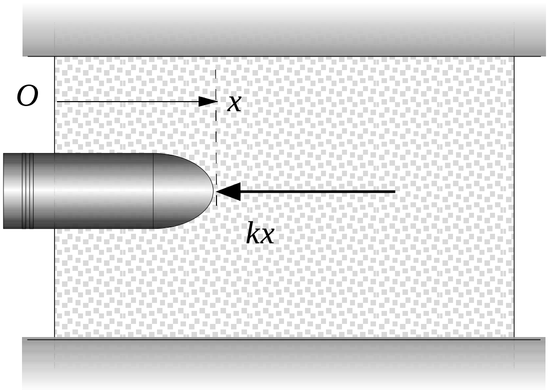
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 8

LP 8.1



Vi antar först att den givna bromsande kraften $F = kx$ är den enda kraft som påverkar rörelsen och därmed också inträngningsdjupet. Men verkar ingen kraft i rörelseriktningen? Fastän man i talspråk kunde ha sagt att ”kulan kom med en våldsam kraft mot målet” är det inte frågan om en kraft i fysikalisk mening. Kulan har däremot från början en rörelsemängd $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ som minskar till noll vid inbromsningen. Det är förändringen per tid av denna rörelsemängd som enligt kraftekvationen $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ är detsamma som nettokraften

på kulan. Begynnelsevillkoret är $\quad t = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases}$

Vi ska bestämma farten som funktion av läget x. En energiekvation är just en sådan ekvation där tidsberoendet eliminerats. Vi väljer här

lagen om den kinetiska energin: $\boxed{U = T - T_0}$ (1)

Den kinetiska energin från början är given: $T_0 = \frac{1}{2} m v_0^{\,2}$ (2)

Arbetet U, som den bromsande kontaktkraften gör, bestäms genom integrering enligt definitionen

$$U = \int_{\mathbf{r}_0 \, C}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{3}$$

Både kraften och förflyttningen har här komponent endast i x-riktningen. Kraften är motsatt riktad förflyttningen så att ett minustecken uppstår i skalärprodukten. Insättning i (3) ger

$$U = \int_0^x -kx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}kx^2 - 0$$

Insättning i huvudekvationen (1) ger

$$-\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mv_0^{\,2} \tag{4}$$

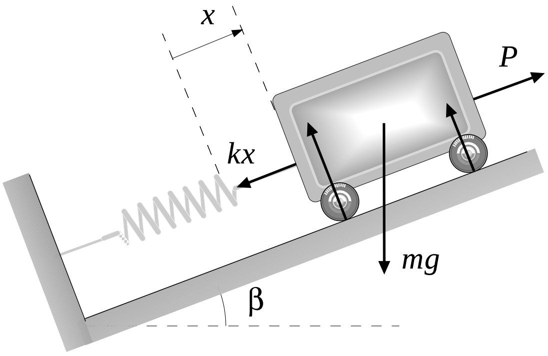
$$\Rightarrow \qquad \dot{x} = \sqrt{v_0^{\,2} - \frac{k}{m}x^2} \tag{5}$$

Vi vet att inträngningsdjupet är d. Det betyder enligt ekv (5) att

$$v_0^{\,2} - \frac{k}{m}d^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{mv_0^{\,2}}{d^2}$$

Insättning i (5) ger resultatet $\quad \underline{\underline{\dot{x} = v_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{d^2}}}}$

LP 8.2



En krafts arbete bestäms med hjälp av definitionen

$$U = \int_{\mathbf{r}_1\,C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1\,C}^{\mathbf{r}_2} \left(F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z\right)$$

Förflyttningen av kraftens angrepps-punkt sker från läget $\mathbf{r}_1$ till $\mathbf{r}_2$ längs vägen C. Definitionen visar att det är bara förflyttningen i kraftens riktning eller kraftkomponenten i förflyttning-ens riktning som ger ett bidrag.
Vi bestämmer nu denna linjeintegral för de tre krafterna i tur och ordning.

a) Tyngdkraften har komponenten $F_x = -mg\sin\beta$ i förflyttningens riktning. Komponenten som är vinkelrät mot planet bidrar ej till arbetet.

$$U = \int_{\mathbf{r}_1\,C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2} -mg\sin\beta\,\mathrm{d}x = -mg\sin\beta\left(x_2 - x_1\right)$$

b) Fjäderkraften har komponenten $F_x = -kx$ i förflyttningens riktning.

$$U = \int_{\mathbf{r}_1\,C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2}k\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right)$$

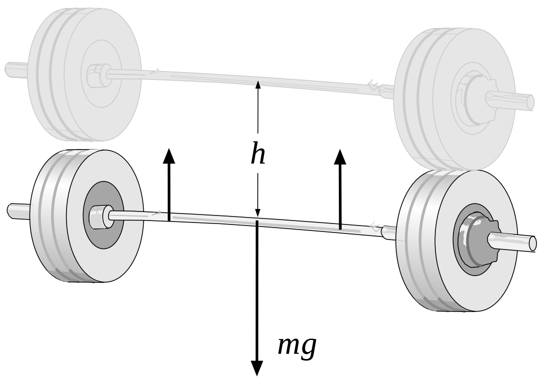
c) Kraften P verkar i förflyttningens riktning.

$$U = \int_{\mathbf{r}_1\,C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2} P\,\mathrm{d}x = P\left(x_2 - x_1\right)$$

Observera att om förflyttningen är uppåt längs planet gör kraften P ett positivt arbete medan tyngdkraften och fjäderkraften gör ett negativt arbete.

För krafter som är konstanta är arbetet "kraft gånger väg". För andra krafter som t ex fjäderkraften måste arbetet bestämmas med en integration.

LP 8.3



Skivstången påverkas av tyngdkraften mg och krafterna från händerna. Dessa krafter gör var för sig arbeten under lyftet.

Tyngdkraftens arbete är $U_{mg} = -mgh$.

Det arbete som tyngdlyftaren gör kallas U_1. För hela lyftet gäller

lagen om den kinetiska energin:

$$\boxed{U = T - T_0}$$

Insättning ger $$U_1 - mgh = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} - 0 \qquad (1)$$

För att bestämma U_1 måste alltså farten v_1 bestämmas.

