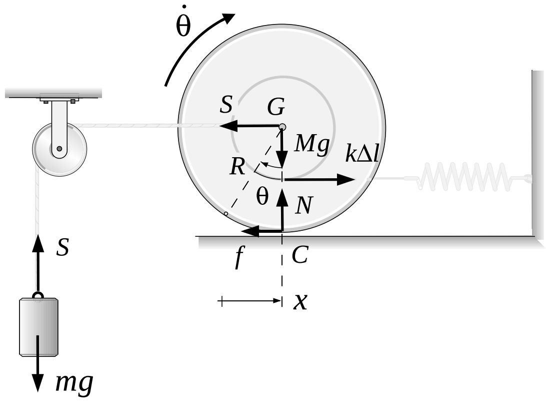


Frilägg först trådrullen och motvikten! Motvikten påverkas av tyngdkraften mg och trådkraften S. Trådullen påverkas av tyngdkraften Mg, normalkraften N, friktionskraften f, fjäderkraften $k\Delta l$ och trådkraften S. Rullen antas få en vinkelhastighet $\dot{\theta}$ medurs. Eftersom trådrullen rullar utan att glida är kontaktpunkten C momentancentrum.

Detta ger kinematiksambandet $\dot{x} = R\dot{\theta}$.

Problemställningen är att bestämma farten som funktion av läget och vi siktar därför på att ställa upp en energilag. Tyngdkraften Mg gör inte något arbete vid en horisontell förflyttning av G. Trådkrafterna gör lika stora arbeten men med olika tecken. Tillsammans gör de inget arbete. Inte heller gör friktionskraften eller normalkraften något arbete eftersom angreppspunkten i varje ögonblick har hastigheten noll. Då tyngdkraften mg och fjäderkraften är konservativa ställer vi upp lagen om energins bevarande:

$$T + V = T_0 + V_0 \tag{1}$$

Trådrullens kinetiska energi bestäms enklast med utnyttjande av momentancentrum varvid tröghetsmomentet fås med Steiners sats:

$$T^{\text{rulle}} = \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(I_G + MR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + MR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{3MR^2}{4}\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

Motvikten har samma fart $\dot{x}$ som rullens centrum: $T^{\text{vikt}} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ (3)

Uttrycket för fjäderkraftens potential är känt: $V_{\text{fjäder}} = \frac{1}{2} k(\Delta l)^2$ (4)

Vi måste i varje läge veta fjäderns förlängning Δl. När rullen rört sig framåt en sträcka x har en trådlängd $r\theta$ rullats upp på innerrullen. Längdförändringen av fjädern är då $x - r\theta$. Eftersom förlängningen från början är δ blir den momentana förlängningen $\Delta l = \delta - (x - r\theta)$.

I det följande elimineras θ och $\dot{\theta}$ med sambanden $\dot{x} = R\dot{\theta}$ och $x = R\theta$ (5)

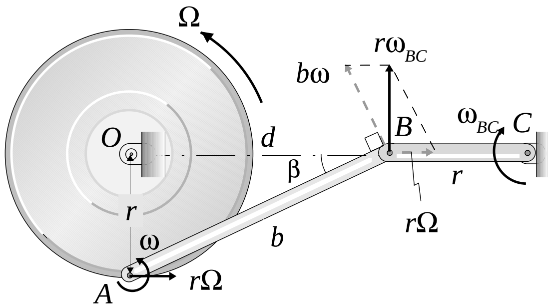
Fjäderkraftens potential blir alltså

$$V_{\text{fjäder}} = \frac{1}{2} k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2} k\left[\delta - (x - r\theta)\right]^2 = \frac{1}{2} k\left[\delta - \left(1 - \frac{r}{R}\right)x\right]^2 \tag{6}$$

