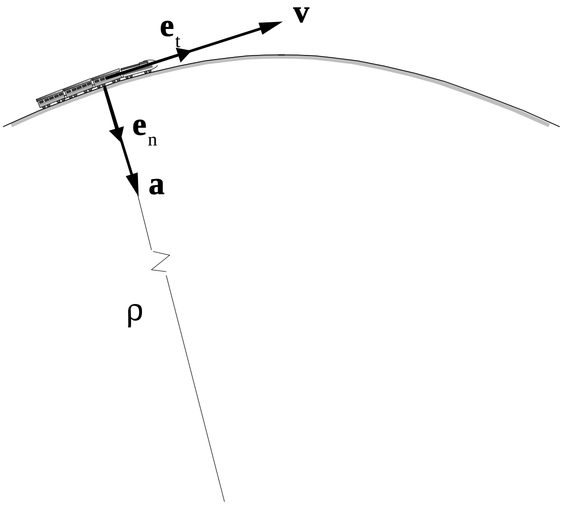
(men $\frac{dv_P}{dt} \neq a_P$, eftersom P också har en centripetalacceleration)

Insättning i ekv (1) ger

$$\mathbf{a}_P = \frac{r}{R}a_A\,\mathbf{e}_t + \frac{1}{r}\left(\frac{r}{R}v_A\right)^2\mathbf{e}_n$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mathbf{a}_P = \frac{r}{R}a_A\,\mathbf{e}_t + \frac{r}{R^2}{v_A}^2\mathbf{e}_n}}$$

LP 6.48



Accelerationen i det naturliga systemet ges av det allmänna uttrycket

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{1}$$

Här antas tågets fart vara konstant så att

$$\dot{s} = v = 360 \text{ km/h} \tag{2}$$

och

$$\ddot{s} = 0 \tag{3}$$

Accelerationen är då enligt ekv (1)

$$\mathbf{a} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{4}$$

Accelerationens storlek får enligt texten ej överstiga värdet g. Detta villkor kan skrivas

$$\frac{v^2}{\rho} < g \qquad \text{eller} \qquad \frac{v^2}{g} < \rho \tag{5}$$

vilket ger en minsta tillåten krökningsradie

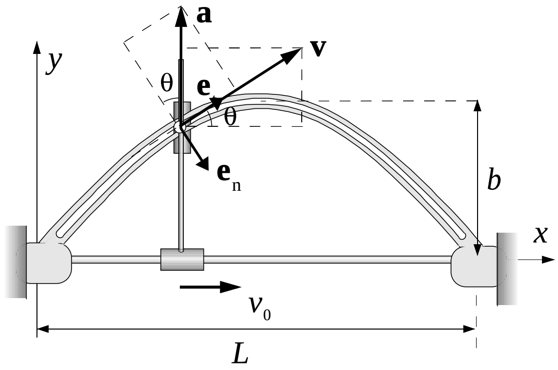
$$\rho_{\min} = \frac{v^2}{g} \tag{6}$$

Numeriskt fås

$$\rho_{\min} = \frac{v^2}{g} = \frac{(360 \text{ km/h})^2}{10 \text{ m/s}^2} = \frac{(100 \text{ m/s})^2}{10 \text{ m/s}^2} = 1000 \text{ m} \tag{7}$$

Svar: Krökningsradien måste vara större än $\underline{\underline{\rho_{\min} = \frac{v^2}{g}}}$ eller $\rho_{\min} = 1 \text{ km}$

LP 6.50



Accelerationen ges i det naturliga systemet av det allmänna uttrycket

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{1}$$

Här är emellertid bankurvans ekvation given i det kartesiska koordinatsystemet så att vi börjar med att bestämma uttryck för hastighet och acceleration i detta system.

Vi vet att den horisontella hastighetskomponenten är konstant:

$$\dot{x} = v_0 \tag{2}$$

Det betyder att accelerationen i x-riktningen är noll, $\ddot{x} = 0$, dvs kroppens acceleration är alltså vertikal, $\mathbf{a} = \ddot{y}\mathbf{e}_y$! Vi utnyttjar detta

$$y = b\sin\frac{\pi x}{L} \qquad \Rightarrow \tag{3}$$

$$\dot{y} = b\cos\frac{\pi x}{L}\cdot\frac{\pi\dot{x}}{L} = \frac{b\pi v_0}{L}\cos\frac{\pi x}{L} \qquad \Rightarrow \tag{4}$$

$$\ddot{y} = -\frac{b\pi v_0}{L}\sin\frac{\pi x}{L}\cdot\frac{\pi\dot{x}}{L} = -\frac{b\pi^2 {v_0}^2}{L^2}\sin\frac{\pi x}{L} \tag{5}$$

Nu är $b = L/3$ och läget är givet: $x = L/3$. Vi får alltså *för detta läge*

$$\dot{y} = \frac{L\pi v_0}{3L}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\pi v_0}{6} \tag{6}$$

$$\ddot{y} = -\frac{L\pi^2 {v_0}^2}{3L^2}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}\,\pi^2 {v_0}^2}{6L} \tag{7}$$

Farten kan skrivas

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{{v_0}^2 + \left(\frac{\pi v_0}{6}\right)^2} = v_0\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2} = \frac{v_0}{6}\sqrt{36+\pi^2} \tag{8}$$

Hastighetsvektorn bildar i detta läge vinkeln θ med x-axeln.