Lyftet sker med konstant acceleration som vi kan kalla a. Kinematiksamband ger med begynnelsevillkoret vila vid $x = 0$.

$$\ddot{x} = a$$

$$\dot{x} = at$$

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

$$x = h \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2h}{(\Delta t)^2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2h}{\Delta t}$$

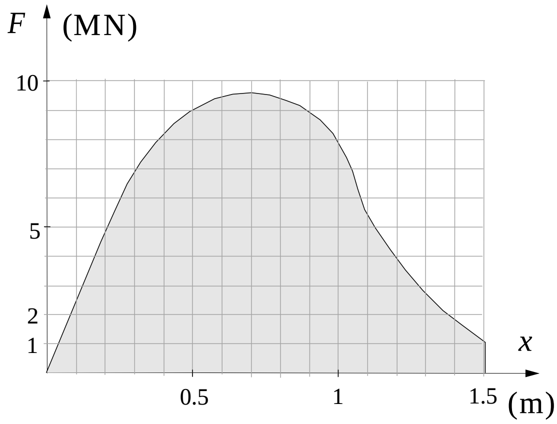
Insättning i (1) ger

$$\underline{\underline{U_1 = mgh + \frac{1}{2}m\left(\frac{2h}{\Delta t}\right)^2}}$$

Arbetet som görs för att praktiskt taget utan fart lyfta skivstången är alltså $U_1 = mgh$.

Numeriskt fås $U_1 = 40\left[9.81 \cdot 0.5 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right)^2\right]\text{J} \approx 0.2\,\text{kJ}$

LP 8.4



En krafts arbete bestäms med hjälp av definitionen

$$U = \int_{\mathbf{r}_1 C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1 C}^{\mathbf{r}_2} \left(F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z\right)$$

Om kraften riktning sammanfaller med rörelseriktningen fås

$$U = \int F_x(x)\mathrm{d}x$$

Denna integral motsvaras i figuren av arean under kurvan. I stället för att integrera en funktion gör vi en upp-skattning av areans storlek.

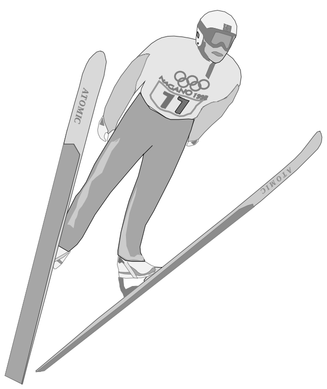
Varje ruta i figuren motsvarar "arean" 0.1 MNm. Antalet rutor uppskattas till 90. Det totala arbetet som kraften gör är alltså $U = 9$ MNm.

Lagen om den kinetiska energin: $$\boxed{U = T - T_0}$$

ger $$U = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} - 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2U}{m}}$$

Det numeriska värdet blir $$v_1 = \sqrt{\frac{18\cdot 10^6}{5}}\ \mathrm{m/s} \approx 2\cdot 10^3\,\mathrm{m/s}$$

LP 8.5



Av de totala friktionsförlusterna står luftmotståndet för 90%. Hur stora är då den totala förlusten av mekanisk energi?

Antag att motståndskrafterna totalt gör arbetet $-U_1$.

Lagen om den kinetiska energin:

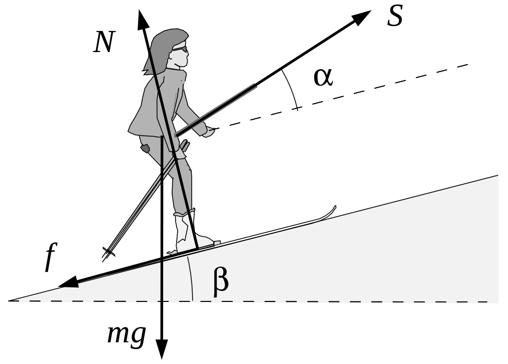
$$\boxed{U = T - T_0}$$

ger $$-U_1 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \quad \Rightarrow \quad U_1 = mgh - \frac{1}{2}mv^2$$

Om farten längst ner i backen är noll har motståndskrafterna alltså gjort lika stort arbete som tyngdkraften.

Luftmotståndskraften har gjort arbetet $$\underline{\underline{U_2 = 0.9\cdot\left(mgh - \frac{1}{2}mv^2\right)}}$$

LP 8.6



En krafts arbete bestäms med hjälp av definitionen

$$U = \int_{\mathbf{r}_1 C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1 C}^{\mathbf{r}_2} \left(F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z \right)$$

För krafter som är konstanta bestäms arbetet som "kraft gånger väg". Här är trådkraften S och tyngdkraften mg konstanta. Eftersom accelerationen är noll i normalkraftens riktning är normalkraften också konstant. Friktionskraften är vid glidning $f = \mu N$ och den måste då också vara konstant.

a) Tyngdkraften har komponenten $F_x = -mg \sin\beta$ i förflyttningens riktning. Komponenten som är vinkelrät mot planet bidrar ej till arbetet.

$$U = \int_{\mathbf{r}_1 C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^x -mg \sin\beta \, \mathrm{d}x = -mg \sin\beta \cdot x$$

Alternativt säger man att förflyttningen i kraftens riktning (nivåändringen) är $x \sin\beta$. Arbetet blir $U = -mg \cdot x \sin\beta$

Numeriskt fås: $U = -60 \cdot 9.81 \cdot 10 \cdot \sin 0.3$ kJ $\approx$ -1.8 kJ

b) Trådkraften har komponenten $F_x = S \cos\alpha$ i förflyttningens riktning.

$$U = \int_{\mathbf{r}_1 C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^x S \cos\alpha \, \mathrm{d}x = S \cos\alpha \cdot x$$

Numeriskt fås: $U = 300 \cdot \cos 0.5 \cdot 10$ kJ ≈ 2.6 kJ

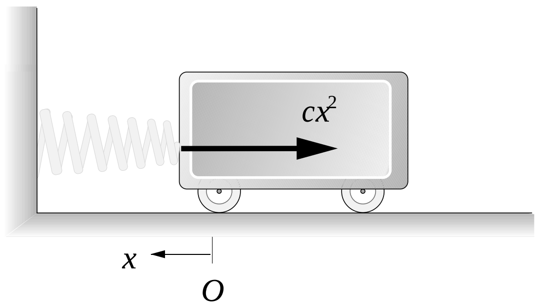
c) Friktionsraften $f = \mu N$ är parallell med förflyttningens riktning. Här måste först normalkraften bestämmas med kraftekvationens komponent i normalkraftens riktning:

$$N + S \sin\alpha - mg \cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \cos\beta - S \sin\alpha$$

$$U = \int_{\mathbf{r}_1 C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_0^x \mu N \, \mathrm{d}x = -\mu \left(mg \cos\beta - S \sin\alpha \right) x$$

