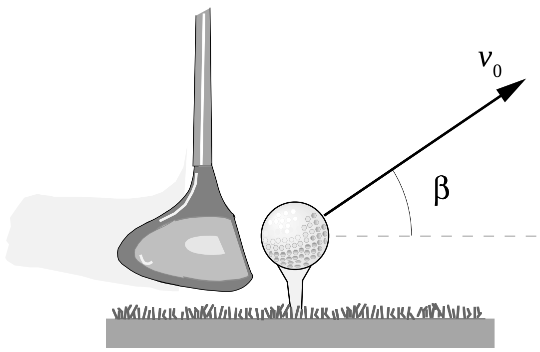
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 9

LP 9.1

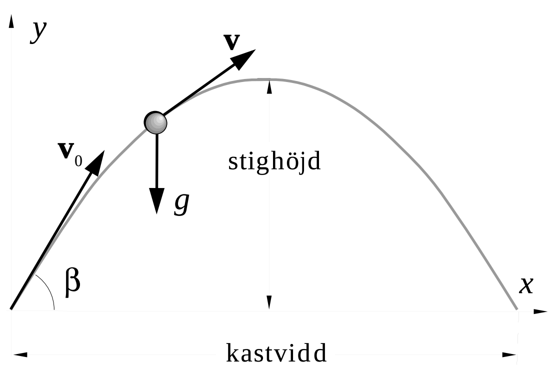


Impulslagen skrivs allmänt

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\mathrm{d}t = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)}$$

och uttalas:

kraftens impuls under tidsintervallet (t_0, t) är lika med ändringen av rörelsemängden under samma tidsintervall.



I detta problem är golfbollen i vila från början så att stötkraftens impuls är lika med bollens rörelsemängd $m\mathbf{v}_0$ just efter tillslaget.

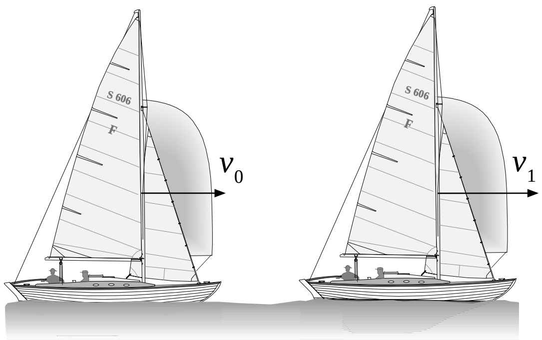
$$\int_0^{\tau} \mathbf{F}\mathrm{d}t = m\mathbf{v}_0 - \mathbf{0}$$

Vi känner kastvidden d och elevationsvinkeln β för golfbollen. Med den i problemtexten givna formeln ser man att denna kastvidd kräver en begynnelsefart

$$v_0 = \sqrt{\frac{d \cdot g}{\sin 2\beta}}.$$

Impulsens storlek är då $$\underline{\underline{mv_0 = m\sqrt{\frac{dg}{\sin 2\beta}}}}$$

LP 9.2



Impulslagen skrivs allmänt

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\,\mathrm{d}t = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)}$$

och uttalas:

kraftens impuls under tidsintervallet (t_0, t) är lika med ändringen av rörelse-mängden under samma tidsintervall.

I detta problem är rörelsen rätlinjig. Problemet är endimensionellt och vi kan därför skriva impulslagen utan vektor-beteckningar. Vi skriver impulslagens horisontella komponent.

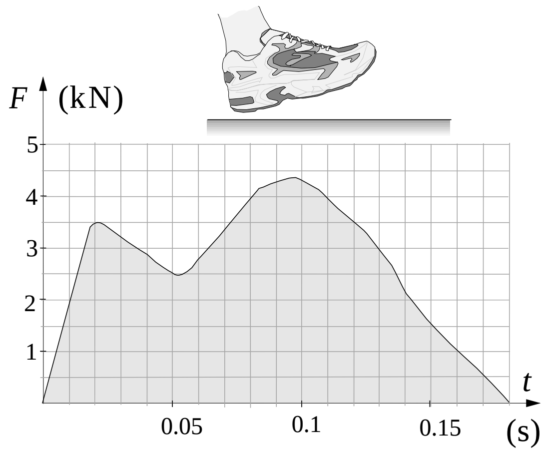
$$\int_{t_0}^{t_1} F\,\mathrm{d}t = mv_1 - mv_0$$

Om medelkraften är F_{medel} fås

$$F_{\text{medel}} \cdot \Delta t = mv_1 - mv_0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{\text{medel}} = \frac{mv_1 - mv_0}{\Delta t}$$

Numeriskt fås $$F_{\text{medel}} = 2.5 \cdot 10^3 \cdot \frac{5.6 - 3.7}{60}\ \text{N} \approx 79\ \text{N}$$

LP 9.3



Impulslagen skrivs allmänt

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F} \mathrm{d}t = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)}$$

och uttalas:

kraftens impuls under tidsintervallet (t_0, t) är lika med ändringen av rörelse-mängden under samma tidsintervall.

