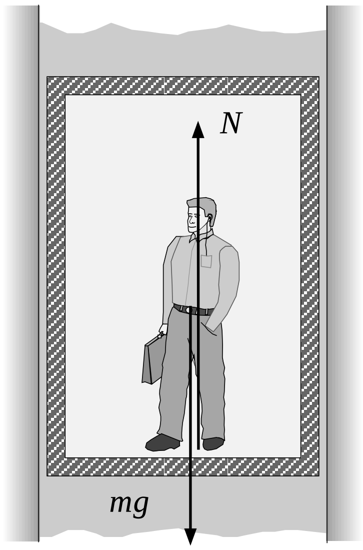
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 7

LP 7.1



Hissen kommer uppifrån och bromsas så att accelerationen är riktad uppåt.

Frilägg personen från hissgolvet. Inför normalkraften N som golvet påverkar fötterna med. Tyngdkraften är mg.

Kraftekvationen

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}} \tag{1}$$

ger för personen i den vertikala riktningen

$$ma = -mg + N \tag{2}$$

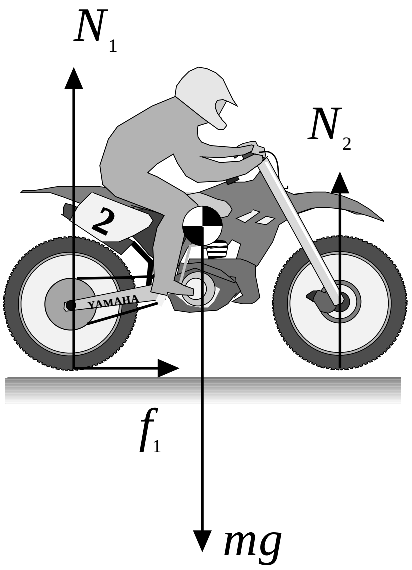
$$\Rightarrow \quad N = m(g + a) \tag{3}$$

Man kan känna sig "tyngre" vid en acceleration uppåt. Man trycks mot hissgolvet.

Enligt Newtons tredje lag, lagen om verkan och motverkan, är kraften från personen på golvet lika stor och motriktad, alltså

$$\underline{\underline{N = m(g + a)}}$$

LP 7.2



Accelerationen söks. Den bestäms med kraftekvationen om krafterna är kända.

Vid starten, då farten är liten, kan luftmotståndet försummas och ekipaget påverkas av tyngdkraften mg, normalkrafter

$$N_1 = \frac{2}{3}mg \text{ vid bakhjul,} \tag{1}$$

$$N_2 = \frac{1}{3}mg \text{ vid framhjul.} \tag{2}$$

och friktionskraft. Bakhjulet spinner. Det betyder att friktionskraften är fullt utvecklad så att

$$f_1 = \mu N_1 \tag{3}$$

Vi förutsätter här att framhjulet har markkontakt. För stort gaspådrag kommer ju det att lätta och problemställningen blir en annan.

Friktionskraften vid framhjulet kan försummas. Det finns här egentligen en liten friktionskraft bakåt som får framhjulet att rotera snabbare men detta behandlas inte här i baskursen.

Alltså, masscentrums acceleration ges av kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \tag{4}$$

vars komponent i rörelseriktningen är

$$F_x = m\ddot{x}_G \tag{5}$$

Insättning av (3) ger

$$\mu N_1 = m\ddot{x}_G \tag{6}$$

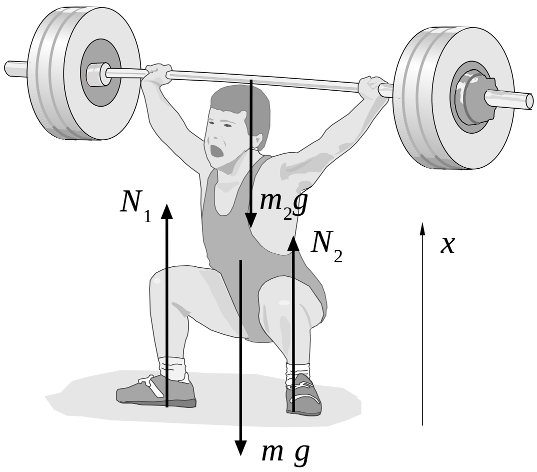
Ekv (1) ger då

$$\ddot{x}_G = \frac{\mu N_1}{m} = \frac{\mu \cdot 2mg}{3m} = \frac{2\mu g}{3} \tag{7}$$

Svar: Accelerationen är $\ddot{x}_G = \frac{2}{3}\mu g$

Kommentar: Eftersom friktionstalet i detta fall knappast är större än ett och normalkraften N_1 inte överstiger mg kan accelerationen inte bli större än g.

LP 7.3



Under den betraktade rörelsen förflyttas bara skivstången.

Frilägg tyngdlyftaren från hissgolvet. Tyngdkrafterna är m_1g och m_2g. Inför den totala normalkraften $N = N_1 + N_2$ som golvet påverkar fötterna med. Beteckna först skivstångens acceleration a.

Masscentrums lägeskoordinat x_G ges av definitionen $mx_G = m_1x_1 + m_2x_2$. Masscentrums acceleration $\ddot{x}_G$ ges alltså av $m\ddot{x}_G = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2$. Bara den del m_2a som har acceleration kommer alltså med i kraftekvationen.

Kraftekvationen

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \tag{1}$$

ger för hela systemet i den vertikala riktningen

$$m_2a = N - m_1g - m_1g \tag{2}$$

$$\Rightarrow \qquad N = m_2a + m_1g + m_1g \tag{3}$$

Den totala normalkraften är alltså lika med tyngden +massan gånger accelerationen för den del som har acceleration. Nu återstår att bestämma accelerationen a.

Kinematiksamband för skivstången ger med begynnelsevillkoret vila vid $x_2 = 0$.

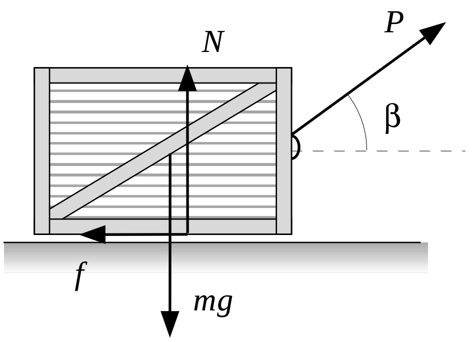
$$\ddot{x}_2 = a \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_2 = at \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{1}{2}at^2$$

$$x_2 = h \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{2h}{(\Delta t)^2}$$

Normalkraften är $\underline{\underline{N = m_1g + m_2\left(g + \frac{2h}{(\Delta t)^2}\right)}}$

Numeriskt värde är $N = (900 + 400 + 40)\ \mathrm{N} = 1.4\ \mathrm{kN}$

LP 7.4



Frilägg lådan från golvet. Inför förutom dragkraften P tyngdkraften är mg, normalkraften N som golvet påverkar lådan med samt friktionskraften f.

Friktionskraften är vid glidning $f = \mu N$.

Kraftekvationen

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}} \tag{1}$$

ger för lådan i komponentform

$$\rightarrow: \quad ma = P\cos\beta - \mu N \tag{2}$$

$$\uparrow: \quad 0 = P\sin\beta + N - mg \tag{3}$$

Ekv (3) ger normalkraften $N = mg - P\sin\beta$. Insättning i ekv (2) ger

$$ma = P\cos\beta - \mu(mg - P\sin\beta) \tag{4}$$

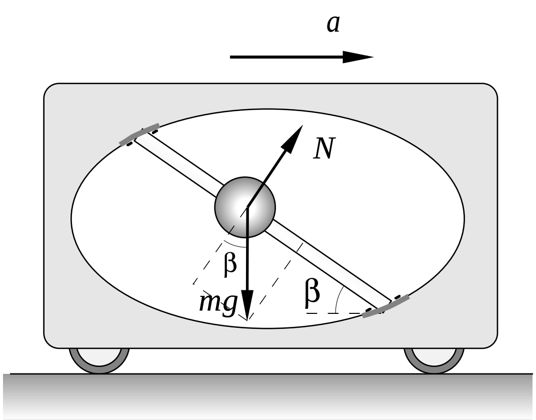
$$m(a + \mu g) = P(\cos\beta + \mu\sin\beta) \tag{5}$$

$$\underline{\underline{P = \frac{m(a + \mu g)}{\cos\beta + \mu\sin\beta}}}$$

Täljaren är en kraft. Nämnaren är dimensionslös.