Numeriskt fås: $U = 0.1(60 \cdot 9.81 \cdot \cos 0.3 - 300 \cdot \sin 0.5)$kJ $\approx$ -0.4 kJ

LP 8.7



En krafts arbete bestäms med hjälp av definitionen

$$U = \int_{\mathbf{r}_1 C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1 C}^{\mathbf{r}_2} \left(F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z \right)$$

Om kraften riktning sammanfaller med rörelseriktningen fås

$$U = \int F_x(x) \mathrm{d}x$$

Fjäderkraftens arbete blir $U = \int_0^x -cx^2 \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}cx^3$

Lagen om den kinetiska energin: $\boxed{U = T - T_0}$

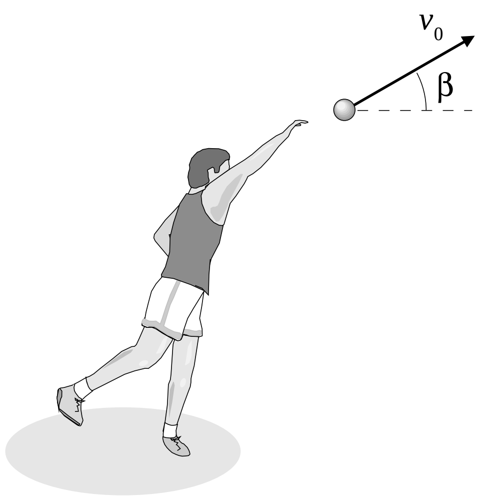
ger eftersom fjäderkraften är den enda kraft som gör arbete

$$-\frac{1}{3}cx_1^{\ 3} = \frac{1}{2}mv_1^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} \quad \Rightarrow$$

$$v_1^{\ 2} = v_0^{\ 2} - \frac{2c}{3m}x_1^{\ 3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_1 = \sqrt{v_0^{\ 2} - \frac{2c}{3m}x_1^{\ 3}}}}$$

Det numeriska värdet blir $v_1 = \sqrt{3^2 - \frac{2 \cdot 1200}{3 \cdot 2} 0.2^3}$ m/s ≈ 2.4 m/s

LP 8.8



Kulstötaren höjer kulans nivå och ger den en utgångshastighet som vi kallar v_1. Denna hastighet är indirekt given av kastparabelns utseende. Stighöjden är nämligen tidigare bestämd till

$$h = \frac{v_1^{\,2}\sin^2\beta}{2g}$$

Detta uttryck skall man kunna ta fram men behöver inte kunnas utantill. Se t ex kinematikavsnittet i teoriboken.

$$\Rightarrow \qquad v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\beta}$$

Lagen om den kinetiska energin: $\boxed{U = T - T_0}$

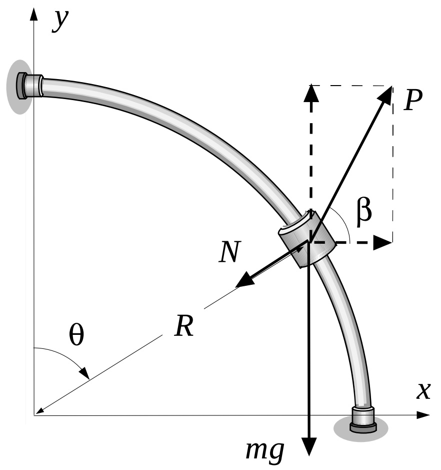
ger $$U_1 - mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} - 0 \qquad \Rightarrow$$

$$U_1 = mgh_1 + \frac{1}{2}m\frac{2gh}{\sin^2\beta} \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{U_1 = mg\left(h_1 + \frac{h}{\sin^2\beta}\right)}}$$

Det numeriska värdet blir $$U_1 \approx 7.257\cdot 9.81\left(1 + \frac{2.4}{\sin^2 36°}\right)\text{J} \approx 0.5\text{ kJ}$$

LP 8.9



En krafts arbete bestäms med hjälp av definitionen

$$U = \int_{\mathbf{r}_1\,C}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1\,C}^{\mathbf{r}_2} \left(F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z\right)$$

Hylsan påverkas av tyngdkraften mg, kraften P samt normalkraften N.

Normalkraften är i varje läge vinkelrät mot en infinitesimal förflyttning och bidrar ej till arbetet.

Tyngdkraftens totala arbete är

$$U_{mg} = mgR$$

Dela upp kraften **P** i en horisontell och en vertikalkomposant. De är båda konstanta och arbetet kan bestämmas som "kraft gånger väg". Komposanterna gör arbetena

$$U_{P1} = P\cos\beta \cdot R$$

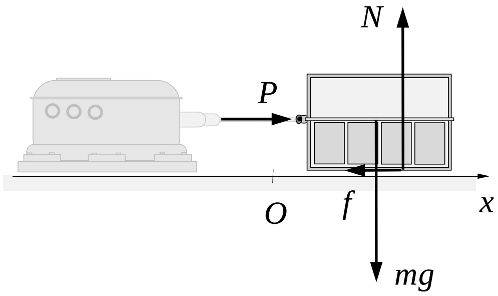
$$U_{P2} = -P\sin\beta \cdot R$$

Lagen om den kinetiska energin: $\boxed{U = T - T_0}$

ger då $$mgR + P\cos\beta\cdot R - P\sin\beta\cdot R = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} - 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{v_1 = \sqrt{\frac{2R}{m}\left(mg + P\cos\beta - P\sin\beta\right)}}}$$

LP 8.10



Containern har massan m. Den glider på ett horisontalplan med friktionstalet μ och påverkas av kraften $P = c + kx^2$.