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}_1}{v_0} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+36}} \quad \text{och} \quad \cos\theta = \frac{6}{\sqrt{\pi^2+36}} \tag{9}$$

Projicera nu accelerationen på tangential- och normalriktningen:

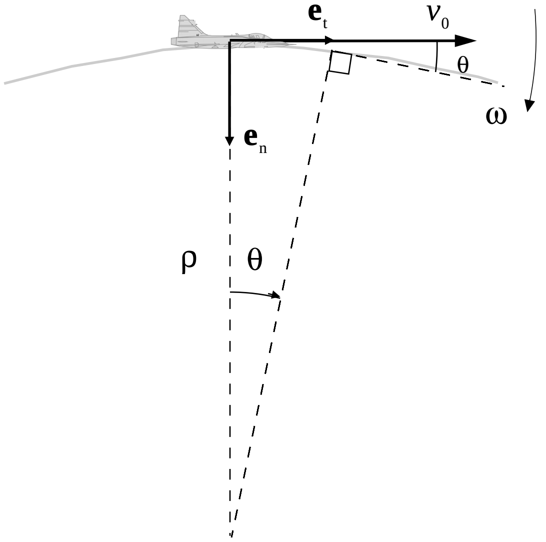
$$a_t = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_t = \ddot{y}\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}\,\pi^2 {v_0}^2}{6L}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+36}} = -\frac{\sqrt{3}\,\pi^3 {v_0}^2}{6L\sqrt{\pi^2+36}} \tag{10}$$

$$a_n = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_n = -\ddot{y}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}\,\pi^2 {v_0}^2}{6L}\cdot\frac{6}{\sqrt{\pi^2+36}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi^2 {v_0}^2}{L\sqrt{\pi^2+36}} \tag{11}$$

Krökningsradien kan nu erhållas ur (1), (8) och (11)

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(36+\pi^2\right)^{3/2}}{36\sqrt{3}\,\pi^2}L$$

LP 6.51



Vid fritt fall är kroppens acceleration lika med tyngdaccelerationen g.
Vid en cirkelrörelse med konstant fart är accelerationen riktad in mot cirkelns centrum. Accelerationen i det naturliga koordinatsystemet skrivs

$$\boxed{\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n}$$

Krökningsradien för bankurvan är ρ. Farten är konstant så att $\ddot{s} = 0$. Accelerationen kan då skrivas

$$\mathbf{a} = \frac{{v_0}^2}{\rho}\mathbf{e}_n$$

Att siktlinjen ändras betyder att hastighetsvektorn ändrar riktning. Hastigheten är vinkelrät mot normalriktningen $\mathbf{e}_n$ och vrids alltså med samma vinkelhastighet $\dot{\theta} = \omega$ som lägevektorn från cirkelns centrum.

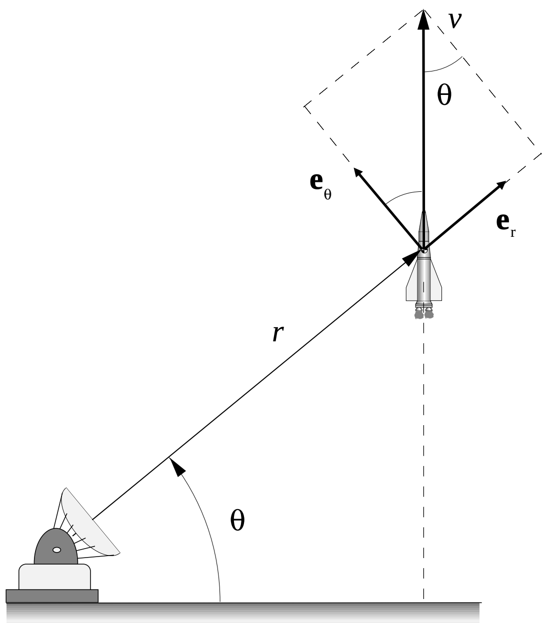
Vid cirkelrörelse är farten lika med radien gånger vinkelhastigheten. Farten kan alltså skrivas $\dot{s} = v_0 = \rho\dot{\theta}$. Insättes detta i accelerationsuttrycket fås

$$a_n = \frac{{v_0}^2}{(v_0/\omega)}$$

Vid fritt fall är denna acceleration lika med tyngdaccelerationen g.

$$g = \frac{{v_0}^2}{(v_0/\omega)} \quad \Rightarrow \quad v_0\,\omega = g \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\omega = \frac{g}{v_0}}}$$