Impulslagens vertikala komponent blir.

$$\int_{t_0}^{t_1} F \mathrm{d}t = mv_1 - mv_0$$

Vänsterledet är den efterfrågade impulsen och den integralen motsvarar arean under kurvan i diagrammet. Ett ungefärligt värde på impulsen fås då genom att räkna rutorna och multiplicera med den "area" som varje ruta motsvarar.

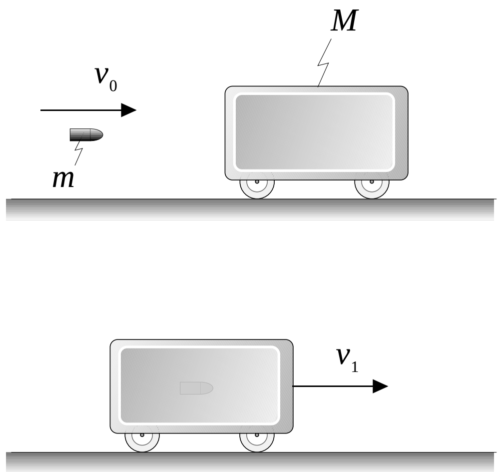
En ruta motsvarar "arean" $0.5 \text{ kN} \cdot 0.01 \text{ s} = 5 \text{ Ns}$

Hela arean under kurvan är ungefär 96 rutor

Hela "arean" är alltså $96 \cdot 5 \text{ Ns} = \underline{\underline{480 \text{ Ns}}}$

Detta är också den totala vertikala impulsen.

LP 9.4



Impulslagen skrivs allmänt

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\mathrm{d}t = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)} \qquad (1)$$

Den gäller för de båda kropparna var för sig och för hela systemet. Det finns en stötkraft på båda kropparna men eftersom de har motsatta riktningar finns det i detta problem ingen yttre kraft på *hela* systemet.

Den totala rörelsemängden är därför konstant. Vi säger då också att rörelsemängden bevaras. Antag att farten efteråt är v_1. Då fås

$$mv_0 + 0 = (M+m)v_1 \qquad (2)$$

Kinetiska energin före stöten är $T_0 = \frac{1}{2}mv_0{}^2$ (3)

Kinetiska energin efter stöten är $T_1 = \frac{1}{2}(M+m)v_1{}^2$ (4)

Om (2) utnyttjas fås $T_1 = \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 v_0{}^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v_0{}^2$ (5)

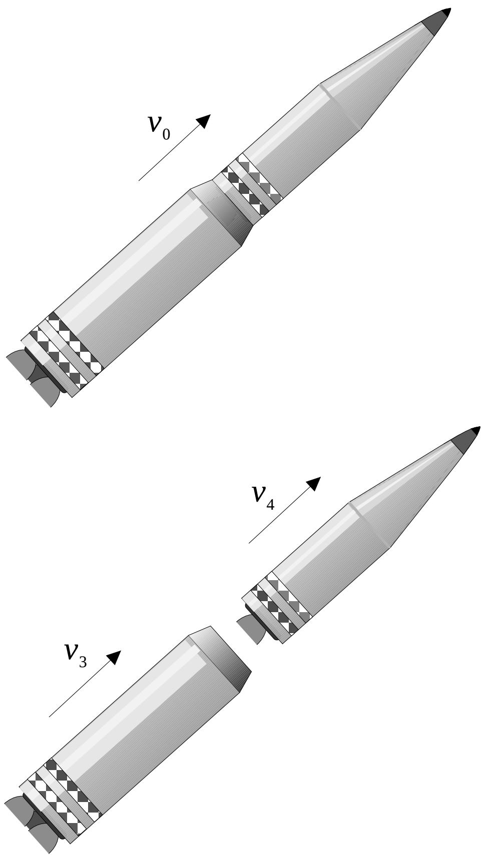
Energiförlusten är då $\Delta T = T_0 - T_1 = \frac{1}{2}mv_0{}^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v_0{}^2$ (6)

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\left(1 - \frac{m}{M+m}\right)v_0{}^2 \qquad (7)$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\cdot\frac{Mm}{M+m}v_0{}^2$$

Om man vill kan man skriva detta $\underline{\underline{\Delta T = \frac{M}{M+m}\cdot\frac{1}{2}mv_0{}^2}}$

LP 9.6



Impulslagen skrivs allmänt

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\mathrm{d}t = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)}$$

Den gäller för de båda delarna och för hela systemet. Det finns en separationskraft på båda delarna men det finns i detta problem ingen yttre kraft $\mathbf{F}$ på *hela* systemet. Den totala rörelsemängden är därför konstant. Vi säger då också att rörelsemängden bevaras.

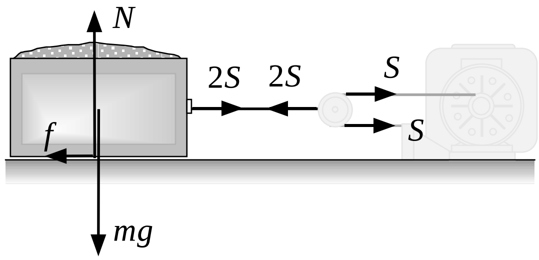
Det ger i rörelseriktningen ekvationen

$$3mv_0 = 2mv_3 + mv_4 \qquad (1)$$

Resultatet följer omedelbart

$$\underline{\underline{v_3 = \frac{1}{2}(3v_0 - v_4)}}$$

LP 9.7



Vi ska bestämma lådans fart som funktion av tiden och frilägger den därför. Den påverkas av tyngdkraften mg, normalkraften N, friktionskraften f samt dragkraften $2S$ från vajern.