Begynnelsevillkoret är

$$t = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

Frilägg containern! Förutom den givna hydrauliska kraften verkar tyngdkraften mg, normalkraften N samt friktionskraften f. Vi ska bestämma farten som funktion av läget x. Om krafternas arbeten på containern kan bestämmas fås fartändringen indirekt av

lagen om den kinetiska energin: $\boxed{U = T - T_0}$ (1)

Tyngdkraften och normalkraften gör inget arbete eftersom de är vinkelräta mot förflyttningen.

Enligt kraftekvationens vertikala komponent är

$$N = mg \tag{2}$$

Friktionskraften är fullt utbildad (dvs maximal) vid glidning så att

$$f = \mu N \qquad \Rightarrow \qquad f = \mu mg \tag{3}$$

Friktionskraftens arbete är då

$$U_f = \int_0^x -\mu mg \, \mathrm{d}x = \left[-\mu mgx\right]_0^x = -\mu mgx \tag{4}$$

och kan sägas vara ”kraft gånger väg” eftersom kraften är konstant.

Kraften P gör arbetet

$$U_P = \int_0^x \left(c + kx^2\right) dx = \left[cx + \frac{kx^3}{3}\right]_0^x = cx + \frac{kx^3}{3} \tag{5}$$

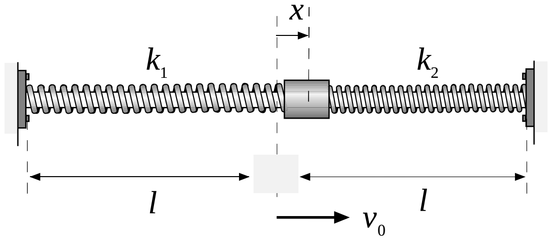
Observera att arbetet *måste* beräknas som en integral då kraften ej är konstant.

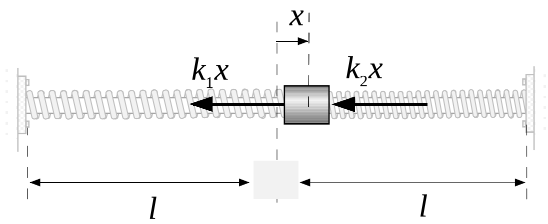
Insättning i huvudekvationen (1) ger nu

$$cx + \frac{kx^3}{3} - \mu mgx = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - 0 \tag{6}$$

$$\underline{\underline{\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[\left(c - \mu mg\right)x + \frac{kx^3}{3}\right]}}}$$

LP 8.19





Fjädrarnas maximala längdändring söks. Motsvarande rörelsetillstånd måste vara ett vändläge för hylsan, dvs då farten momentant är noll. Det betyder att den kinetiska energin som fanns från början har övergått till potentiell energi hos fjädrarna.
Förutom av fjäderkrafterna påverkas hylsan också av tyngdkraften mg och kontaktkraften från stången. Eftersom stången är glatt är friktionskraften noll och kontaktkraften består av enbart en normalkraft N. Vid en energibetraktelse gör varken mg eller N något arbete. De är därför inte heller utritade i frilägg-ningsfiguren.

Begynnelsevillkoret är $\quad t = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases}$

Även om vi ska betrakta ett ögonblick då farten är noll handlar det om farten i ett visst läge. I en problemtyp där man ska bestämma farten som funktion av läget används i första hand en energiekvation. Vi väljer här

lagen om den kinetiska energin: $$\boxed{U = T - T_0} \tag{1}$$

Den kinetiska energin från början är given: $$T_0 = \frac{1}{2} m v_0^{\,2} \tag{2}$$

Arbetet som en fjäderkraft gör vid en förlängning bestäms med integrering. Det blir negativt, eftersom kraften är motriktad förflyttningen:

$$\int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int F_x \mathrm{d}x = \int_0^x -kx \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} k x^2 \tag{3}$$

Huvudekvationen (1) ger nu hastigheten i ett godtyckligt läge:

$$-\frac{1}{2} k_1 x^2 - \frac{1}{2} k_2 x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m v_0^{\,2} \tag{4}$$

Speciellt fås läget (eller den maximala längdändringen $x_{\max}$) för ett vändläge då $\dot{x} = 0$

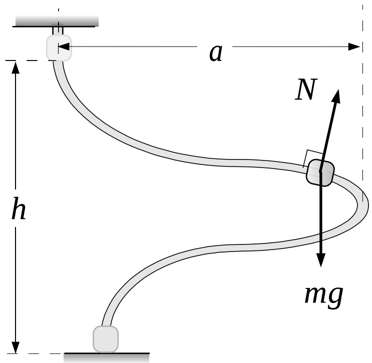
$$-\frac{1}{2} k_1 x_{\max}^{\,2} - \frac{1}{2} k_2 x_{\max}^{\,2} = 0 - \frac{1}{2} m v_0^{\,2} \tag{5}$$

$$(k_1 + k_2) x_{\max}^{\,2} = m v_0^{\,2} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}\, v_0$$

Anm.: Lösningen kan också fås ur lagen om mekaniska energins bevarande.

LP 8.23



Eftersom hylsan glider på en glatt stång påverkas den bara av tyngdkraften mg och normalkraften N. Normalkraften är vinkelrät mot hastigheten och gör alltså inget arbete. Tyngdkraften är konservativ vilket betyder att den mekaniska energin bevaras. Låt referensnivån för den potentiella energin vara i nedersta läget. Den mekaniska energin är en rörelsekonstant:

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0} \tag{1}$$

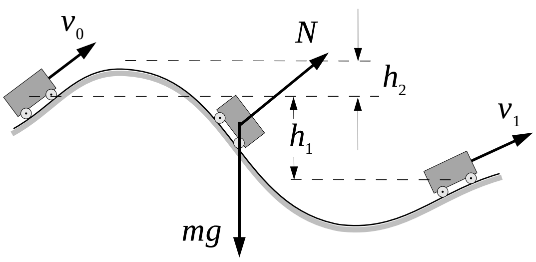
Insättning ger

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = 0 + mgh \tag{2}$$

$$\underline{\underline{v_1 = \sqrt{2gh}}}$$

Stångens form och längd har ingen betydelse. Det är endast förflyttningen i tyngdkraftens riktning som inverkar.