LP 6.55



Hastigheten i cylinderkoordinater är vid plan rörelse

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta} \tag{1}$$

För komponenterna fås då med hänvisning till figuren

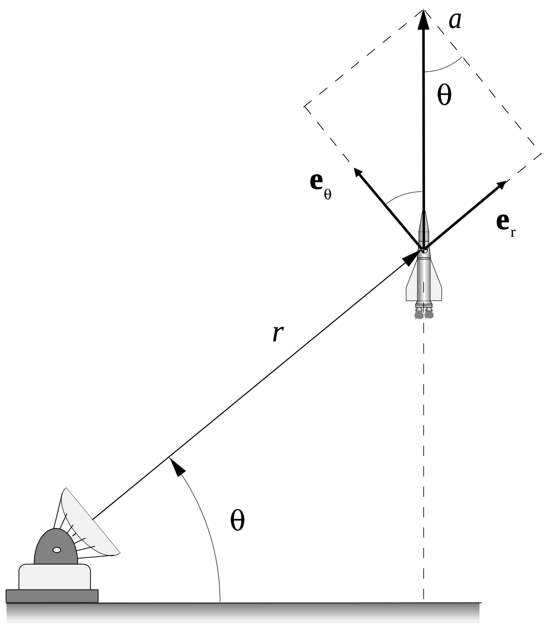
$$\dot{r} = v\sin\theta \tag{2}$$

$$r\dot{\theta} = v\cos\theta \tag{3}$$

För det givna ögonblicket gäller då respektive

$$\dot{r} = v\sin\beta \tag{4}$$

$$\underline{\underline{v = \frac{R\omega}{\cos\beta}}} \tag{5}$$



Accelerationen i det planpolära koordinatsystemet skrivs

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta} \tag{6}$$

För komponenterna fås då med hänvisning till figuren (vi vet att accelerationen är riktad vertikalt uppåt)

$$a\sin\theta = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \tag{7}$$

$$a\cos\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{8}$$

För det givna ögonblicket gäller då (utnyttja ekv (4) och (5))

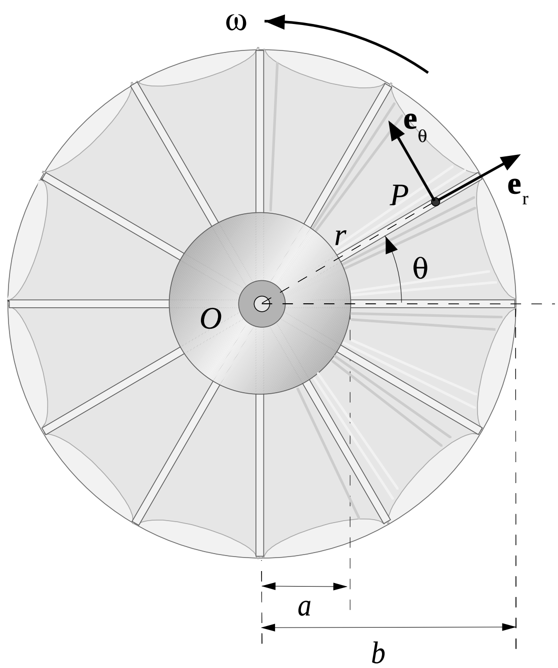
$$a\sin\beta = a_1 - R\omega^2$$

$$a\cos\beta = R\alpha + 2\frac{R\omega^2\sin\beta}{\cos\beta}$$

Det första av dessa samband räcker för att bestämma accelerationens storlek

$$\underline{\underline{a = \frac{a_1 - R\omega^2}{\sin\beta}}}$$

LP 6.56



Rörelsen sker i ett plan så att den kan beskrivas med planpolära koordinater. I de allmänna uttrycken för hastighet och acceleration i planpolära koordinater ingår koordinaterna r och θ samt deras tidsderivator. Vi börjar alltså med att bestämma dessa tidsderivator.

Vinkelhastigheten är konstant:

$$\theta = \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \omega \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0 \qquad (1)$$

Bankurvan är given:

$$r = a\cosh\theta \qquad (2a)$$

eller

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) \qquad (2b)$$

Tidsderivering ger om (1) utnyttjas:

$$\dot{r} = \frac{a\omega}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) = a\omega\sinh\omega t \qquad (3)$$

$$\ddot{r} = \frac{a\omega^2}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) = a\omega^2\cosh\omega t \qquad (4)$$

a) Det allmänna uttrycket för hastigheten i cylinderkoordinater är

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\,\mathbf{e}_z} \qquad (5)$$

Insättning av sambanden (1-3) ger

$$\mathbf{v} = a\omega\sinh\omega t\,\mathbf{e}_r + a\omega\cosh\omega t\,\mathbf{e}_\theta \qquad (6)$$

b) Det allmänna uttrycket för accelerationen i cylinderkoordinater är

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z} \qquad (7)$$

Insättning av sambanden (1-4) ger

$$\mathbf{a} = \left(a\omega^2\cosh\omega t - a\omega^2\cosh\omega t\right)\mathbf{e}_r + \left(0 + 2a\omega^2\sinh\omega t\right)\mathbf{e}_\theta \qquad (8)$$