Om friktion saknas är $P = \dfrac{ma}{\cos\beta}$

LP 7.5



Den relativa accelerationen söks. Den absoluta, relativt ett inertialsystem, kan bestämmas med kraftekvationen om krafterna är kända.

Kulan påverkas av tyngdkraften mg och kontaktkraften från stången. En kontakt-kraft kan delas upp i en normalkraft N och en friktionskraft f. Här är stången glatt så att friktionskraften är noll.

Kulans totala absoluta acceleration ges alltså av kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (1)$$

Om vi nu tar kraftekvationens horisontella och vertikala komponent kommer normalkraftens komponenter med i ekvationerna, fastän den kraften ej efterfrågas. Det är en bra regel att redan från början ta sådana projektionsriktningar att en del krafter elimineras direkt. Vi skriver därför upp *kraftekvationens komponent i stångens riktning* snett neråt.

Kulans acceleration relativt vagnen antas vara a_{rel} neråt längs stången. Kraft-ekvationen blir då

$$mg\sin\beta = m\left(a\cos\beta + a_{\text{rel}}\right) \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \qquad a_{\text{rel}} = g\sin\beta - a\cos\beta \qquad (3)$$

Svar: Den relativa accelerationens storlek är $\underline{\underline{\left|a_{\text{rel}} = g\sin\beta - a\cos\beta\right|}}$

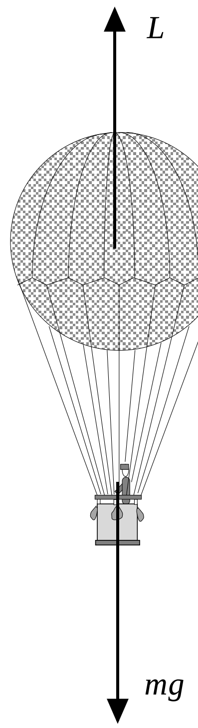
Kommentar:

- Sambandet (3) visar att kulans acceleration är $g\sin\beta$ om vagnens acceleration är noll. Detta är ju tyngdaccelerationens komponent i stångens riktning.

- Om vagnens acceleration är $a = g\tan\beta$ så blir den relativa accelerationen noll.

- Om vagnens acceleration är större blir a_{rel} negativ. På grund av kulans tröghet, dvs det faktum att den inte vill ändra sin hastighet, kommer den att åka uppåt längs stången för en tillräckligt stor acceleration hos vagnen.

LP 7.6



Hela systemet påverkas av tyngdkraften och lyftkraften L. Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ för ballongen skrivs

$$\uparrow: \quad -mg + L = -ma \qquad (1)$$

Antag att massan Δm måste kastas för att accelerationen skall bli a uppåt. Detta påverkar inte lyftkraftens storlek nämnvärt.

$$\uparrow: \quad -(m-\Delta m)g + L = (m-\Delta m)a \qquad (2)$$

Eftersom lyftkraften är okänd eliminerar vi den genom att subtrahera ekv (2) från ekv (1). Detta ger

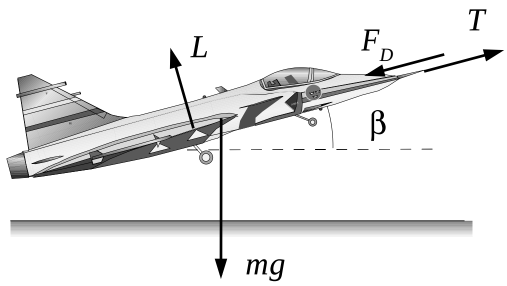
$$-mg + (m-\Delta m)g = -ma - (m-\Delta m)a$$

$$-\Delta m \cdot g = -2ma + \Delta ma$$

$$(g+a)\Delta m = 2ma$$

Massan $$\underline{\underline{\Delta m = \frac{2ma}{g+a}}}$$ skall kastas.

LP 7.7



Flygplanet påverkas av dragkraften T, tyngdkraften mg, lyftkraften L och motståndskraften F_D.
Vi kallar den ursprungliga totala kraften (eller nettokraften) i den horisontella riktningen för $(F_{\text{netto}})_x$.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ för flygplanet skrivs i den horisontella riktningen

$$\rightarrow: \quad (F_{\text{netto}})_x = ma_0 \qquad (1)$$

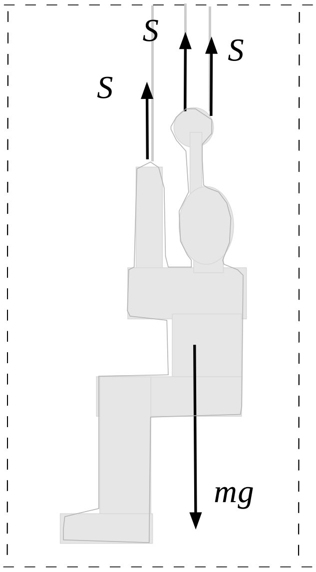
Piloten ökar nu dragkraftens storlek med ΔT utan att de andra krafterna ändras. Antag att den nya horisontella accelerationen blir a_1. Då blir kraftekvationens komponent i den horisontella riktningen

$$\rightarrow: \quad (F_{\text{netto}})_x + \Delta T\cos\beta = ma_1 \qquad (2)$$

Drag nu ekv (1) från ekv(2) $\Delta T\cos\beta = ma_1 - ma_0$

$$\underline{\underline{a_1 = a_0 + \frac{\Delta T\cos\beta}{m}}}$$

LP 7.8



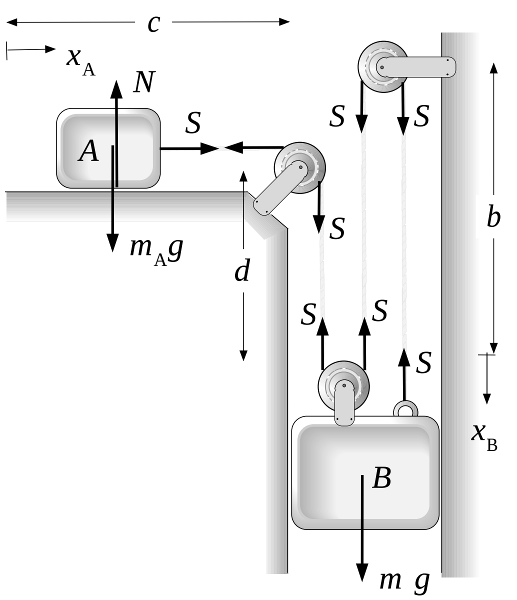
Frilägg mannen med den lätta nedersta trissan. Dragkraften antas vara S. Eftersom den övre trissan är lätt och lättrörlig är kraften S även på den andra (högra) sidan trissan. Av samma anledning är kraften i tråden S på båda sidor av den undre trissan. Alltså, tre krafter S verkar uppåt och tyngdkraften verkar neråt.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ för mannen skrivs i den vertikala riktningen

$$\uparrow: \quad 3S - mg = ma$$

$$\underline{\underline{S = \frac{m}{3}\left(g + a\right)}}$$

LP 7.11



Frilägg kropparna! Antag att trådkraften är S. Den är lika stor i alla delar av tråden , eftersom trissorna är lätta och lättrörliga.

Antag att förflyttningen för B är x_B då förflyttningen för A är x_A.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ för kropparna skrivs respektive

$$\rightarrow: \quad S = m_A \ddot{x}_A \qquad (1)$$

$$\downarrow: \quad m_B g - 3S = m_B \ddot{x}_B \qquad (2)$$

Vi har tre obekanta S, $\ddot{x}_A$ och $\ddot{x}_B$ så att vi behöver en till ekvation. Kinematiken ger denna ekvation enligt följande.

Sambandet mellan förflyttningarna x_A och x_B ges av tvångsvillkoret som säger att tråden har konstant längd L. Vi tecknar först trådens längd och tidsderiverar sedan.

$$L = c - x_A + d + x_B + b + x_B + b + x_B + \text{konstant} \qquad (3)$$

Konstanten beror på att tråden går runt trissorna och att A har en viss storlek.