LP 8.24



Vagnen påverkas bara av tyngdkraften mg och normalkraften N. Normalkraften är vinkelrät mot hastigheten och gör alltså inget arbete. Tyngdkraften mg är konservativ. Den mekaniska energin bevaras alltså. Låt referensnivån för den potentiella energin vara i utgångsläget. Den mekaniska energin är en rörelsekonstant:

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0} \tag{1}$$

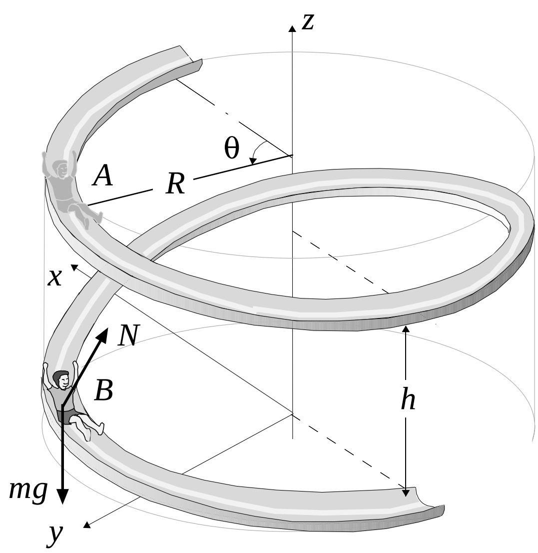
Insättning ger

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \tag{2}$$

$$v_1^2 = v_0^2 + 2gh_1 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh_1}}}$$

För att vagnen skall komma över krönet krävs en fart $v_{0\min} = \sqrt{2gh_2}$

LP 8.26



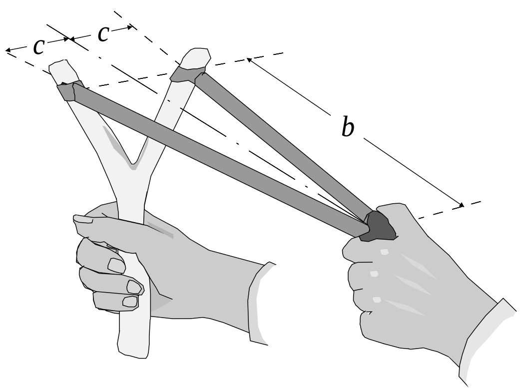
Barnet påverkas bara av tyngdkraften mg och normalkraften N. Normalkraften är vinkelrät mot hastigheten och gör alltså inget arbete. Tyngdkraften mg är konservativ. Den mekaniska energin bevaras alltså. Låt referensnivån för den potentiella energin vara i utgångsläget. Lagen om den mekaniska energins bevarande:

$$\boxed{T_B + V_B = T_A + V_A} \qquad (1)$$

ger
$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 - mgh = \frac{1}{2}mv_A{}^2 + 0 \qquad (2)$$

$$v_B{}^2 = v_A{}^2 + 2gh \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{v_B = \sqrt{v_A{}^2 + 2gh}}}$$

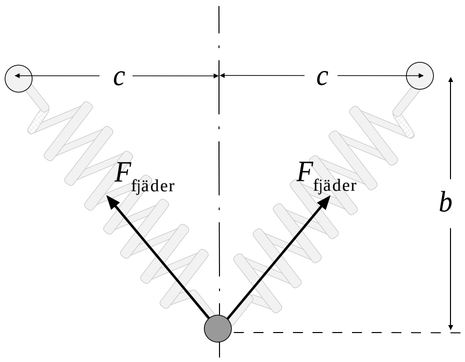
LP 8.29



Gummibanden kan ses som fjädrar. Stenen påverkas av fjäderkrafterna och tyngdkraften försummas. Fjäderkraften är konservativ. Om referensnivån för den potentiella energin motsvarar den naturliga längden hos fjädern så kan potentiella energin skrivas

$$V_{\text{fjäder}} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

där Δl är förlängningen räknat från den naturliga längden.



Lagen om den mekaniska energins bevarande:

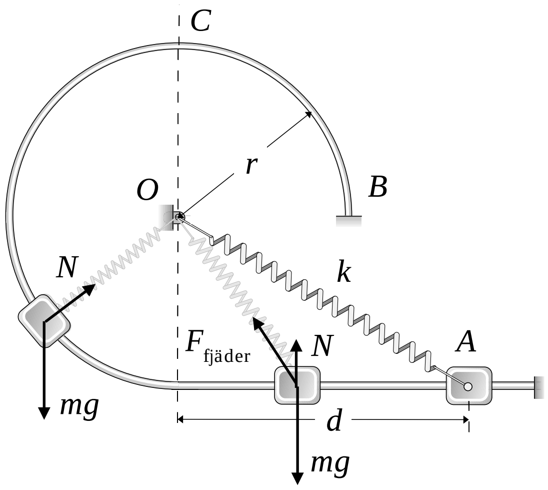
$$\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0} \qquad (1)$$

ger

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2 + 0 = 0 + 2\cdot\frac{1}{2}k\left(\sqrt{b^2+c^2} - l\right)^2 + 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}\cdot\left(\sqrt{b^2+c^2} - l\right)}}$$

LP 8.31



Hylsan påverkas av tyngdkraften mg normalkraften N och fjäderkraften. Vid cirkelrörelsen är dock fjäderkraften noll eftersom fjädern då har sin naturliga längd. Normalkraften är vinkelrät mot hastigheten och gör alltså inget arbete. Tyngdkraften mg och fjäderkraften är konservativa. Den mekaniska energin bevaras alltså. Låt referensnivån för den potentiella energin för tyngdkraften vara i utgångsläget. Om hylsan nätt och jämt når den översta punkten C når den också B, eftersom tyngdkraften drar den neråt.
Lagen om den mekaniska energins bevarande:

$$\boxed{T_C + V_C = T_A + V_A} \qquad (1)$$

ger

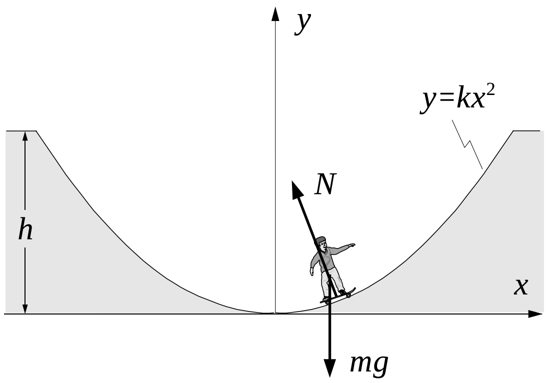
$$\frac{1}{2}mv_C{}^2 + mg \cdot 2r = 0 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{r^2+d^2} - r\right)^2 \qquad (2)$$

$$0 + 2mgr = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{r^2+d^2} - r\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{r^2+d^2} - r = \sqrt{\frac{4mgr}{k}} \quad \Rightarrow \quad r^2 + d^2 = \left(r + \sqrt{\frac{4mgr}{k}}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{d = \sqrt{2r\sqrt{\frac{4mgr}{k}} + \frac{4mgr}{k}}}} \qquad d \approx 0.49 \text{ m}$$