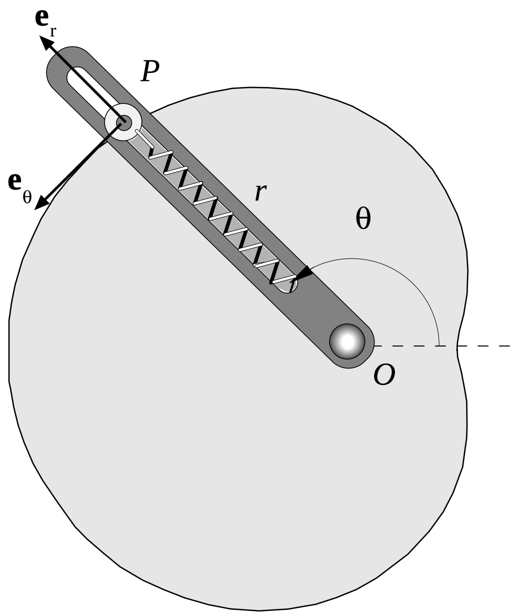
$$\Rightarrow \qquad \mathbf{a} = 2a\omega^2\sinh\omega t\,\mathbf{e}_\theta$$

c) Ekv (2a) ger $\quad b = a\cosh\theta_1 \quad \Rightarrow \quad \cosh\theta_1 = \dfrac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \sinh\theta_1 = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$

ty $-\sinh^2\theta + \cosh^2\theta = 1$

Insättning i (8) ger $\quad \mathbf{a} = 2a\omega^2\dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}\mathbf{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 2\omega^2\sqrt{b^2 - a^2}\,\mathbf{e}_\theta$

LP 6.58



Rörelsen sker i ett plan så att den kan beskrivas med planpolära koordinater, ett specialfall av cylinderkoordinat-systemet. Vinkelhastigheten är konstant:

$$\dot{\theta} = \omega \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0 \tag{1}$$

Bankurvan är given

$$r = c - b\cos\theta \tag{2}$$

Tidsderivering ger om (1) utnyttjas

$$\dot{r} = 0 - b(-\sin\theta)\dot{\theta} = b\omega\sin\theta \tag{3}$$
$$\ddot{r} = b\omega\cos\theta \cdot \dot{\theta} = b\omega^2\cos\theta \tag{4}$$

Det allmänna uttrycket för hastigheten i cylinderkoordinater är

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\,\mathbf{e}_z} \tag{5}$$

Insättning av sambanden (1-4) ger

$$\mathbf{v} = b\omega\sin\theta\,\mathbf{e}_r + (c - b\cos\theta)\omega\,\mathbf{e}_\theta \tag{6}$$

och farten blir

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_r^{\,2} + v_\theta^{\,2}} = \sqrt{b^2\omega^2\sin^2\theta + (c - b\cos\theta)^2\omega^2} \tag{7}$$

$$\underline{\underline{v = \omega\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta}}} \tag{8}$$

Det allmänna uttrycket för accelerationen i cylinderkoordinater är

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z} \tag{9}$$

Insättning av sambanden (1-3) ger

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left[b\omega^2\cos\theta - (c - b\cos\theta)\omega^2\right]\mathbf{e}_r + (0 + 2b\omega\sin\theta\cdot\omega)\mathbf{e}_\theta \\ &= (2b\cos\theta - c)\omega^2\mathbf{e}_r + 2b\omega^2\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta \end{aligned} \tag{10}$$

Storleken av accelerationen är då

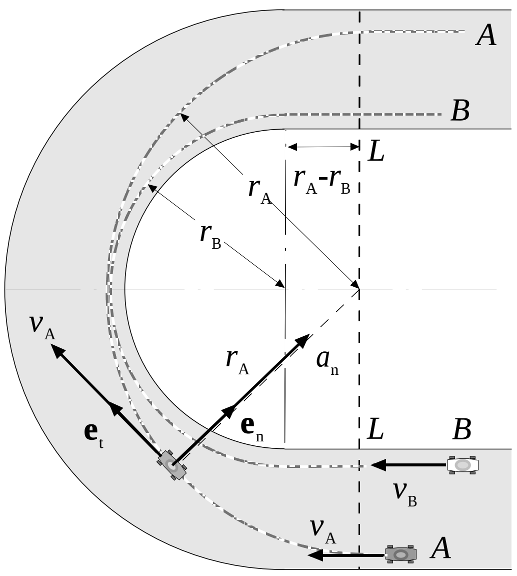
$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_r^{\,2} + a_\theta^{\,2}} = \sqrt{(2b\cos\theta - c)^2\omega^4 + 4b^2\omega^4\sin^2\theta} \quad \Rightarrow \tag{11}$$

$$\underline{\underline{a = \omega^2\sqrt{4b^2 + c^2 - 4bc\cos\theta}}} \tag{12}$$

För $\theta = 0$ fås $\quad v = (c - b)\omega; \quad a = \omega^2\sqrt{4b^2 + c^2 - 4bc}$

För $\theta = \pi$ fås $\quad v = (c + b)\omega;$

LP 6.60



Farten begränsas av villkoret att accelerationen inte för någon bil får överstiga $a_1 = 8\ \text{m/s}^2$. Bestäm den tid det tar för bilarna att klara av hela kurvan som begränsas av linjen CC.