Tidsderivering ger hastighetssambandet

$$0 = -\dot{x}_A + 3\dot{x}_B \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_A = 3\dot{x}_B \qquad (4)$$

och accelerationssambandet

$$\ddot{x}_A = 3\ddot{x}_B \qquad (5)$$

Sätt in (5) i (1) och (2)! Multiplicera ekv(1) med tre och addera ekv (2)

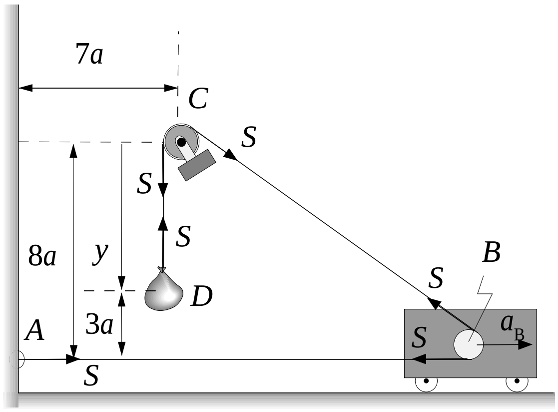
$$\begin{cases} 3S = 9m_A \ddot{x}_B \\ m_B g - 3S = m_B \ddot{x}_B \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad m_B g = (9m_A + m_B)\ddot{x}_B$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\ddot{x}_B = \frac{m_B g}{9m_A + m_B}}}$$

Nu ger ekv (4) $\qquad \underline{\underline{\ddot{x}_A = \frac{3m_B g}{9m_A + m_B}}}$

och ekv (1) ger $\qquad \underline{\underline{S = \frac{3m_A m_B g}{9m_A + m_B}}}$

LP 7.19



Antag att trådkraften är S. Den är lika stor i alla delar av tråden , eftersom trissan vid C är lätt och lättrörlig och dubben vid B är glatt.
Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ för säcken skrivs

$$\downarrow: \quad mg - S = m\ddot{y} \qquad (1)$$

Trådkraften kan alltså bestämmas om accelerationen $\ddot{y}$ kan bestämmas på annat sätt. Eftersom accelerationen a_B är given och tråden är oelastisk kan man få ett samband mellan $\ddot{y}$ och a_B.

Trådens hela längd är

$$L = 22a + 17a + 8a = 44a \qquad (2)$$

Den kan också skrivas

$$L = x_B + \sqrt{(x_B - 7a)^2 + (8a)^2} + y \qquad (3)$$

Tidsderivering ger hastighets- och accelerationssambanden

$$0 = \dot{x}_B + \frac{2(x_B - 7a)\dot{x}_B}{2\sqrt{(x_B - 7a)^2 + (8a)^2}} + \dot{y} \qquad (4)$$

$$0 = \ddot{x}_B + \frac{\dot{x}_B{}^2 + (x_B - 7a)\ddot{x}_B}{\sqrt{(x_B - 7a)^2 + (8a)^2}} - \frac{(x_B - 7a)^2 \dot{x}_B{}^2}{2\left[(x_B - 7a)^2 + (8a)^2\right]^{3/2}} + \ddot{y} \qquad (5)$$

I första ögonblicket är $\ddot{x}_B = a_B$ och $\dot{x}_B = 0$ samt $x_B = 22a$

Insättning i ekv (5) ger

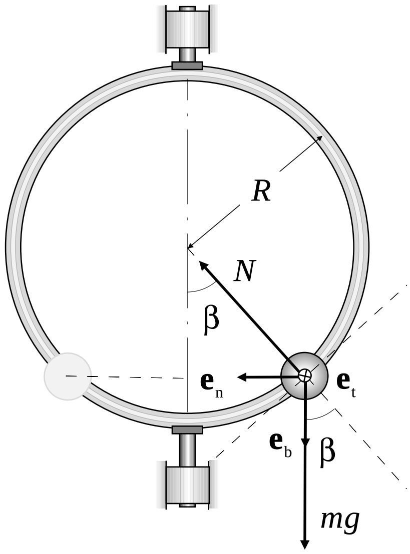
$$0 = a_B + \frac{0 + 15a \cdot a_B}{17a} - 0 + \ddot{y} \quad \Rightarrow \qquad (6)$$

$$\ddot{y} = -a_B\left(1 + \frac{15}{17}\right) \quad \Rightarrow \qquad (7)$$

$$\ddot{y} = -\frac{32a_B}{17} \qquad (8)$$

Ekv (1) ger då trådkraften $\underline{\underline{S = m\left(g + \frac{32}{17}a_B\right)}}$

LP 7.22



Om kulan är i vila relativt cirkelbågen rör den sig i en cirkelbana med radien $R\sin\beta$. Kulans hastighet är vinkelrät mot den givna figurens plan. Vi inför de naturliga koordinatsystemet. Tangential- och normalriktningen ges av basvektorerna $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$. Binormalriktningen är neråt och ges av $\mathbf{e}_b$.

Kulan påverkas av tyngdkraften mg och normalkraften, som delas upp i komponenterna N_1 och N_2 i tangentialriktningen.

Det allmänna uttrycket för accelerationen är

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{1}$$

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ blir i komponentform:

$$\mathbf{e}_t: \qquad m\ddot{s} = N_2 \tag{2}$$

$$\mathbf{e}_n: \qquad m\frac{\dot{s}^2}{R\sin\beta} = N_1\sin\beta \tag{3}$$

$$\mathbf{e}_b: \qquad 0 = N_1\cos\beta - mg \tag{4}$$

Eftersom farten (radien gånger vinkelhastigheten) $\dot{s} = v = R\sin\beta\cdot\omega$ är konstant blir $\ddot{s} = 0$ och $N_2 = 0$ enligt ekv (2). Ekv (4) ger normalkraften

$$N_1 = \frac{mg}{\cos\beta} \tag{5}$$

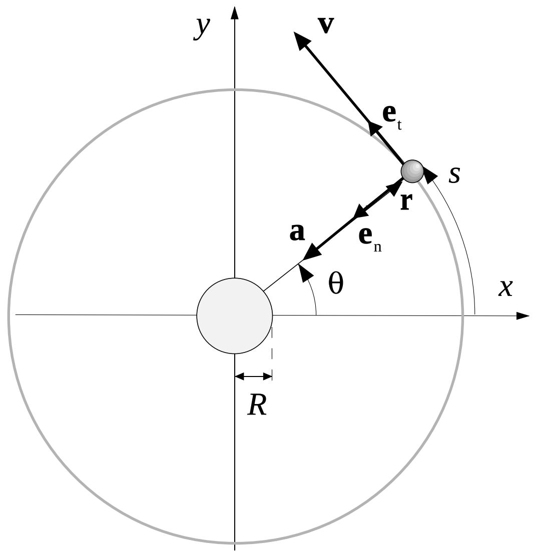
som kan sättas in i ekv (3). Vi sätter också in farten $\dot{s} = R\sin\beta\cdot\omega$.

$$m\frac{(R\sin\beta\cdot\omega)^2}{R\sin\beta} = \frac{mg}{\cos\beta}\sin\beta \tag{6}$$

$$\Rightarrow \qquad mR\sin\beta\cdot\omega^2 = \frac{mg}{\cos\beta}\sin\beta \quad \Rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{g}{R\cos\beta}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\cos\beta = \frac{g}{R\omega^2}}}$$

LP 7.23



Om satellitens massa är m ger kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sambandet mellan gravitationskraften och accelerationen.