LP 8.32



Skateboardåkaren påverkas av tyngdkraften mg och normalkraften N. I det nedersta läget är normalkraften vertikal. Den bestäms med hjälp av kraftekvationens komponent i normalriktningen (naturliga komponenter), som här överensstämmer med riktningen vertikalt uppåt:

$$m\frac{v_C^{\,2}}{\rho_C} = N - mg \tag{1}$$

Index C står för det nedersta läget.

Lagen om den mekaniska energins bevarande ger farten v_C

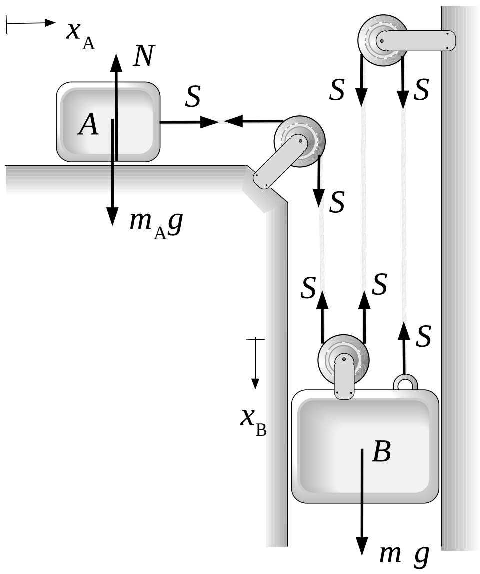
$$\boxed{T_C + V_C = T_A + V_A} \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^{\,2} + 0 = 0 + mgh \qquad \Rightarrow \qquad v_C = \sqrt{2gh} \tag{3}$$

Krökningsradien är given i problemtexten. För $x = 0$ fås $\rho_C = 1/2k$.

Insättning i (1) ger $N = mg + m\dfrac{2gh}{(1/2k)} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{N = mg(1 + 4kh)}}$

LP 8.33



Vi skall bestämma farten efter en viss förflyttning. Det är just den problemställningen som en energilag passar för. Frilägg först kropparna för att se vilka krafter som gör arbete.

I ett föregående problem har vi utrett kinematiken. Eftersom linan är oelastisk måste förflyttningen för A vara tre gånger så stor som förflyttningen för B. Trådkrafterna som verkar på kropparna A och B gör arbete men eftersom A rör sig i trådkraftens riktning och B en tredjedel så långt i motsatt riktning (relativt krafterna) så uträttar inte trådkrafterna tillsammans något arbete. Det är alltså bara tyngdkraften som uträttar arbete. Systemet är konservativt

Lagen om den mekaniska energins bevarande

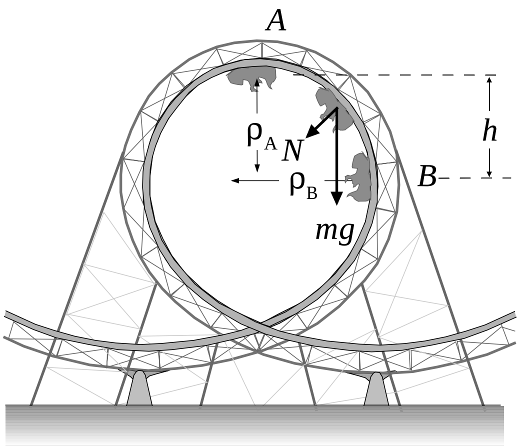
$$\boxed{T + V = T_0 + V_0} \qquad (1)$$

ger
$$\frac{1}{2} m_B v_B{}^2 + \frac{1}{2} m_A v_A{}^2 - m_B g h = 0 + 0 + 0 \qquad (2)$$

Men
$$v_A = 3 v_B \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} m_B + m_A\right) v_A{}^2 = m_B g h \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_A = \sqrt{\frac{18 m_B g h}{m_B + 9 m_A}}}}$$

LP 8.34



Vagnen påverkas av tyngdkraften mg och normalkraften N. I det översta läget är normalkraften vertikal, i det andra läget B är normalkraften horisontell. Den bestäms med hjälp av kraftekvationens komponent i normalriktningen (naturliga komponenter):

$$m\frac{v_A^{\ 2}}{\rho_A} = N_A + mg \tag{1}$$

$$m\frac{v_B^{\ 2}}{\rho_B} = N_B + 0 \tag{2}$$

Lagen om den mekaniska energins bevarande ger farten ger sambandet mellan farten v_A och v_B.

$$\boxed{T_A + V_B = T_B + V_B} \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^{\ 2} + mgh = \frac{1}{2}mv_B^{\ 2} + 0 \tag{4}$$

N_B skall bestämmas och är enligt ekv (2) bestämd om v_B är känd. Farten v_B uttrycks i v_A med ekv (4) och v_A ges av (1), eftersom $N_A = mg/2$ är given. Alltså,

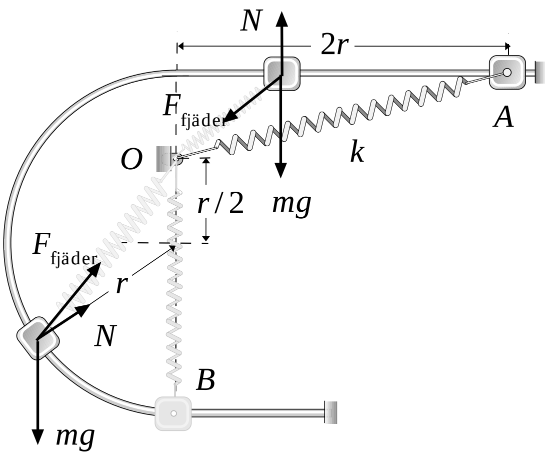
ekv (1) ger $$m\frac{v_A^{\ 2}}{\rho_A} = \frac{3}{2}mg$$

ekv (4) ger $$\frac{1}{2}mv_B^{\ 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mg\rho_A + mgh$$

ekv (2) ger $$N_B = \frac{1}{\rho_B}\cdot\left(\frac{3}{2}mg\rho_A + 2mgh\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{N_B = \frac{1}{\rho_B}\cdot\left(\frac{3}{2}\rho_A + 2h\right)mg}}$$