Förklaring till dragkraftens storlek är: Kraften S i vajern är given. Om trissan är lätt och lättrörlig måste kraftmomentet med avseende på trissans axel vara noll. Det betyder att kraften i vajern är lika på båda sidor om trissan. Kraftekvationen för trissan ger på grund av att massan är noll att nettokraften i den horisontella riktningen måste vara noll.

Friktionskraften växer till en början i storlek på samma sätt som dragkraften. Vid en viss tidpunkt som vi kallar $t = t_1$ har friktionskraften nått sitt maximala värde $f_1 = \mu_s N$. Efter denna tidpunkt glider lådan varvid friktionskraften är $f_2 = \mu_k N$. Kraftekvationens vertikala komponent säger att $N = mg$, eftersom accelerationen i denna riktning är noll.
Kraftekvationens horisontella komponent är

$$2S - f = 0 \qquad \text{för} \qquad t < t_1 \tag{1}$$
$$2S - \mu_s mg = 0 \qquad \text{för} \qquad t = t_1 \tag{2}$$
$$2S - \mu_k mg = m\ddot{x} \qquad \text{för} \qquad t > t_1 \tag{3}$$

Eftersom dragkraften är given $2S = 2kt^2$ ges tidpunkten t_1 ges av ekv (2)

$$2kt_1^{\,2} - \mu_s mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \sqrt{\frac{\mu_s mg}{2k}} \tag{4}$$

Begynnelsevillkoret för lådans rörelse är $\qquad t = t_1 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$

Lösningen ges nu av ekv (3)

$$2kt^2 - \mu_k mg = m\ddot{x} \tag{5}$$

Tidsintegrering ger

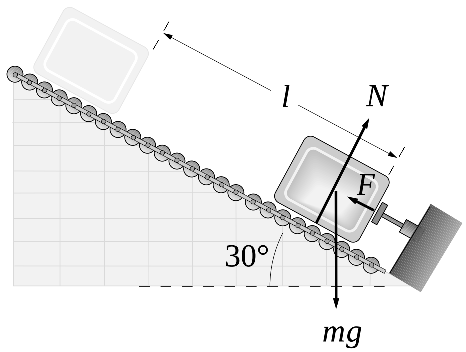
$$\left[\frac{1}{3}\cdot 2kt^3\right]_{t_1}^{t} - \left[\mu_k mgt\right]_{t_1}^{t} = m\dot{x} - m\cdot 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2}{3}k\left(t^3 - t_1^{\,3}\right) - \mu_k mg\left(t - t_1\right) = m\dot{x} \tag{7}$$

Resultatet är alltså att före tidpunkten $t_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_s mg}{2k}}$ är lådan i vila. Efter denna tidpunkt är hastigheten

$$\underline{\underline{\dot{x} = \frac{2k}{3m}\left(t^3 - t_1^{\,3}\right) - \mu_k g\left(t - t_1\right)}}$$

LP 9.14



Från början åker lådan ner en sträcka l och då bevaras den mekaniska energin, eftersom tyngdkraften är konservativ och normalkraften inte gör något arbete:

$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \tag{1}$$

Lådan startar från vila. Insättning ger om lutningsvinkeln kallas β.

$$\frac{1}{2} m v_1^{\,2} + 0 = 0 + mgl \sin\beta \quad \Rightarrow \tag{2}$$

$$v_1 = \sqrt{2gl \sin\beta} \tag{3}$$

Nu betraktar vi uppbromsningen. Den "givna" kraften är $F = F_0(1 + kt)$, där F_0 skall bestämmas så att lådan stannar efter tiden τ.

Kraftekvationen i rörelseriktningen, som överensstämmer med x-axelns riktning är

$$m\ddot{x} = -F_0(1 + kt) + mg \sin\beta \tag{4}$$

Tidsintegrering ger

$$[m\dot{x}]_0^\tau = \left[-F_0\left(t + \frac{1}{2}kt^2\right)\right]_0^\tau + [mg \sin\beta \cdot t]_0^\tau \quad \Rightarrow \tag{5}$$

$$m \cdot 0 - mv_1 = -F_0\left(\tau + \frac{1}{2}k\tau^2\right) + mg \sin\beta \cdot \tau \tag{6}$$

Observera att detta är impulsekvationen $\boxed{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\mathrm{d}t = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)}$

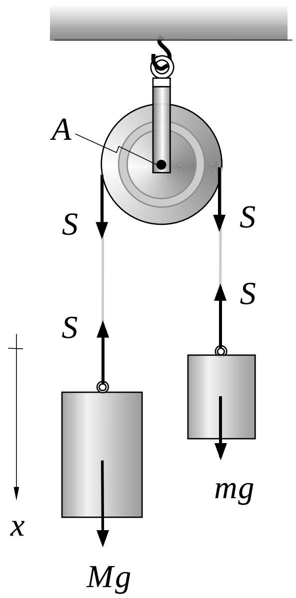
Ekv (6) ger den sökta storheten F_0

$$F_0 = 2m \frac{v_1 + g \sin\beta \cdot \tau}{2\tau + k\tau^2} \tag{7}$$

Insättning av (3) och $\beta = 30°$ ger slutligen

$$\underline{\underline{F_0 = \frac{m\left(2\sqrt{gl} + g\tau\right)}{2\tau + k\tau^2}}}$$

LP 9.15



Vikterna friläggs. Varje vikt påverkas av tyngdkraften och trådkraften S. Eftersom trissan är lätt och lättrörlig måste trådkraften vara lika på båda sidor.