Det allmänna uttrycket för accelerationen i det naturliga systemet är

$$\boxed{\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n}$$

Här är farten konstant så att

$$\ddot{s} = 0 \tag{1}$$

Accelerationen i normalriktningen är

för A: $$\left(a_n\right)_A = \frac{{v_A}^2}{r_A} \tag{2}$$

för B: $$\left(a_n\right)_B = \frac{{v_B}^2}{r_B} \tag{3}$$

Den maximala farten ges då av sambandet

för A: $${v_{A\max}}^2 = r_A a_1 \quad \Rightarrow \quad v_{A\max} = \sqrt{r_A a_1} \tag{4}$$

för B: $${v_{B\max}}^2 = r_B a_1 \quad \Rightarrow \quad v_{B\max} = \sqrt{r_B a_1} \tag{5}$$

Tiden för hela sträckan är

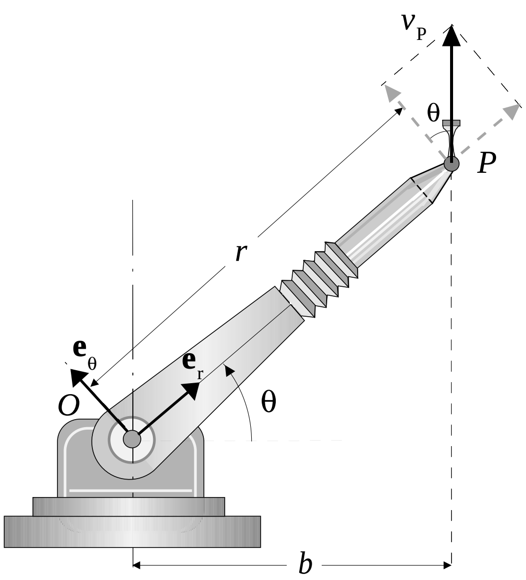
$$\underline{\underline{t_A = \frac{\pi r_A}{v_{A\max}} = \pi\sqrt{\frac{r_A}{a_1}}}} \tag{6}$$

$$\underline{\underline{t_B = \frac{\pi r_B + 2\left(r_A - r_B\right)}{v_{B\max}} = \pi\sqrt{\frac{r_B}{a_1}} + \frac{2\left(r_A - r_B\right)}{\sqrt{r_B a_1}}}} \tag{7}$$

Numeriskt fås

$$t_A = \frac{7}{2}\pi\ \text{s} \approx 11.0\ \text{s} \qquad\qquad t_B = \left(3\pi + \frac{13}{6}\right)\text{s} \approx 11.6\ \text{s}$$

LP 6.61



Vi ska bestämma $\dot{r}$ och $\dot{\theta}$ som funktion av θ samt bestämma accelerationens storlek.

Det allmänna uttrycket för hastigheten i planpolära koordinater är

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta}$$

Figurens geometri ger

$$\underline{\underline{\dot{r} = v_P \sin\theta}} \qquad (1)$$

$$r\dot{\theta} = v_P \cos\theta \qquad (2)$$

Men avståndet r är en funktion av θ!

$$r = \frac{b}{\cos\theta} \qquad (3)$$

Insättning i (2) ger

$$\underline{\underline{\dot{\theta} = \frac{v_P \cos^2\theta}{b}}} \qquad (4)$$

Det allmänna uttrycket för accelerationen i planpolära koordinater är

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta} \qquad (5)$$

Här är enligt (1-4)

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} = v_P \cos\theta \cdot \frac{v_P \cos^2\theta}{b} = \frac{{v_P}^2 \cos^3\theta}{b}$$

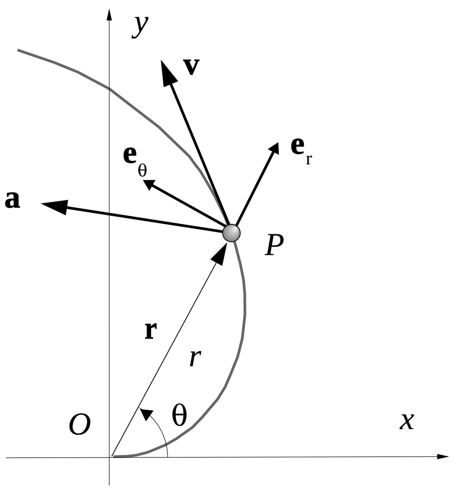
$$r\dot{\theta}^2 = \frac{b}{\cos\theta}\left(\frac{v_P \cos^2\theta}{b}\right)^2 = \frac{{v_P}^2 \cos^3\theta}{b}$$

$$r\ddot{\theta} = r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{b}{\cos\theta} \cdot \frac{v_P \cdot 2\cos\theta(-\sin\theta)\dot{\theta}}{b} = -\frac{2{v_P}^2 \cos^2\theta \sin\theta}{b}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} = 2v_P \sin\theta \cdot \frac{v_P \cos^2\theta}{b}$$

Insättning i (5) ger $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, men det var ju givet! Hastigheten var konstant!