Inför i en godtycklig punkt på bankurvan basvektorerna $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$ i det naturliga koordinatsystemet. Det allmänna uttrycket för accelerationen är

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n \qquad (1)$$

Gravitationskraften är

$$\mathbf{F} = G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{e}_n \qquad (2)$$

Detta är Newtons allmänna gravitationslag. Här är G den allmänna gravitationskonstanten och M är jordens massa. Dessa konstanter går att finna i tabeller. Problemtexten ger emellertid tyngdaccelerationen g vid jordytan och då kan vi skriva tyngdkraftens storlek vid jordytan på två olika sätt:

$$G\frac{Mm}{R^2} = mg \qquad \Rightarrow \qquad GM = gR^2 \qquad (3)$$

Farten är konstant. Kraftekvationens komponent i normalriktningen är då

$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = mg\frac{R^2}{r^2} \qquad (4)$$

Krökningsradien ρ är lika med cirkelbankurvans radie r. Satellitens fart kan alltså bestämmas:

$$m\frac{v^2}{r} = mg\frac{R^2}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{g\frac{R^2}{r}} \qquad (5)$$

Nu lägger vi på villkoret att satellitens fart motsvarar att lägevektorn har en vinkelhastighet som måste vara densamma som jordens:

$$\omega = \frac{v}{r} \qquad (6)$$

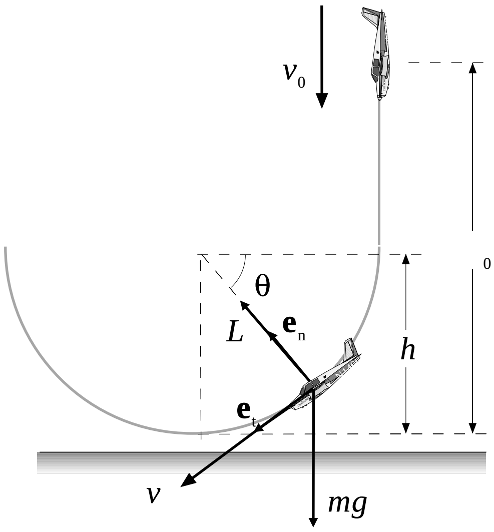
Insättning av (5) ger
$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{g\frac{R^2}{r}} \qquad (7)$$

Ur denna ekvation bestäms r:

$$\omega^2 = g\frac{R^2}{r^3} \qquad \Rightarrow \qquad r^3 = \frac{gR^2}{\omega^2} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{r = \left(\frac{gR^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}}} \qquad (8)$$

Insättning av numeriska värden: $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$, $R = 6371\ \mathrm{km}$ och vinkelhastighet 2π på ett dygn ger en radie $r \approx 6.6R$.

LP 7.24



Betrakta först cirkelrörelsen.

Flygplanet påverkas av tyngdkraften mg och lyftkraften L. Luftmotståndet kunde försummas. Inför i en godtycklig punkt på bankurvan basvektorerna $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$ i det naturliga koordinatsystemet.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ blir i komponentform

$$\mathbf{e}_t : \quad m\ddot{s} = F_t \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{e}_n : \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \quad \Rightarrow$$

$$m\ddot{s} = mg\cos\theta \qquad (2)$$

$$m\frac{\dot{s}^2}{h} = L - mg\sin\theta \qquad (3)$$

Ekv (2) säger att farten ökar ända ner till läget $\theta = \pi/2$. Ekv (3) säger att kraften L är maximal då $\theta = \pi/2$, eftersom både $\dot{s}$ och $\sin\theta = 0$ är maximala där. Denna maximala kraft är given i problemtexten. För $\theta = \pi/2$ blir ekv (3)

$$m\frac{v_1^{\,2}}{h} = 5mg - mg \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_1^{\,2}}{4g} \qquad (4)$$

Om du redan läst om energiekvationen är det nu enkelt att bestämma farten $v_1 = 0$ i den nedersta punkten. Lyftkraften gör inget arbete. Tyngdkraften är konservativ. Med potentiella energin $V_1 = 0$ i nedersta punkten fås

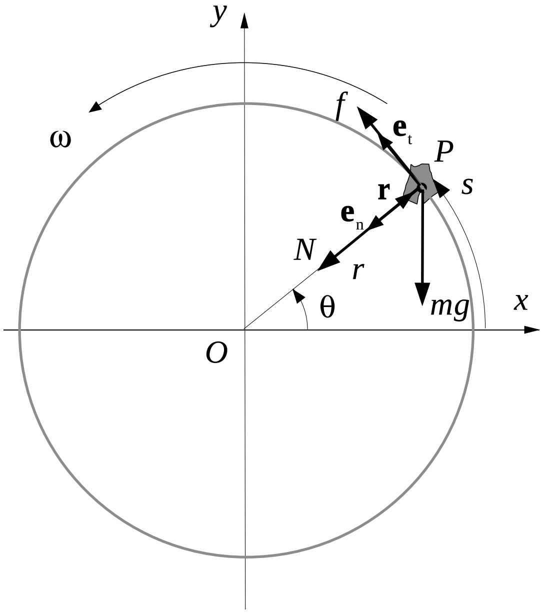
$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_1^{\,2}}{2} + 0 = \frac{mv_0^{\,2}}{2} + mgh_0 \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \qquad v_1^{\,2} = v_0^{\,2} + 2gh_0 \qquad (6)$$

Resultatet fås om denna fart i kvadrat sätts in i ekv (4).

$$\underline{\underline{h = \frac{v_0^{\,2}}{4g} + \frac{h_0}{2}}}$$

LP 7.25



Så länge tvättplagget ligger an mot trumman påverkas det av tyngdkraften mg och kontaktkraften. Kontaktkraften kan delas upp i en normalkraft N och en friktionskraft f.

Inför i en godtycklig punkt på bankurvan basvektorerna $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$ i det naturliga koordinatsystemet. Det allmänna uttrycket för accelerationen är

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{1}$$

Om tvättplaggets massa är m ger komponenten av kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ i normalriktningen

$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = N - mg\sin\theta \tag{2}$$

Krökningsradien ρ är lika med cirkelbankurvans radie r. Hastigheten kan skrivas på olika sätt. Speciellt vill vi uttrycka den i vinkelhastigheten ω:

$$\dot{s} = v = r\dot{\theta} = r\omega \tag{3}$$

För en viss vinkel $\theta = \beta$ upphör kontakten med trumman. Det matematiska villkoret för detta är

kontaktvillkoret: $\quad N = 0 \quad$ (4)

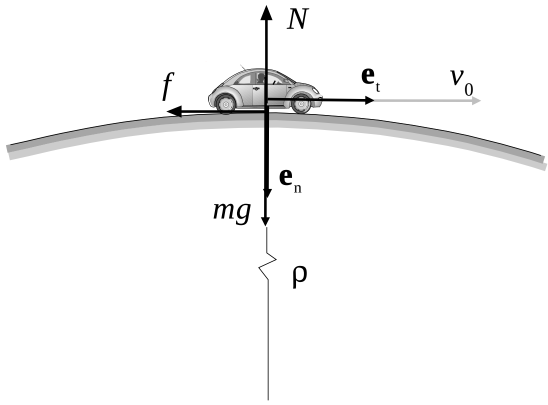
Om vi nu sätter in (3) och (4) i huvudekvationen (2) fås

$$m\frac{r^2\omega^2}{r} = 0 - mg\sin\beta \tag{5}$$

$$r\omega^2 = g\sin\beta \qquad \Rightarrow \tag{6}$$

Svar: $\quad \underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{g\sin\beta}{r}}}}$

LP 7.26



Bilen påverkas av tyngdkraften mg, normalkraften N och friktionskraften $f = \mu N$. Inför basvektorerna $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$ i det naturliga koordinatsystemet.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ blir i komponentform

$$\mathbf{e}_t: \quad m\ddot{s} = F_t \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \quad \Rightarrow$$

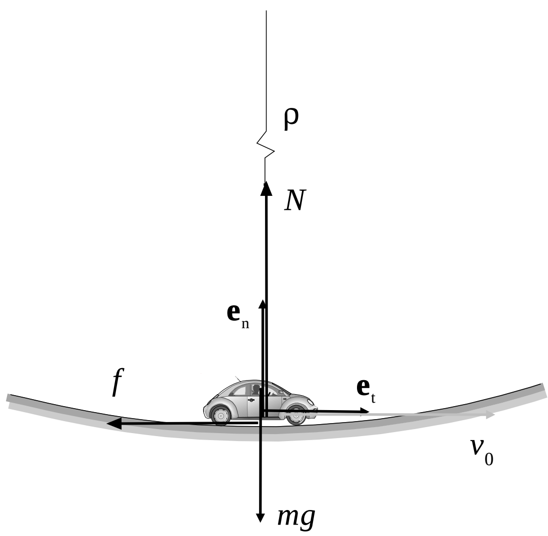
$$m\ddot{s} = -\mu N \qquad (1)$$

$$m\frac{v_0^{\;2}}{R} = mg - N \qquad (2)$$

Lös ut normalkraften ur (2) $\quad N = mg - m\dfrac{v_0^{\;2}}{R}$

och sätt in i (1)! $\quad \underline{\underline{\ddot{s} = -\mu\left(g - \dfrac{v_0^{\;2}}{R}\right)}}$