Rörelsen startar från vila. Antag att den vänstra vikten får en förflyttning x nedåt. Om tråden är otänjbar får den högra vikten förflyttningen x uppåt. Vi skriver kraftekvationens komponent nedåt för den vänstra och uppåt för den högra vikten.

Kraftekvationen för vardera vikten blir

$$\downarrow \ : \quad -S + Mg = M\ddot{x} \tag{1}$$

$$\uparrow \ : \quad S - mg = m\ddot{x} \tag{2}$$

Tidsintegration ger impulslagen för vardera:

$$-S\cdot t + Mg\cdot t = M\dot{x} - 0 \tag{3}$$
$$S\cdot t - mg\cdot t = m\dot{x} - 0 \tag{4}$$

Addition av ekvationerna eliminerar trådkraften S

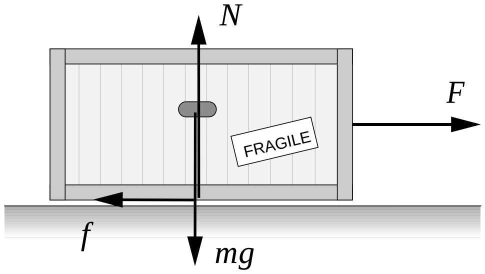
$$Mg\cdot t - mg\cdot t = M\dot{x} + m\dot{x} \qquad \Rightarrow \tag{5}$$

$$\underline{\underline{\dot{x} = \frac{M-m}{M+m}\,gt}}$$

Svaret är dimensionsriktigt eftersom en acceleration gånger tid motsvarar en hastighet. Man kan också se att

om massorna är lika är det jämvikt;
om $M >> m$ fås fritt fall.

LP 9.16



Frilägg lådan. Den påverkas av den givna dragkraften F, tyngdkraften mg, normalkraften N och friktionskraften f.

Friktionskraften f ställer in sig för att motverka rörelsen. Den maximala friktionskraft som kan produceras är

$$f_{\max} = \mu N \qquad \Rightarrow \qquad f_{\max} = \mu mg$$

Till en början, vid tiden $t = 0$, orkar friktionskraften hålla ett jämviktstillstånd eftersom dragkraften $F = a + bt$ då enligt problemtexten är mindre än $f_{\max} = \mu mg$.

När sedan dragkraften ökar startar rörelsen just då

$$(F =)\ a + bt_1 = \mu mg \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{b}(\mu mg - a) \tag{1}$$

Efter denna tidpunkt $t = t_1$ accelereras lådan, varvid friktionskraften är konstant. Kraftekvationen i rörelseriktningen är

$$m\ddot{x} = a + bt - \mu mg \tag{2}$$

Tidsintegration ger impulslagen för lådan:

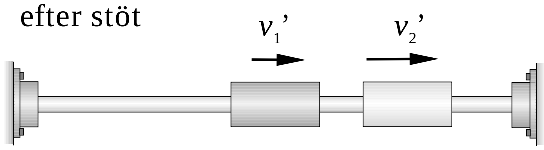
$$m\dot{x} - m \cdot 0 = \left[at + \frac{1}{2}bt^2\right]_{t_1}^{t} - \left[\mu mg \cdot t\right]_{t_1}^{t} \tag{3}$$

$$\underline{\underline{v = \frac{1}{m}\left[a(t - t_1) + \frac{1}{2}b\left(t^2 - t_1^{\,2}\right) - \mu mg(t - t_1)\right]}}$$

Före tiden $t = t_1$ är lådan i vila.

LP 9.18

efter stöt



Vi ska bestämma hastigheterna efter stöt för två olika studstal. Vi väljer att göra *en* lösning för ett godtyckligt studstal e.
Eftersom det inte finns några yttre krafter på hela systemet (de två hylsorna) i rörelseriktningen bevaras den totala rörelsemängden enligt impulslagen:

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\mathrm{d}t = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)}$$

Med andra ord, eftersom den totala yttre kraften $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ så är rörelsemängden $\mathbf{p}$ för hela systemet densamma före och efter stöt:

$$\rightarrow: \quad m \cdot 2v - mv = mv_1' + mv_2' \tag{1}$$

där v_1' och v_2' är hastigheterna efter stöt.

Studstalets definition
$$\boxed{e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}} \tag{2}$$

ger här
$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{-v - 2v} \tag{3}$$

Det är här viktigt i både ekvation (1) och (2) att räkna med hastighets*komponenterna* i någon förutbestämd riktning.