LP 6.62



Bestäm vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ för stången så att farten för hylsan blir konstant $v_P = v_0$!

Bankurvans ekvation är given

$$r = b\theta \qquad (1)$$

och kallas Arkimedes spiral.

Hastigheten i planpolära koordinater bestäms med den allmänna formeln

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta} \qquad (2)$$

För att bestämma hastigheten måste alltså de ingående tidsderivatorna av r och θ bestämmas. Utgå från de givna uttrycken för läget!

$$r = b\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = b\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = b\ddot{\theta} \qquad (3)$$

Insättning i ekvationen (2) ger nu

$$\mathbf{v}_P = b\dot{\theta}\,\mathbf{e}_r + b\theta \cdot \dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta \qquad (4)$$

Det givna villkoret är att farten ska vara konstant:

$$v_0{}^2 = \left(b\dot{\theta}\right)^2 + \left(b\theta\dot{\theta}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v_0{}^2 = b^2\left(\dot{\theta}^2 + \theta^2\dot{\theta}^2\right) \quad \Rightarrow \qquad (5)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0{}^2}{b^2\left(1+\theta^2\right)} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{\theta} = \pm\frac{v_0}{b\sqrt{1+\theta^2}}}}$$

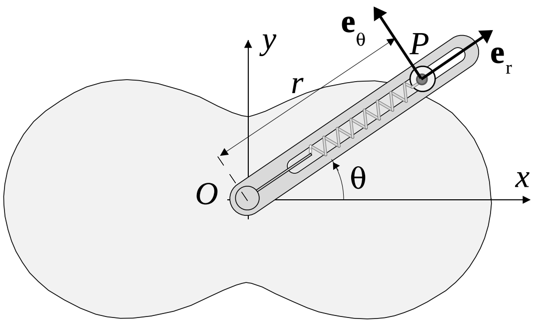
Har P någon acceleration? Ja för att bestämma den behöver vi bara bestämma vinkelaccelerationen och sätta in i det allmänna uttrycket

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta}$$

Efter en del räkningar fås

$$\mathbf{a}_P = \frac{v_0{}^2\left(2+\theta^2\right)}{b\left(1+\theta^2\right)^2}\left[-\theta\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta\right]$$

LP 6.63



Bankurvans ekvation är

$$r = a + b\cos 2\theta$$

Hastigheten och accelerationen hos kroppen P skall bestämmas som funktion av vinkeln θ för det fall att vinkelhastigheten är konstant $\dot{\theta} = \omega$.

Hastigheten och accelerationen i planpolära koordinater bestäms med de allmänna formlerna

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta} \tag{1}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta} \tag{2}$$

Vi måste alltså först bestämma de ingående tidsderivatorna av r och θ.

$$\dot{\theta} = \omega \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\theta} = 0 \tag{3}$$

Utgå från de givna uttrycket $r = a + b\cos 2\theta$ för läget!

$$\Rightarrow \qquad \dot{r} = -b\sin 2\theta \cdot 2\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{r} = -2b\omega\sin 2\theta \tag{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{r} = -2b\omega\cos 2\theta \cdot 2\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{r} = -4b\omega^2\cos 2\theta \tag{5}$$

Insättning i ekvationen (1) ger nu

$$\underline{\underline{\mathbf{v}_P = -\ 2b\omega\sin 2\theta\,\mathbf{e}_r + (a + b\cos 2\theta)\omega\,\mathbf{e}_\theta}} \tag{6}$$

Insättning i ekvationen (2) ger nu (Obs att vi inte deriverar $\mathbf{v}_P$!)

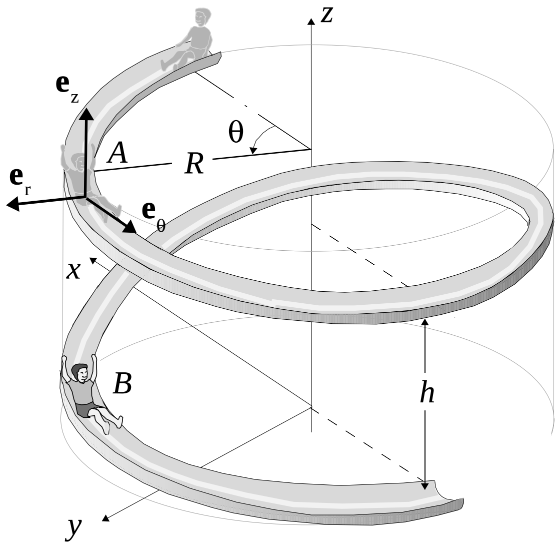
$$\mathbf{a}_P = \left[-4b\omega^2\cos 2\theta - (a + b\cos 2\theta)\omega^2\right]\mathbf{e}_r + \left(0 - 4b\omega^2\sin 2\theta\right)\mathbf{e}_\theta \tag{7}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{a}_P = -\ (a + 5b\cos 2\theta)\omega^2\mathbf{e}_r - 4b\omega^2\sin 2\theta\,\mathbf{e}_\theta}}$$

För numeriska värden, exempelvis $a = 2$ dm, $b = 1$ dm, $\theta = 30°$, $\omega = 10$ rad/s fås

$$\mathbf{a}_P \approx (-45\mathbf{e}_r - 35\,\mathbf{e}_\theta)\mathrm{m/s^2}$$

LP 6.64



Rörelsen beskrivs som funktion av tiden i cylinderkoordinater av

$$r = R$$
$$\theta = \omega^2 t^2$$
$$z = h\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)$$

Bestäm barnets fart och acceleration efter ett halvt varv!