LP 7.27



Bilen påverkas av tyngdkraften mg, normalkraften N och friktionskraften $f = \mu N$. Inför basvektorerna $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$ i det naturliga koordinatsystemet.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ blir i komponentform

$$\mathbf{e}_t: \quad m\ddot{s} = F_t \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \quad \Rightarrow$$

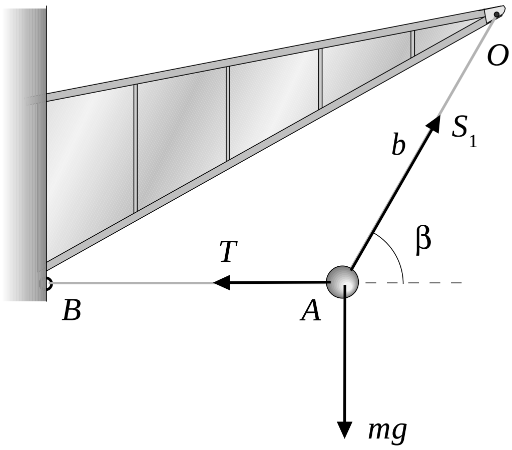
$$m\ddot{s} = -\mu N \qquad (1)$$

$$m\frac{v_0^{\;2}}{R} = N - mg \qquad (2)$$

Lös ut normalkraften ur (2): $\quad N = mg + m\dfrac{v_0^{\;2}}{R}$

och sätt in i (1)! $\quad \underline{\underline{\ddot{s} = -\mu\left(g + \dfrac{v_0^{\;2}}{R}\right)}}$

LP 7.29

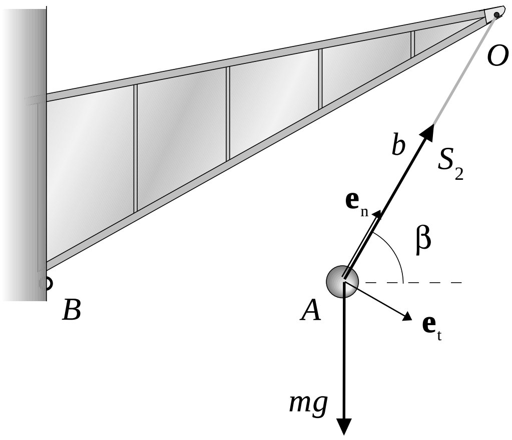


Betrakta först jämviktsfallet. Jämvikt fordrar att kraftsumman är noll i den vertikala riktningen:

$$\uparrow: \quad S_1 \sin\beta - mg = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad S_1 = \frac{mg}{\sin\beta} \qquad (2)$$

När den horisontella tråden klipps av får kulan en acceleration i det första ögonblicket efter klippet. Kulan börjar en cirkelrörelse och för att bestämma trådkraften projiceras kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ på normalriktningen:



$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \quad \Rightarrow \qquad (3)$$

I normalriktningen är dock accelerationen noll i det första ögonblicket, eftersom hastigheten $\dot{s}$ är noll då. Insättning i (3) ger

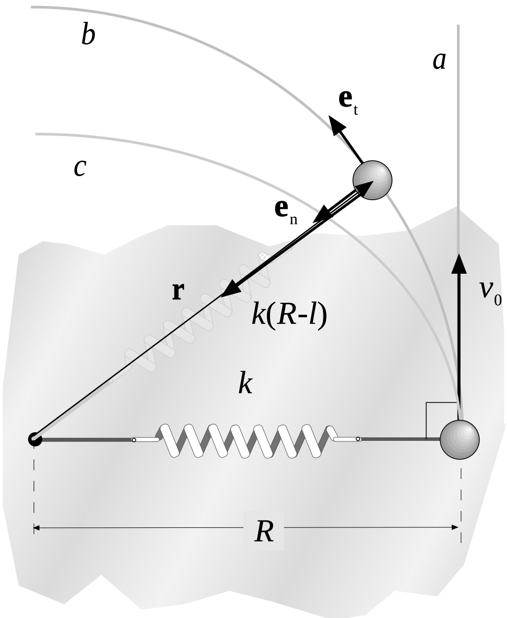
$$0 = S_2 - mg\sin\beta \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad S_2 = mg\sin\beta \qquad (5)$$

a) Vid jämvikt är kraften i vajern $S_1 = \dfrac{mg}{\sin\beta} = \underline{\underline{\dfrac{5}{4}mg}}$

b) I första ögonblicket efter klippet är kraften i vajern $S_2 = mg\sin\beta = \underline{\underline{\dfrac{4}{5}mg}}$

LP 7.30



Pucken påverkas av tyngdkraften mg, normalkraften N och fjäderkraften. Tyngdkraften och normalkraften är vinkelräta mot rörelsens plan och behöver inte beaktas.

Om utgångsfarten är mycket stor fås bankurvan a, om utgångsfarten är liten fås bankurvan c. För en viss fart v_0 fås den cirkulära bankurvan.

Inför basvektorerna $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$ i det naturliga koordinatsystemet. Fjäderkraften, vars storlek är $k(r-l)$ verkar i normalriktningen

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ blir i komponentform

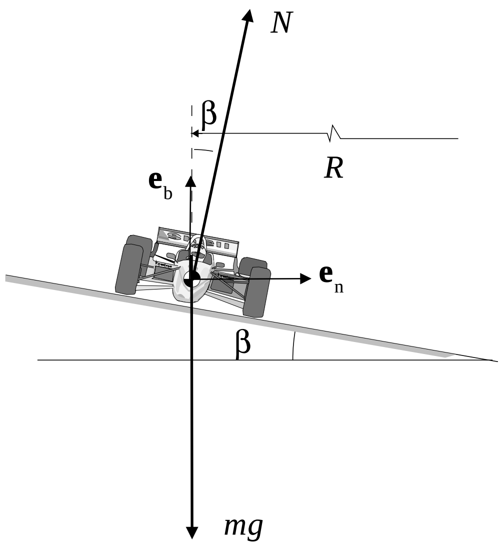
$$\mathbf{e}_t: \quad m\ddot{s} = F_t \quad \Rightarrow \quad m\ddot{s} = 0 \tag{1}$$

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \quad \Rightarrow \quad m\frac{\dot{s}^2}{R} = k(R-l) \tag{2}$$

Ekv (1) säger att farten är konstant: $\dot{s} = v_0$. Sätt in detta i ekv (2)! $\Rightarrow$

$$m\frac{{v_0}^2}{R} = k(R-l) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_0 = \sqrt{\frac{kR}{m}(R-l)}}}$$

LP 7.31



Bilen påverkas av tyngdkraften mg och normalkraften N. Någon friktionskraft skall inte behövas om man kör med en väl anpassad fart v_0.

Inför basvektorerna $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$ i det naturliga koordinatsystemet. Tangentialriktningen $\mathbf{e}_t$ pekar i hastighetens riktning medan normalriktningen $\mathbf{e}_n$ pekar in mot krökningscentrum. Binormalriktningen $\mathbf{e}_b$ definieras med kryssprodukten $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ blir i komponentform

$$\mathbf{e}_t: \quad m\ddot{s} = F_t \quad \Rightarrow \quad m\ddot{s} = 0 \tag{1}$$

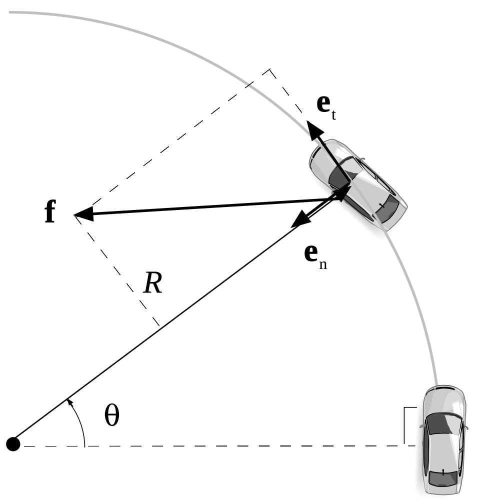
$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \quad \Rightarrow \quad m\frac{v_0^{\,2}}{R} = N\sin\beta \tag{2}$$

$$\mathbf{e}_b: \quad 0 = F_b \quad \Rightarrow \quad 0 = N\cos\beta - mg \tag{3}$$

Ekv (1) säger att farten är konstant: $\dot{s} = v_0$. Detta utnyttjas i ekv (2). Lös ut normalkraften ur ekv (3) och sätt in det i ekv (2)!

$$m\frac{v_0^{\,2}}{R} = \frac{mg}{\cos\beta}\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_0 = \sqrt{gR\tan\beta}}}$$

LP 7.32



Inför det naturliga koordinatsystemet med koordinaten $s = 0$ vid tiden $t = 0$ och basvektorerna $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$ enligt figur. Bilen påverkas av tyngdkraften, normalkraften och friktionskraften. Eftersom bara friktionskraften ligger i rörelsens plan måste den vara lika med massan gånger accelerationen.