Ekvationerna (1) och (3) kan skrivas
$$v = v_1' + v_2' \tag{1'}$$
$$3ev = v_2' - v_1' \tag{3'}$$

och ger resultatet
$$v_1' = \frac{1}{2}(1 - 3e)v; \quad v_2' = \frac{1}{2}(1 + 3e)v$$

a) Om studstalet är $e = 0$ fås resultatet

$$v_1' = \frac{v}{2}; \quad v_2' = \frac{v}{2}$$

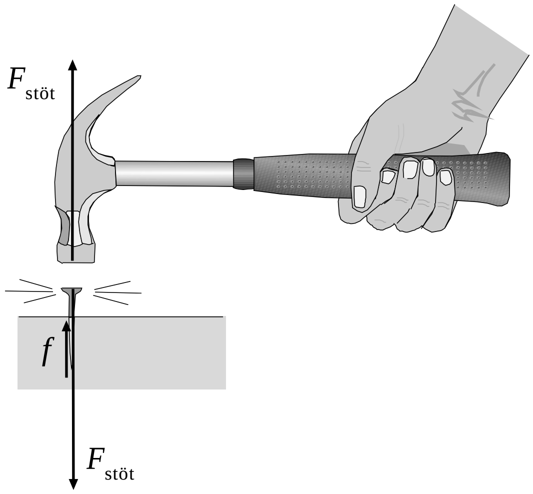
Detta studstal motsvarar en fullständigt oelastisk stöt. Kropparna fastnar i varandra som lerklumpar.

b) Om studstalet är $e = 1$ fås resultatet

$$v_1' = -v; \quad v_2' = 2v$$

Detta studstal motsvarar en elastisk stöt. Kropparna "byter" hastigheter om de har samma massa.

LP 9.19



Hammarhuvudet påverkas av lika stor stötkraft $F_{\text{stöt}}$ som spiken. Denna krafts impuls stoppar hammarens rörelse medan spiken får en impuls neråt. Impulslagen

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\,\mathrm{d}t = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)}$$

ger för hammaren i vertikal riktning uppåt

$$\int_{t_0}^{t} F_{\text{stöt}}\,\mathrm{d}t = 0 - (-Mv_0) \tag{1}$$

Spiken får alltså under kontakttiden lika stor impuls

$$\int_{t_0}^{t} F_{\text{stöt}}\,\mathrm{d}t = Mv_0 \tag{2}$$

Spikens begynnelsehastighet neråt efter stöten kallas v_{spik}. Spikens rörelsemängd i början är lika med impulsen som den får:

$$mv_{\text{spik}} = Mv_0 \qquad \Rightarrow \qquad v_{\text{spik}} = \frac{M}{m}v_0 \tag{3}$$

Efter stöten påverkas spiken i rörelseriktningen av friktionskraften f och tyngdkraften. Antag att tyngdkraften kan försummas!

Lagen om den kinetiska energin $\boxed{U = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} - \frac{1}{2}mv_0^{\,2}}$ ger

$$-f \cdot d = 0 - \frac{1}{2}mv_{\text{spik}}^{\,2} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{mv_{\text{spik}}^{\,2}}{2d} \tag{4}$$

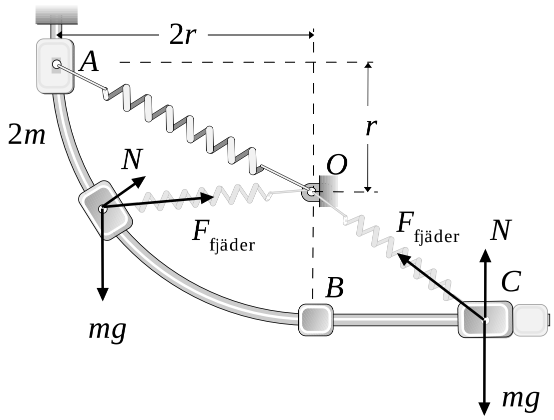
Insättning av (3) ger

$$f = \frac{m}{2d}\left(\frac{M}{m}v_0\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{(Mv_0)^2}{2md} \tag{5}$$

Numeriskt fås $\qquad f = \dfrac{(0.6 \cdot 3)^2}{2 \cdot 0.08 \cdot 0.01}\ \text{N} \approx 2\ \text{kN}$

I efterhand kan vi konstatera att denna kraft är mycket större än den försummade tyngdkraften $mg \approx 0.8$ N. Stötkraftens storlek beror enligt (2) på stöttiden, som inte är given.

LP 9.20



Processen består av tre olika delar. Först glider hylsan A neråt längs den glatta stången. Sedan sker i nedersta läget en stöt mot hylsan B. Efter denna kortvariga stöt under vilken läget ej ändras rör sig kropparna tillsammans mot C.