Hastigheten och accelerationen i cylinderkoordinater bestäms med de allmänna formlerna

$$\boxed{\mathbf{v}_P = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z} \qquad (1)$$

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z} \qquad (2)$$

Vi måste alltså först bestämma de ingående tidsderivatorna av r, θ och z.

$$\theta = \omega^2 t^2 \qquad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = 2\omega^2 t \qquad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 2\omega^2 \qquad (3)$$

$$r = R \qquad \Rightarrow \quad \dot{r} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \ddot{r} = 0 \qquad (4)$$

$$z = h\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \qquad \Rightarrow \quad \dot{z} = -h\frac{\dot{\theta}}{\pi} = -\frac{2h\omega^2}{\pi}t \qquad \Rightarrow \quad \ddot{z} = -\frac{2h\omega^2}{\pi} \qquad (5)$$

Insättning i ekvationen (1) ger

$$\mathbf{v}_P = 0\mathbf{e}_r + 2R\omega^2 t\mathbf{e}_\theta - \frac{2h\omega^2}{\pi}t\,\mathbf{e}_z \qquad (6)$$

Insättning i ekvationen (2) ger nu (Obs att vi inte deriverar $\mathbf{v}_P$!)

$$\mathbf{a}_P = \left(0 - 4R\omega^4 t^2\right)\mathbf{e}_r + \left(2R\omega^2 + 0\right)\mathbf{e}_\theta - \frac{2h\omega^2}{\pi}\mathbf{e}_z \qquad (7)$$

Tidpunkten då barnet åkt ett halvt varv bestäms ur ekv (3a)

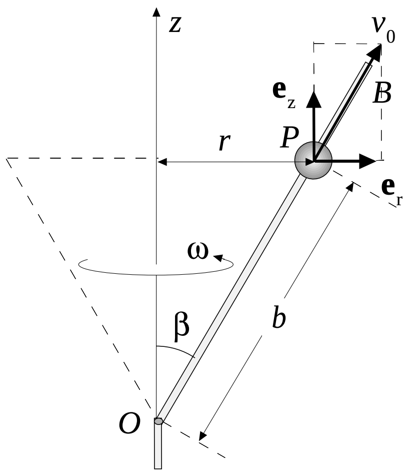
$$\pi = \omega^2 t_1^{\,2} \qquad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\omega} \qquad (8)$$

Insättning i (6) och (7) ger

$$\mathbf{v}_P = 2R\omega\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}_\theta - \frac{2h\omega}{\sqrt{\pi}}\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a}_P = -4\pi R\omega^2\mathbf{e}_r + 2R\omega^2\,\mathbf{e}_\theta - \frac{2h\omega^2}{\pi}\mathbf{e}_z$$

LP 6.65



Bestäm för kulan P farten och accelerationens storlek om $\beta = 30°$.

Det allmänna uttrycket för hastigheten i cylinderkoordinater är

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z}$$

Figurens geometri och tidsderiveringar ger

$$r = b\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \dot{b}\sin\beta = v_0\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = 0 \qquad (1)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0 \qquad (2)$$

$$z = b\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \dot{b}\cos\beta = v_0\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} = 0 \qquad (3)$$

Farten är allmänt

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + \dot{z}^2} \qquad (4)$$

Insättning av (1-3) ger för $\beta = 30°$

$$v = \sqrt{\left(v_0\sin\beta\right)^2 + b\sin\beta\cdot\omega + \left(v_0\cos\beta\right)^2} = \underline{\underline{\sqrt{{v_0}^2 + \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2}}} \qquad (5)$$

Det allmänna uttrycket för accelerationen i cylinderkoordinater är

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z} \qquad (6)$$

Insättning av (1-3) ger

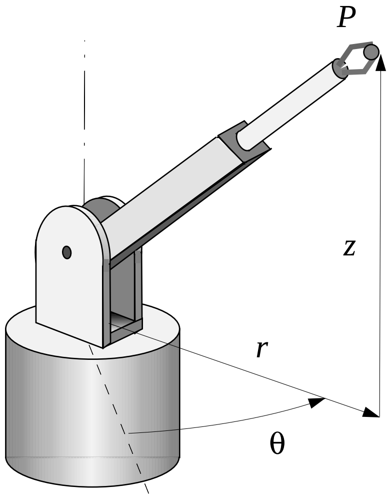
$$\mathbf{a} = \left(0 - b\omega^2\sin\beta\right)\mathbf{e}_r + \left(0 + 2\omega v_0\sin\beta\right)\mathbf{e}_\theta + 0\mathbf{e}_z \qquad (7)$$

Accelerationens storlek för $\beta = 30°$ är alltså

$$a = \sqrt{\left(b\omega^2\sin\beta\right)^2 + \left(2\omega v_0\sin\beta\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b\omega^2}{2}\right)^2 + \left(\omega\, v_0\right)^2}$$

Både farten v_0 och vinkelhastigheten ω är konstanta. Varför blir det i alla fall en acceleration?