Begynnelsevillkoret är

$$t = 0 \quad \begin{cases} s = 0 \\ \dot{s} = 0 \end{cases}$$

Vi använder beteckningen $\dot{s} \equiv v$ för hastigheten och betecknar friktionskraftens komponenter f_t och f_n.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ blir i komponentform

$$\mathbf{e}_t: \quad m\ddot{s} = F_t \quad \Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f_t \tag{1}$$

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \quad \Rightarrow \quad m\frac{v^2}{R} = f_n \tag{2}$$

Friktionskraftens storlek är alltså

$$f = \sqrt{f_t^2 + f_n^2} = \sqrt{\left(m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(m\frac{v^2}{R}\right)^2} = m\sqrt{a_0{}^2 + \frac{v^4}{R^2}} \tag{3}$$

Givet i problemtext:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0 \quad \Rightarrow \quad v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = a_0 \quad \Rightarrow \quad v\mathrm{d}v = a_0\mathrm{d}s \quad \Rightarrow$$

$$\frac{v^2}{2} - 0 = a_0 s \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2a_0 s} \tag{4}$$

Observera att det är samma samband som för fallhastigheten i tyngdkraftfältet ($v = \sqrt{2gh}$). Insättning i (3) ger sambandet för hur friktionskraften växer med sträckan.

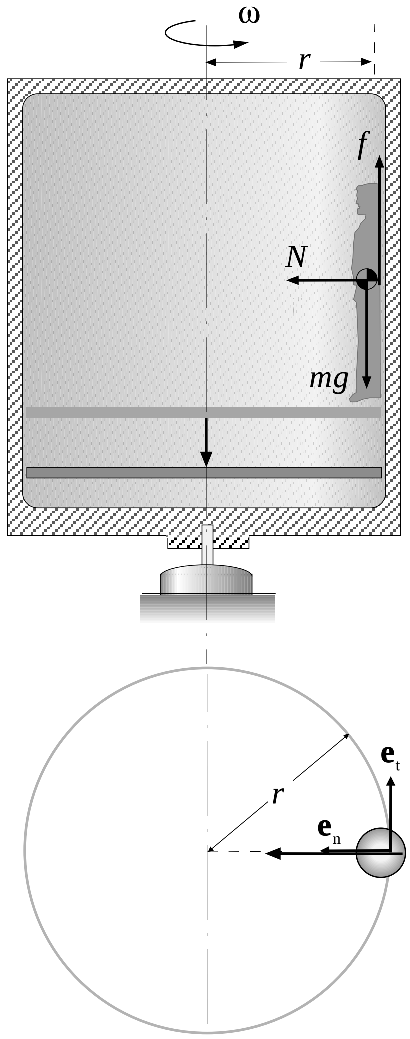
$$f = m\sqrt{a_0{}^2 + \frac{4a_0{}^2 s^2}{R^2}} \tag{5}$$

Den maximala friktionskraften som kan produceras av ytorna är $f_{\max} = \mu N = \mu mg$. Det ger villkoret

$$m\sqrt{a_0{}^2 + \frac{4a_0{}^2 s_1{}^2}{R^2}} = \mu mg \quad \Rightarrow \quad a_0{}^2 + \frac{4a_0{}^2 s_1{}^2}{R^2} = \mu^2 g^2 \quad \Rightarrow$$

$$s_1{}^2 = \frac{R^2}{4a_0{}^2}\left(\mu^2 g^2 - a_0{}^2\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{s_1 = \frac{R}{2a_0}\sqrt{\left(\mu^2 g^2 - a_0{}^2\right)}}} \qquad s_1 \approx 67 \text{ m}$$

LP 7.33



Personen beskriver en cirkelrörelse med radien r. Det är friktionskraften som håller personen uppe. Den maximala friktionskraften som kan produceras ges av $f_{\max} = \mu N$.

Inför basvektorerna $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_n$ och $\mathbf{e}_b$ i det naturliga koordinatsystemet.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ blir i komponentform

$$\mathbf{e}_t: \quad m\ddot{s} = F_t \quad \Rightarrow \quad m \cdot 0 = F_t \qquad (1)$$

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \quad \Rightarrow \quad mr\omega^2 = N \qquad (2)$$

$$\mathbf{e}_b: \quad 0 = F_b \quad \Rightarrow \quad 0 = f - mg \qquad (3)$$

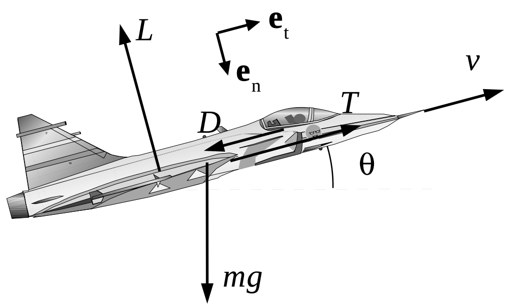
Den maximala friktionskraften som kan produceras ges alltså av $f_{\max} = \mu N$. Ekv (2) och (3) ger

$$mr\omega^2 = \frac{mg}{\mu} \qquad \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\mu r} \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{g}{\mu r}}}}$$

LP 7.36



De yttre krafterna på flygplanet är tyngdkraften mg, drivkraften T och motståndskraften D i hastighetens riktning samt lyftkraften L vinkelrät emot.

Om krafter skall bestämmas är det naturligt att skriva upp kraftekvationen. Förutom tangential- och normalriktningen nämns också bankurvans krökningsradie ρ i problemtexten.

Det är därför kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ projicerad på det naturliga systemets basvektorer som ger lösningen. Det är här accelerationen hos flygplanets masscentrum som avses.

Inför i en godtycklig punkt på bankurvan basvektorerna $\mathbf{e}_t$ och $\mathbf{e}_n$ i det naturliga koordinatsystemet. Det allmänna uttrycket för accelerationen är

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{1}$$

I komponentform fås

$$\mathbf{e}_t: \quad m\ddot{s} = T - D - mg\sin\theta \tag{2}$$

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = mg\cos\theta - L \tag{3}$$

I texten är farten given: $\dot{s} = v$ liksom fartökningen per tid: $\ddot{s} = a_t$. Insättning i ekv (2) och (3) ger

$$m\,a_t = T - D - mg\sin\theta \tag{4}$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\theta - L \tag{5}$$

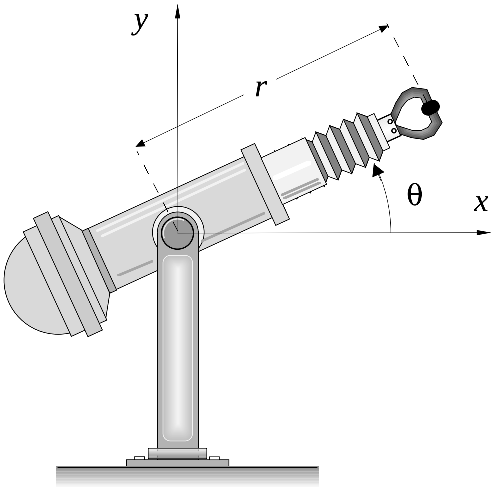
och de sökta krafterna blir

$$D = T - m(g\sin\theta + a_t) \tag{6}$$

$$L = m\left(g\cos\theta - \frac{v^2}{\rho}\right) \tag{7}$$

Ekv (6) säger att motståndskraften är lika stor som drivkraften om hastigheten är konstant och horisontell. Om flygplanet dyker vertikalt utan luftmotstånd och drivkraft är accelerationen lika stor som tyngdaccelerationen. Om flygplanet dyker vertikalt utan drivkraft med konstant hastighet är luftmotståndet lika med tyngdkraften.
Ekv (7) säger att lyftkraften är lika stor som tyngdkraften om bankurvan är rätlinjig och horisontell.