För den första delen av rörelsen gäller att hylsan A påverkas av tyngdkraften, fjäderkraften och normalkraften. Den mekaniska energin bevaras eftersom både tyngdkraften och fjäderkraften är konservativa medan normalkraften inte gör något arbete. Fjäderns längd är från början enligt Pythagoras $\sqrt{5}r$

Den mekaniska energin för hylsan A bevaras: $\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_0}$ (1)

Insättning ger $$\frac{1}{2}\cdot 2mv_1^{\,2} + 0 + 0 = 0 + 2mg\cdot 2r + \frac{1}{2}k\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^2 r^2 \quad\Rightarrow \qquad (2)$$

$$v_1^{\,2} = 4gr + \frac{k}{2m}\left(\sqrt{5}-1\right)^2 r^2 \qquad (3)$$

Före stöt har alltså hylsan A farten $v_1 = \sqrt{4gr + \frac{k}{2m}\left(\sqrt{5}-1\right)^2 r^2}$ (4)

För stöten gäller impulslagen för hela systemet $\boxed{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\,\mathrm{d}t = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)}$ (5)

som säger att den totala rörelsemängden bevaras för hela systemet (båda hylsorna)

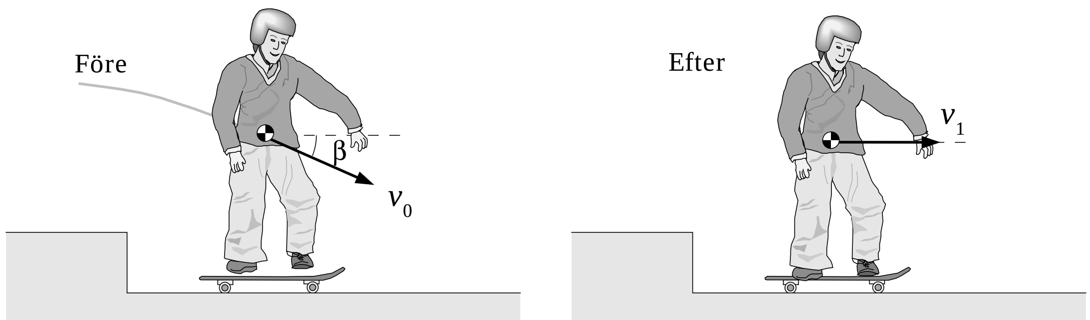
$$\rightarrow:\quad 2mv_1 + 0 = (2m+m)v_2 \quad\Rightarrow\quad v_2 = \frac{2}{3}v_1 \qquad (6)$$

Under den sista delen av rörelsen gäller återigen mekaniska energilagen. De två kropparna påverkas av fjäderkraften, tyngdkraften och normalkraften. Endast fjäderkraften gör arbete. Antag att fjäderns maximala förlängning blir δ

$$\frac{1}{2}\cdot 3mv_2^{\,2} + 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k\cdot\delta^2 \quad\Rightarrow\quad \delta^2 = \frac{3mv_2^{\,2}}{k} \quad\Rightarrow\quad \delta^2 = \frac{3m}{k}\left(\frac{2}{3}v_1\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\delta = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}\left(4gr + \frac{k}{2m}\left(\sqrt{5}-1\right)^2 r^2\right)}}} \approx 0.72 \text{ m}$$

LP 9.21



Hastigheterna för båda kropparna (skateboard och åkare) ändras under ett visst tidsintervall. För detta tidsintervall gäller

impulslagen för hela systemet $\boxed{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F} \mathrm{d}t = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)}$ (1)

I den horisontella riktningen verkar friktionskraften på båda kropparna. På hela systemet finns det dock ingen horisontell kraft. Insättning ger alltså för hela systemet i den horisontella riktningen:

$$0 = (M + m)v_1 - M v_0 \cos\beta \tag{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{v_1 = \frac{M v_0 \cos\beta}{M + m}}}$$

Antag att den totala vertikala impulsen på åkaren är I. Impulslagen för skateboardåkaren i den vertikala riktningen uppåt då masscentrums vertikala hastighet blivit noll blir

$$I = 0 - (-M v_0 \sin\beta) \qquad \Rightarrow \tag{3}$$

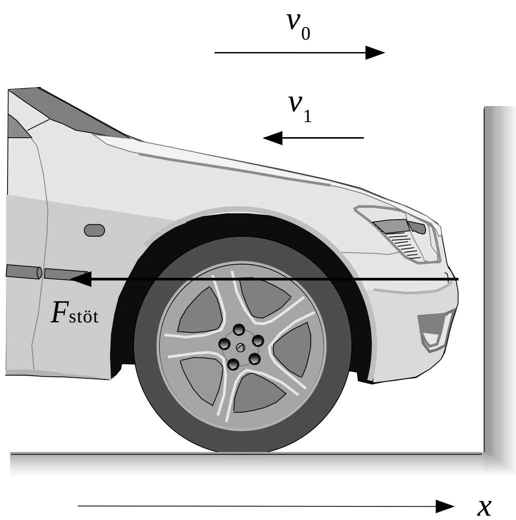
$$\underline{\underline{I = M v_0 \sin\beta}}$$

Numeriskt erhålles

$$v_1 = \frac{36 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{40 \cdot 2} \text{ m/s} \approx 4.7 \text{ m/s} \approx 5 \text{ m/s}$$

$$I = 36 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \text{ Ns} = 108 \text{ Ns} \approx 1 \cdot 10^2 \text{ Ns}$$