LP 8.35



Hylsan påverkas av tyngdkraften mg normalkraften N och fjäderkraften. Normalkraften är ständigt vinkelrät mot hastigheten och gör alltså inget arbete. Tyngdkraften mg och fjäderkraften är konservativa. Den mekaniska energin bevaras alltså. Låt referensnivån för den potentiella energin för tyngdkraften vara i utgångsläget. Potentiella energin för fjäderkraften är

$$V_{\text{fjäder}} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

där Δl är förlängningen räknat från den naturliga längden.

Lagen om den mekaniska energins bevarande:

$$\boxed{T_B + V_B = T_A + V_A} \qquad (1)$$

ger

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 - mg\cdot 2r + \frac{1}{2}k\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0{}^2 + 0 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(2r)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - r\right)^2 \qquad (2)$$

Förenkling ger

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 = mg\cdot 2r + \frac{1}{2}mv_0{}^2 + \frac{1}{2}k\left[\left(\sqrt{\frac{17}{4}r^2} - r\right)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] \quad \Rightarrow$$

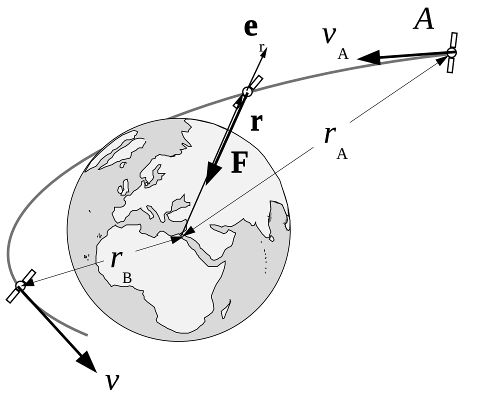
$$v_B{}^2 = v_0{}^2 + 4gr + \frac{k}{m}\left(\frac{20}{4} - \sqrt{17}\right)r^2 \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{v_B = \sqrt{v_0{}^2 + 4gr + \frac{k}{m}\left(5 - \sqrt{17}\right)r^2}}}$$

Numeriskt fås $\qquad v_B \approx \sqrt{9 + 0.8\cdot 9.81 + \frac{100}{0.4}\left(5 - \sqrt{17}\right)0.04}$ m/s

$$\Rightarrow \qquad v_B \approx 5.1 \text{ m/s}$$

LP 8.36



Satelliten kretsar kring jorden och påverkas av en enda kraft, gravitationskraften från jorden. Enligt Newtons allmänna gravitationslag är den

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{1}$$

där M och m är jordens respektive satellitens massa, r avståndet mellan kropparna och G den allmänna gravitationskonstanten. Minustecknet betyder att kraften är riktad inåt mot jorden medan enhetsvektorn $\mathbf{e}_r$ har riktning från jorden mot satelliten. Eftersom kraften är omvänt proportionell mot avståndet och lika med mg vid jordytan måste den också kunna skrivas

$$\mathbf{F} = -\frac{mgR^2}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{2}$$

där R är jordens radie.

Problemställningen gäller i princip farten som funktion av läget, och vi vet att lösningen i ett sådant problem ges av en energiekvation. Gravitationskraften är konservativ och potentialen är känd:

$$V = -G\frac{Mm}{r} \qquad \text{eller} \qquad V = -\frac{mgR^2}{r} \tag{3}$$

Potentialfunktionens lutning är ett mått på kraftens storlek. Med andra ord: om potentialfunktionen deriveras med avseende på r får man kraftkomponenten. Lagen om den mekaniska energins bevarande

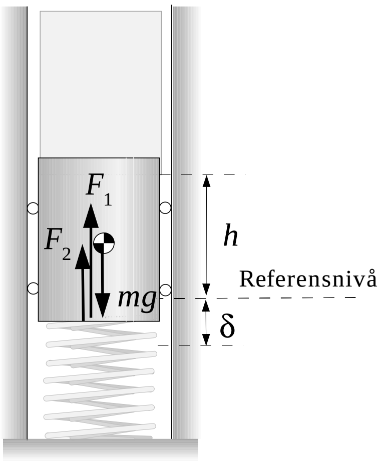
$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv_A{}^2 - \frac{mgR^2}{r_A} = \frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{mgR^2}{r_B} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v_B = \sqrt{v_A{}^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)}}}$$

Kommentar: Satelliten beskiver en centralkraftsrörelse men man behöver egentligen inte känna till den teorin för att kunna lösa problemet. Det är ju här bara kraftens potentialfunktion som utnyttjas.
Svaret säger att farten är konstant om avståndet till jorden är konstant, dvs om bankurvan är en cirkel.
Svaret ger också flykthastigheten, dvs den fart som i det första läget krävs för att satelliten ska nå ut oändligt långt utan överskottsenergi: $v_{\text{flykt}} = R\sqrt{2g/r_A}$.

LP 8.40



En tyngd mg faller i tyngdkraftfältet. Den vinner kinetisk energi på bekostnad av den potentiella energin. När tyngden får kontakt med fjädrarna minskas den kinetiska energin och den potentiella energin associerad med fjädrarna ökar då fjädrarna trycks ihop.

Eftersom både fjäderkraften och tyngdkraften är konservativa och de är de enda krafterna, så är den mekaniska energin en rörelsekonstant. Den mekaniska energin bevaras. Vi jämför alltså direkt summan av den kinetiska och potentiella energin i utgångsläget och det läge som motsvarar maximal förkortning av fjädrarna.