LP 7.38



Bankurvan är given

$$\begin{cases} r = R(2-\cos\omega t) \\ \theta = \beta(5-2\sin\omega t) \end{cases} \tag{1}$$

Bestäm, som funktion av tiden t, den radiella och transversella komponenten av den kraft som verkar på den lilla kroppen.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ har i cylinderkoordinater komponenterna:

$$\begin{cases} F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \\ F_\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) \end{cases} \tag{2}$$

För att kunna bestämma kraftkomponenterna måste vi bestämma alla tidsderivator i högerledet. Vi startar med den givna bankurvan (1)

$$\begin{cases} \dot{r} = -R\omega(-\sin\omega t) = R\omega\sin\omega t \\ \dot{\theta} = -2\beta\omega\cos\omega t \end{cases} \tag{3}$$

Ett biresultat är att kroppens hastighet är

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta = R\omega\sin\omega t\,\mathbf{e}_r - 2R\beta\omega\cos\omega t(2-\cos\omega t)\,\mathbf{e}_\theta \tag{4}$$

Ytterliggare en tidsderivering av (3) ger

$$\begin{cases} \ddot{r} = R\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{\theta} = -2\beta\omega^2(-\sin\omega t) = 2\beta\omega^2\sin\omega t \end{cases} \tag{5}$$

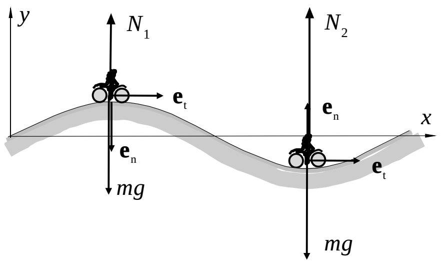
Insättning i kraftekvationen (2) ger

$$\begin{cases} F_r = m\left[R\omega^2\cos\omega t - R(2-\cos\omega t)(-2\beta\omega\cos\omega t)^2\right] \\ F_\theta = m\left[R(2-\cos\omega t)2\beta\omega^2\sin\omega t + 2R\omega\sin\omega t(-2\beta\omega\cos\omega t)\right] \end{cases} \tag{6}$$

Förenkling ger slutligen

$$\begin{cases} F_r = mR\omega^2\left[\cos\omega t - 4\beta^2\cos^2\omega t(2-\cos\omega t)\right] \\ F_\theta = 2mR\beta\omega^2\sin\omega t(2-3\cos\omega t) \end{cases} \tag{7}$$

LP 7.39



De yttre krafterna på motorcykeln är tyngdkraften mg och normalkraften N.
Normalkraften skall bestämmas och det är naturligt att skriva upp kraft-ekvationen. Krökningsradien ρ nämns i problemtexten och den ingår i accelerationen i normalriktningen.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ projicerad på det naturliga systemets basvektorriktningar

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_t \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} m\ddot{s} = 0 \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = \pm mg \;\mathrm{m}\; L \end{cases} \tag{1}$$

Övre tecknet för den högsta punkten på bankurvan, som ges av

$$y = b\sin(2\pi x / L) \tag{2}$$

Krökningsradien bestäms ur

$$\rho = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{|y''|} \tag{3}$$

Derivatorna bestäms ur (3):

$$y' = b\frac{2\pi}{L}\cos(2\pi x / L) \tag{4}$$

$$\Rightarrow \qquad y'' = -b\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sin(2\pi x / L) \tag{5}$$

För max och min på kurvan (2) gäller $\quad y' = 0$ (6)

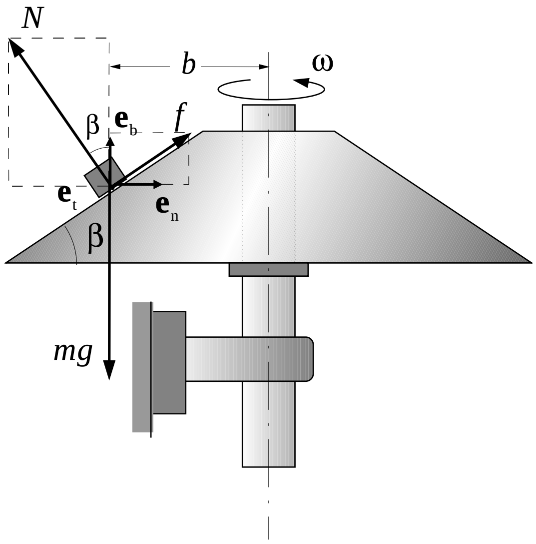
$$|y''| = b\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \quad \rho = \frac{(1+0)^{3/2}}{b\left(\dfrac{2\pi}{L}\right)^2} = \frac{L^2}{4\pi^2 b} \tag{7}$$

Insättning i ekv (b) ger för högsta respektive lägsta punkten

$$m\,4\pi^2 b\frac{v^2}{L^2} = mg - N_1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{N_1 = mg - m\,4\pi^2 b\frac{v^2}{L^2}}}$$

$$m\,4\pi^2 b\frac{v^2}{L^2} = -mg + N_2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{N_2 = mg + m\,4\pi^2 b\frac{v^2}{L^2}}}$$

LP 7.42



Så länge kroppen är i vila relativt den koniska ytan beskriver den en cirkelrörelse med radien b och vinkelhastigheten ω. För en liten vinkelhastighet kan friktionskraften hålla kvar kroppen. För en tillräckligt stor vinkelhastighet antar friktionskraften sitt maximala värde $f = \mu N$. Det är detta gränsfall som skall studeras.

För cirkelrörelse spelar det ingen roll om man använder det naturliga koordinatsystemet eller cylinderkoordinater. Här väljer vi det förra.

Projicera kraftekvationen $$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1}$$

på tangential- normal- och binormalriktningen:

$$\mathbf{e}_t: \quad m\ddot{s} = F_t \tag{2}$$

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \tag{3}$$

$$\mathbf{e}_b: \quad 0 = F_b \tag{4}$$

Om vinkelhastigheten ökar mycket långsamt är $\ddot{s} = 0$ och ekv (2) visar att det inte krävs någon kraft F_t. Insättning i (3) och (4) ger

$$\mathbf{e}_n: \quad mb\omega^2 = -N\sin\beta + \mu N\cos\beta \tag{5}$$

$$\mathbf{e}_b: \quad 0 = N\cos\beta + \mu N\sin\beta - mg \tag{6}$$

Ekv (6) ger $$N = \frac{mg}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \tag{7}$$

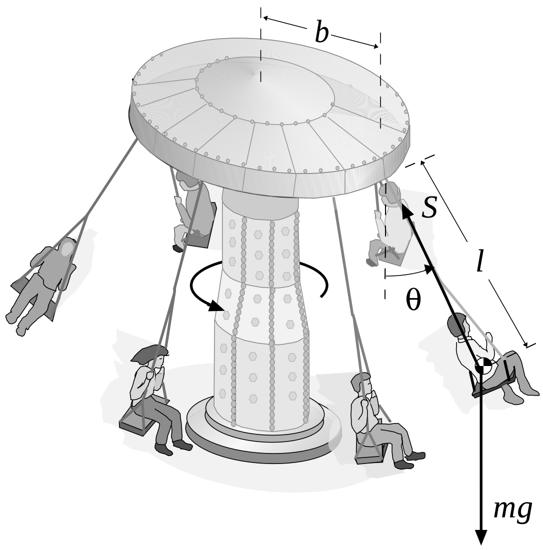
Insättning i (5) ger $$mb\omega^2 = \frac{-\sin\beta + \mu\cos\beta}{\cos\beta + \mu\sin\beta}mg \tag{8}$$

Efter förenkling fås resultatet

$$b\omega^2(\cos\beta + \mu\sin\beta) = (-\sin\beta + \mu\cos\beta)g \tag{9}$$

$$\underline{\underline{\mu = \frac{g\sin\beta + b\omega^2\cos\beta}{g\cos\beta - b\omega^2\sin\beta}}}$$

LP 7.45

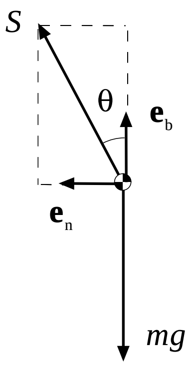


Under en viss tid då vinkelhastigheten är konstant beskriver varje barn en cirkelrörelse i ett horisontalplan. Barnet påverkas av tyngdkraften mg och trådkraften S.
Bestäm vinkelhastigheten då linan bildar vinkeln θ med vertikalen.

Kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

blir projicerad på det naturliga koordinatsystemets basvektorer:



$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_t \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases}$$

Insättning ger

$$\begin{cases} m\ddot{s} = 0 \\ m(b + l\sin\theta)\omega^2 = S\sin\theta \\ 0 = S\cos\beta - mg \end{cases}$$

Ingen kraft i tangentialriktningen betyder att farten $\dot{s} = (b + l\sin\theta)\omega$ är konstant. Krökningsradien ρ är densamma som cirkelns radie. Om trådkraften S elimineras genom att (3) insättes i (2) fås ekvationen

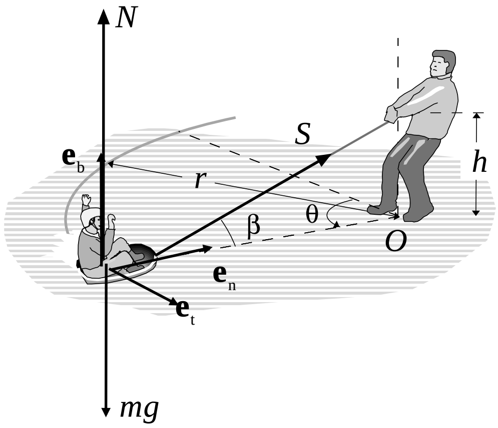
$$m(b + l\sin\theta)\omega^2 = \frac{mg}{\cos\beta}\sin\beta$$

$$\omega^2 = \frac{g\tan\beta}{(b + l\sin\theta)}$$

Vinkelhastigheten är

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{g\tan\beta}{(b + l\sin\theta)}}}}$$

LP 7.46



Pulkan med barnet beskriver en cirkelrörelse i ett horisontalplan. Systemet påverkas av tyngdkraften mg, normalkraften N och trådkraften S.Bestäm normalkraften då vinkelhastigheten för tråden är $\dot{\theta} = \omega$.

Inför hjälpstorheten β som vinkeln mellan tråden och horisontalplanet.

Kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

blir projicerad på det naturliga koordinatsystemets basvektorer:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_t \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{s} = 0 & (1) \\ m\dfrac{v^2}{r} = S\cos\beta & (2) \\ 0 = N + S\sin\beta - mg & (3) \end{cases}$$

Ingen kraft i tangentialriktningen betyder att farten $\dot{s} = v = r\omega$ är konstant. Krökningsradien ρ är densamma som cirkelns radie. Om trådkraften S elimineras genom att (3) insättes i (2) fås ekvationen

$$m\frac{(r\omega)^2}{r} = \left(\frac{mg - N}{\sin\beta}\right)\cos\beta$$

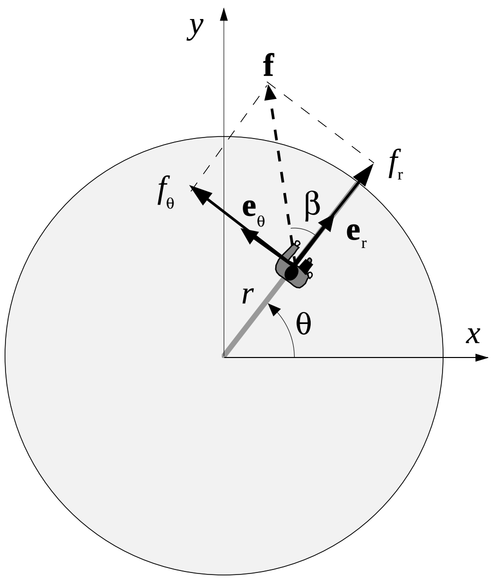
$$mr\omega^2 \tan\beta = mg - N$$

$$N = mg - mr\omega^2 \tan\beta$$

Men vinkeln β bestäms ur sambandet $\tan\beta = \dfrac{h}{r}$. Insättning ger

$$\underline{\underline{N = mg - mh\omega^2}}$$

LP 7.53



De yttre krafter som verkar på mannen är tyngdkraften och normalkraften i vertikal riktning samt friktionskraften **f** i karusellens plan.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ är i planpolära koordinater skrivs allmänt

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F_r \\ m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = F_\theta \end{cases} \qquad (1\text{-}2)$$

Antag att friktionskraften har komponenterna f_r och f_θ.

Nu vet vi från problemtexten att

$$\dot{r} = v_0; \quad \ddot{r} = 0 \qquad (3)$$
$$\ddot{\theta} = \alpha; \quad \dot{\theta} = \omega = \alpha t \qquad (4)$$

Insättning ger

$$\begin{cases} m\left(0 - v_0 t \cdot (\alpha t)^2\right) = f_r \\ m\left(r\alpha + 2v_0\alpha t\right) = f_\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} f_r = -m v_0 \alpha^2 t^3 \\ f_\theta = m\left(r\alpha + 2v_0\alpha t\right) \end{cases}$$

Tiden kan elimineras eftersom vi vet att $r = v_0 t$

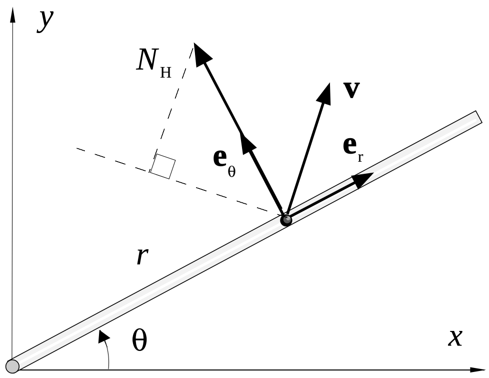
$$\begin{cases} f_r = -\dfrac{m\alpha^2 r^3}{v_0^{\;2}} \\ f_\theta = 3m\alpha r \end{cases} \qquad (3)$$

Vinkeln mellan friktionskraften och radialriktningen ges av

$$\tan\beta = \frac{f_\theta}{f_r} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\beta = -\frac{3v_0^{\;2}}{\alpha r^2}$$

Kommentar: Minustecknet säger att friktionskraften egentligen bildar en trubbig vinkel med radialriktningen, eftersom den radiella komponenten är riktad inåt. Det behövs ju en centripetalkraft inåt för att ge en acceleration inåt.

LP 7.55



Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ är i cylinderkoordinater

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F_r \\ m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = F_\theta \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \qquad (1\text{-}3)$$

Begynnelsevillkoret är $\quad t = 0 \quad \begin{cases} r = r_0 \\ \dot{r} = 0 \end{cases}$

Tyngdkraft och kontaktkraft är de enda krafterna. Det finns ingen kraft i rörets riktning. Kontaktkraften som här bara är en normalkraft eftersom röret är glatt kan uppdelas i en horisontell och en vertikal komposant. Insättning i kraftekvationen ger

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = 0 \\ m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = N_H \\ m\ddot{z} = N_V - mg \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\omega^2\right) = 0 & (1') \\ 2m\dot{r}\omega = N_H & (2') \\ 0 = N_V - mg & (3') \end{cases}$$

Ekv (2’) och (3’) används för att bestämma normalkraftens komposanter. Bankurvans ekvation borde då kunna bestämmas med ekv (1):

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \qquad (4)$$

Vi gör en ansats, dvs vi gissar att ekvationen satisfieras av tidsfunktionen

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \qquad (5)$$

där A och B är (integrations-) konstanter. För att kunna utnyttja begynnelsevillkoret tidsderiveras ansatsen:

$$\dot{r} = \omega\left(Ae^{\omega t} - Be^{-\omega t}\right) \qquad (6)$$

Begynnelsevillkoret ger nu med (6) och (7)

$$r_0 = A + B \qquad (8)$$

$$0 = \omega(A - B) \qquad (9)$$

Vilket betyder att $\quad B = A = \dfrac{r_0}{2} \qquad (10)$

Lösningen är alltså $\quad r = \dfrac{r_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) \qquad (11)$

Eftersom vinkelhastigheten är konstant så är $\omega t = \theta$ och bankurvans ekvation kan skrivas

$$r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right) \qquad \text{eller} \qquad r = r_0 \cosh\theta$$