LP 9.24



Bilens hastighetstillstånd före och efter stöten är känt. Studstalet definieras

$$\boxed{e=-\frac{v_2'-v_1'}{v_2-v_1}} \tag{1}$$

Alla hastigheter måste räknas positivt åt ett och samma håll. Det är alltså hastighetskomponenterna som ingår i ekv (1). Om en x-axel införs kan man också skriva

$$e=-\frac{\dot{x}_2'-\dot{x}_1'}{\dot{x}_2-\dot{x}_1} \tag{2}$$

I detta problem har den ena kroppen (väggen) hastigheten noll. Insättning i (2) ger då

$$e=-\frac{0-(-v_1)}{0-v_0}=\frac{v_1}{v_0} \qquad \Rightarrow \qquad e=-\frac{0-(-0.6)}{0-2.4}=\frac{1}{4} \tag{3}$$

b) Stötkraften ges i varje ögonblick av kraftekvationen

$$F_x^{\text{stöt}}=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

Stötkraftens medelvärde bestäms ur samma ekvation:

$$\left(F_x^{\text{stöt}}\right)_{\text{medel}}=m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \tag{5}$$

Hastighetsändringen Δv_x under stöttiden $\Delta t=\tau$ ger medelaccelerationen. Insättning ger

$$\left(F_x^{\text{stöt}}\right)_{\text{medel}}=m\frac{-v_1-v_0}{\tau} \qquad \Rightarrow \tag{6}$$

$$\left(F_x^{\text{stöt}}\right)_{\text{medel}}=-1200\cdot\frac{2.4+0.6}{0.3}\ \text{kgms}^{-2}=-12000\ \text{N} \tag{7}$$

c) Accelerationens medelvärde framgår av föregående

$$\left(a_x\right)_{\text{medel}}=\frac{-v_1-v_0}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \left(a_x\right)_{\text{medel}}=-10\ \text{m/s}^2 \tag{8}$$

d) Energiförlusten är densamma som ändringen i kinetiskenergi och kan skrivas

$$\Delta T=T_0-T_1=\frac{1}{2}mv_0^{\,2}-\frac{1}{2}mv_1^{\,2} \tag{9}$$

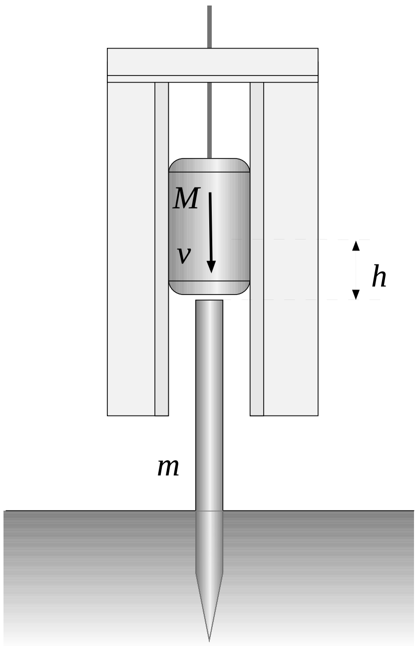
Med användning av (1) fås

$$\Delta T=\frac{1}{2}m\left(v_0^{\,2}-v_1^{\,2}\right)=\frac{1}{2}mv_0^{\,2}\left(1-e^2\right)=\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{2}mv_0^{\,2} \tag{10}$$

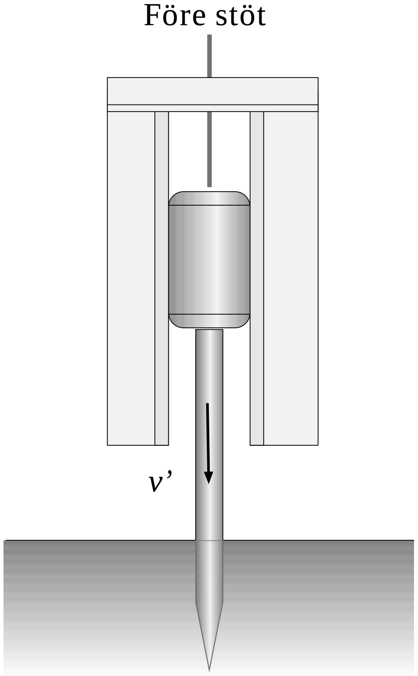
Den del av kinetiska energin som går förlorad är alltså

$$\frac{\Delta T}{}=\frac{15}{}$$

LP 9.25



Före stöt



Efter stöt

Hela processen kan delas upp i tre delar:

1.Hammaren utför fritt fall,
2. stöt hammare-påle,
3. pålen åker ner i marken.