LP 6.66



Givet är att läget som funktion av tiden ges av koordinaterna

$$\begin{cases} \theta = \omega t \\ z = kt^2 \end{cases} \tag{1}$$

Koordinaten r ändras också men just i det betraktade ögonblicket är

$$r = R \tag{2}$$

För hastigheterna och accelerationerna gäller då att

$$\begin{cases} \dot{r} = V \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{z} = 2kt \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{r} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{z} = 2k \end{cases} \tag{3}$$

Det allmänna uttrycket för hastigheten i cylinderkoordinater är

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\,\mathbf{e}_z} \tag{4}$$

Insättning ger $\qquad \mathbf{v} = V\,\mathbf{e}_r + R\omega\,\mathbf{e}_\theta + 2kt\,\mathbf{e}_z \qquad (5)$

Farten är $\qquad v = \sqrt{V^2 + R^2\omega^2 + 4k^2t^2} \qquad (6)$

Numeriskt fås då $\qquad v = \sqrt{0.64^2 + 0.36 + 4}\ \text{m/s} = \sqrt{5}\ \text{m/s} \qquad (7)$

Det allmänna uttrycket för accelerationen i cylinderkoordinater är

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z} \tag{8}$$

Insättning ger

$$\mathbf{a} = \left(0 - R\omega^2\right)\mathbf{e}_r + \left(R \cdot 0 + 2V\omega\right)\mathbf{e}_\theta + 2k\mathbf{e}_z \tag{9}$$

$$\mathbf{a} = -R\omega^2\mathbf{e}_r + 2V\omega\,\mathbf{e}_\theta + 2k\mathbf{e}_z \tag{10}$$

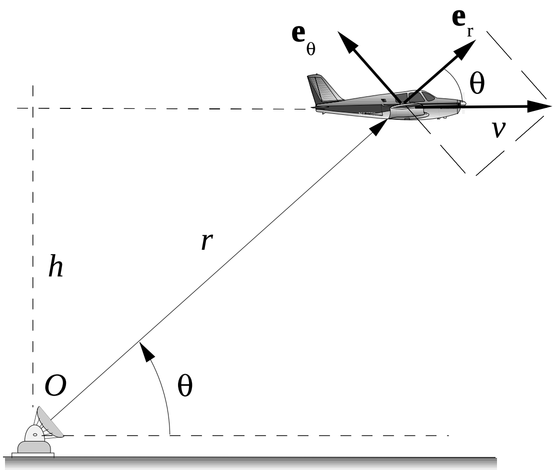
Accelerationens storlek är

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{R^2\omega^4 + 4V^2\omega^2 + 4k^2} \tag{11}$$

Numeriskt fås då

$$a = \sqrt{0.6^4 + 4 \cdot 0.64 \cdot 0.36 + 1}\ \text{m/s}^2 = \sqrt{0.36(0.36 + 2.56) + 1}\ \text{m/s}^2$$
$$= \sqrt{0.36 \cdot 2.92 + 1}\ \text{m/s}^2 \approx 1.43\ \text{m/s}^2$$

LP 6.68



Rörelsen sker i ett plan så att den kan beskrivas med planpolära koordinater. Sambandet mellan dessa är givet eftersom höjden h är känd:

$$h = r\sin\theta \tag{1}$$

Eftersom flygplanet vid tiden $t = 0$ passerar rakt ovanför O och hastigheten är given kan man också skriva

$$vt = r\cos\theta \tag{2}$$

Sambanden (1) och (2) tillsammans med Pythagoras sats ger r som funktion av tiden:

$$r^2 = h^2 + v^2t^2 \tag{3}$$

Det allmänna uttrycket för hastigheten i cylinderkoordinater är

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\,\mathbf{e}_z} \tag{4}$$

Projicera nu hastighetsvektorn på basvektorernas riktningar. Figurens geometri och ekv (4) ger tillsammans med sambanden (1-3)

$$\dot{r} = v\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\dot{r} = \frac{v^2t}{\sqrt{h^2 + v^2t^2}}}} \tag{5}$$

$$r\dot{\theta} = -v\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta} = -\frac{v\sin\theta}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\dot{\theta} = -\frac{vh}{h^2 + v^2t^2}}} \tag{6}$$

Det allmänna uttrycket för accelerationen i cylinderkoordinater är

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z} \tag{8}$$

Men accelerationen är enligt texten noll! Komponenterna är alltså var för sig noll och om (5) och (6) utnyttjas fås

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\ddot{r} = -\frac{h^2v^2}{\left(h^2 + v^2t^2\right)^{3/2}}}} \tag{9}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\ddot{\theta} = \frac{2hv^3t}{\left(h^2 + v^2t^2\right)^2}}} \tag{10}$$