Det senare läget måste vara det läge då tyngden vänder, dvs då hastigheten momentant är noll. Lösningen borde ges av

lagen om den mekaniska energin:

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0} \tag{1}$$

Vi väljer som referensnivå för fjäderkraften det läge där fjädrarna har sin naturliga längd. Om samma referensnivå väljs för tyngdkraften (det är inte alls nödvändigt) ger ekv (1)

$$0 - mg\delta + \frac{1}{2}k_1\delta^2 + \frac{1}{2}k_2\delta^2 = 0 + mgh + 0 + 0 \tag{2}$$

Den kinetiska energin är noll i båda lägena. Trots att rörelsen består av två delar, fritt fall och fjäderkontakt, kan hela rörelsen betraktas på en gång. Det förutsätter förstås att ingen energi förloras vid en tänkbar stöt mot fjädrarna. Omskrivning av ekvationen ger

$$\frac{1}{2}(k_1 + k_2)\delta^2 - mg\delta - mgh = 0 \tag{3}$$

Vi löser denna andragradsekvation:

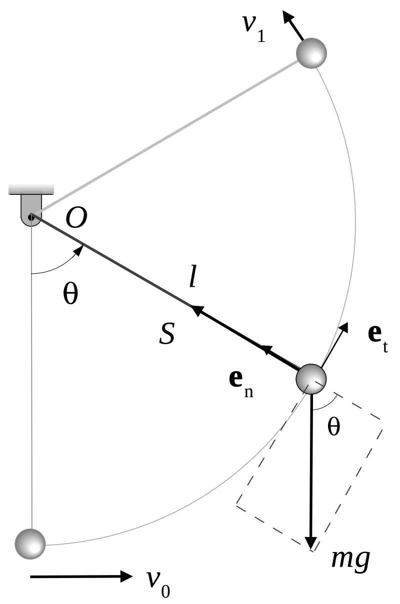
$$\delta^2 - \frac{2mg}{k_1 + k_2}\delta - \frac{2mgh}{k_1 + k_2} = 0 \tag{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta = \frac{mg}{k_1 + k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k_1 + k_2}\right)^2 + \frac{2mgh}{k_1 + k_2}}$$

eller

$$\underline{\underline{\delta = \frac{mg}{k_1 + k_2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h(k_1 + k_2)}{mg}}\right]}}$$

LP 8.49



Pendelkulan påverkas av tyngdkraften mg trådkraften S. Trådkraften gör inget arbete eftersom den är vinkelrät mot hastigheten. Tyngdkraften är konservativ så att den mekaniska energin är en rörelsekonstant.

I problemtexten ges ett villkor på trådkraften S, nämligen att den är noll för utslagsvinkeln $2\pi/3$. Vi ställer därför upp kraftekvationens komponent i normalriktningen:

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n \qquad (1)$$

Insättning ger

$$m\frac{v^2}{l} = S - mg\cos\theta \qquad (2)$$

För vinkeln $\theta = 2\pi/3$ fås då

$$m\frac{{v_1}^2}{l} = 0 - mg\cos(2\pi/3) \qquad (3)$$

$$m\frac{{v_1}^2}{l} = \frac{mg}{2} \quad {v_1}^2 = \frac{gl}{2} \qquad (4)$$

Farten v_1 är alltså känd. Sambandet mellan farten v_1 och v_0 ges av

Lagen om den mekaniska energin: $\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0}$ (5)

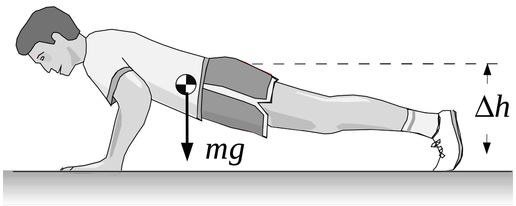
$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 + mg\left(l + l\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0 \qquad (6)$$

$${v_1}^2 + 2gl\left(1 + \frac{1}{2}\right) = {v_0}^2 \qquad \Rightarrow \qquad {v_1}^2 = {v_0}^2 - 3gl \qquad (7)$$

Förhållandet mellan kinetiska energierna är

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\frac{1}{2}m{v_1}^2}{\frac{1}{2}m{v_0}^2} = \frac{{v_1}^2}{{v_0}^2} = \frac{{v_1}^2}{{v_1}^2 + 3gl} = \frac{gl/2}{gl/2 + 3gl} = \frac{1}{7}$$

LP 8.59



En krafts effekt P beräknas med definitionen

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

I det ögonblick som hastigheten för kraftens angreppspunkt är $\mathbf{v}$ är effekten $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. I detta problem bestämmer vi en medeleffekt för en armhävning vars uppåtgående rörelse tar tiden Δt.

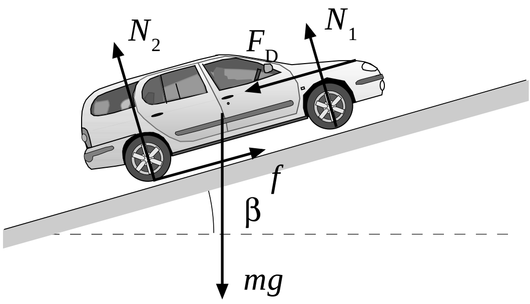
Om höjdändringen är Δh under tiden Δt så är medelfarten $\Delta h / \Delta t$.

Effekten blir då $\quad P = -mg\Delta h / \Delta t$

Numeriskt fås $\quad P = -800 \cdot 0.35 \,/\, 1 \text{ W} = -280 \text{ W}$

Om man frågar efter effektens storlek utelämnas minustecknet $\underline{\underline{P = mg\Delta h / \Delta t}}$

LP 8.60



En krafts effekt P beräknas med definitionen

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Om bilen kör med konstant fart uppför en backe med lutningsvinkeln β måste drivkraften f vara lika stor som summan av motståndskraften F_D och tyngdkraftens komponent $mg\sin\beta$.

Om bilen körs på horisontell väg med konstant fart måste drivkraften f vara lika stor som motståndskraften F_D. Denna effekt är given:

$$P_0 = F_D v$$

Om bilen körs med samma fart uppför en backe krävs först denna effekt för att komma över motståndet. Dessutom krävs en effekt för att röra sig mot tyngdkraften.

$$P_1 = P_0 + mg\sin\beta \cdot v$$

Numeriskt fås värdet $\quad P_1 \approx (10000 + 1200 \cdot 9.81 \sin 0.1 \cdot 25) \text{ W}$

$$P_1 \approx 39 \text{ kW}$$