För hammarens fria fall gäller att den mekaniska energin bevara

$$T + V = T_0 + V_0 \tag{1}$$

Antag att hammarens fart omedelbart före stöten är v. Insättning i (1) ger

$$\frac{1}{2}Mv^2 + 0 = 0 + Mgh \tag{2}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gh} \tag{3}$$

För stöten gäller att rörelsemängden bevaras eftersom inverkan av andra krafter än stötkraften kan försummas under stöttiden. Antag att pålens fart omedelbart efter stöten är v'. Hammarens fart är enligt texten noll efter stöt. Vi får för rörelsemängden

$$Mv + 0 = 0 + mv' \tag{4}$$

a) Ekv (3) och (4) ger pålens fart omedelbart efter stöt:

$$\underline{\underline{v' = \frac{M}{m}\sqrt{2gh}}} \tag{5}$$

b) Studstalet definieras i teorin

$$\boxed{e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}} \tag{6}$$

Insättning ger

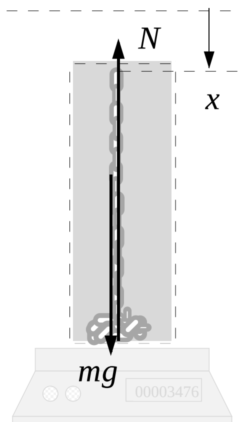
$$e = -\frac{v' - 0}{0 - v} \qquad \Rightarrow \qquad ev = v' \tag{7}$$

Studstalet är alltså, om (5) utnyttjas

$$e = \frac{M\sqrt{2gh}}{m\sqrt{2gh}} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{e = \frac{M}{m}}}$$

Observera förutsättningen att hammaren förlorar all sin fart. Studstalet bestäms

LP 9.27



Kedjan kan knappast sägas vara en partikel men vi vet att kraftekvationen gäller för varje delkropp och vi kan med den bestämma masscentrums rörelse. Kraftekvationen kan skrivas $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ eller $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, där $\mathbf{p}$ är den totala rörelsemängden $\mathbf{p} = \sum m_k \mathbf{v}_k$

Kedjan påverkas av tyngdkraften mg och normalkraften N från vågen. Kraftekvationens vertikala komponent för hela kedjan skrivs då

$$\downarrow: \quad -N + mg = \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

a)
Vid fritt fall är accelerationen densamma för alla länkar. Varje länk faller alltså oberoende av de andra. Vi antar också att det inte förmedlas någon kraftverkan från vågen och uppåt. Vid fritt fall för en masspartikel m_1 fås farten som funktion av läget med mekaniska energilagen:

$$T + V = T_0 + V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 - m_1 g x = 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \sqrt{2gx} \tag{2}$$

b)
Kedjans totala rörelsemängd är då massan av den del som befinner sig i luften gånger hastigheten, som beräknats i a):

$$p_x = \frac{L - x}{L} m\dot{x} \tag{3}$$

c)
Tidsderivatan av rörelsemängden blir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m}{L}(L - x)\dot{x}\right] = \frac{m}{L}\left[(-\dot{x})\dot{x} + (L - x)\ddot{x}\right] \tag{4}$$

Accelerationen är känd och hastigheten är beräknad i (2). Insättning ger

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_x) = \frac{m}{L}\left[-2gx + (L - x)g\right] = -3mg\frac{x}{L} + mg \tag{5}$$

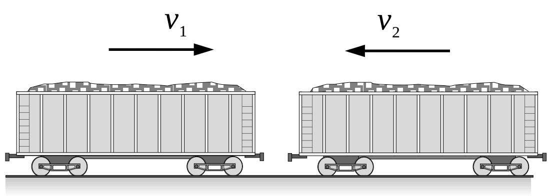
Insättning i kraftekvationen (1) ger

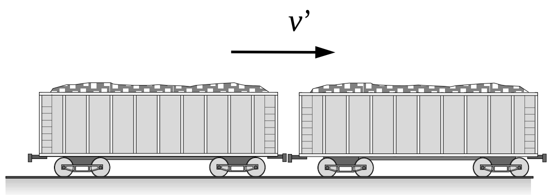
$$-N + mg = -3mg\frac{x}{L} + mg \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{N = 3mg\frac{x}{L}}}$$

Vågen visar ett utslag motsvarande tre gånger tyngden då den översta länken når vågen. Det fordras en stor kraft för att stoppa den sista länken.

LP 9.28





Impulslagen för hela systemet

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\mathrm{d}t = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0)} \qquad (1)$$

säger att den totala rörelsemängden bevaras eftersom det inte finns någon yttre kraft $\mathbf{F}$ på systemet i rörelseriktningen. Antag att hastigheten efteråt är v'!

Rörelsemängden bevaras ger då

$$mv_1 - mv_2 = 2mv' \qquad (2)$$

Kinetiska energin före stöten är $T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$ (3)

Kinetiska energin efter stöten är $T' = \frac{1}{2}2mv'^2$ (4)

Om (2) utnyttjas fås $T' = mv'^2 = \frac{1}{4}m(v_1 - v_2)^2$ (5)

Energiförlusten är då $\Delta T = T - T' = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{4}m(v_1 - v_2)^2$ (6)

$$\Delta T' = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{4}m\left(v_1^2 - 2v_1v_2 + v_2^2\right) \qquad (7)$$

$$\Delta T' = \frac{1}{4}m\left(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\right) \qquad (8)$$

Hur stor del är detta av den ursprungliga energin?

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\frac{1}{4}m\left(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\right)}{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\cdot\frac{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2} \qquad (9)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2}\right)}}$$

Om vagnarna från början har lika stor fart så är $\frac{\Delta T}{T} = 1$. All kinetisk energi förloras då vagnarna står stilla efter stöten.

Om $v_2 = 0$ så är $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}$. Halva den kinetiska energin förloras då enligt (2) farten har halverats men massan dubblats.