Insättning i (1) ger

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{3M}{4}\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k\left[\delta - \left(1 - \frac{r}{R}\right)x\right]^2 + mgx = 0 + \frac{1}{2} k\delta^2 + 0 \qquad \Rightarrow \tag{7}$$

$$\underline{\underline{\dot{x} = \sqrt{\frac{4}{2m + 3M}\left[k\delta\left(1 - \frac{r}{R}\right)x - \frac{1}{2} k \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 x^2 - mgx\right]}}}$$



För punkterna A och B på stången AB gäller sambandsformeln

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \tag{1}$$

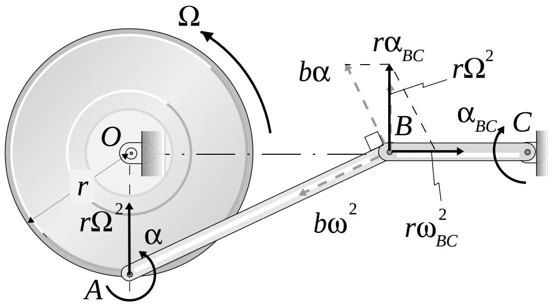
Vi antar att vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ för stången AB är riktad utåt, alltså moturs rotation. Då A har en cirkelrörelse kring O kan farten skrivas $v_A = r\Omega$. B har en cirkelrörelse kring C. Sambandsformeln i komponentform blir

$$\rightarrow: \quad 0 = r\Omega - b\omega \sin\beta \tag{2}$$

$$\uparrow: \quad r\omega_{BC} = 0 + b\omega\cos\beta \tag{3}$$

Dessa ekvationer ger (kan utnyttja att $b\sin\beta = r, \quad b\cos\beta = d$)

$$\omega = \frac{r\Omega}{b\sin\beta}, \quad \omega_{BC} = \frac{b\cos\beta}{r}\omega \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\omega = \Omega, \quad \omega_{BC} = \frac{d\Omega}{r}}} \tag{4}$$



För punkterna A och B gäller också sambandsformeln för accelerationer:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \tag{5}$$

Vi antar vinkelaccelerationer α_{BC} och α för stängerna (se figur!). A har en cirkelrörelse kring O så att accelerationen kan uttryckas i Ω. Accelerationen för B kan uttryckas i ω_{BC} och α_{BC}. Den består enligt sambandsformeln av A:s acceleration plus den acceleration som B skulle haft om den hade en cirkelrörelse kring A.

Sambandsformeln blir i komponentform

$$\rightarrow: \quad r\omega_{BC}^{\;2} = 0 - b\alpha\sin\beta - b\omega^2\cos\beta \tag{6}$$

$$\uparrow: \quad r\alpha_{BC} = \underline{r\Omega^2} + b\alpha\cos\beta - \underline{b\omega^2\sin\beta} \tag{7}$$

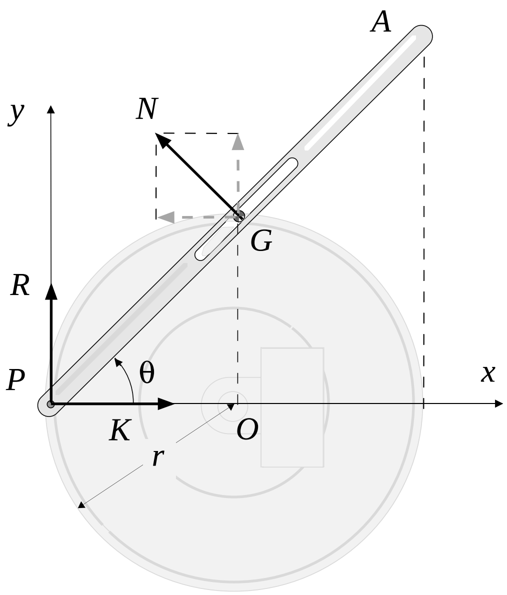
Ekv (6) ger vinkelaccelerationen α:

$$\alpha = -\omega^2\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{r}{b\sin\beta}\omega_{BC}^{\;2} \qquad \Rightarrow$$

Insättning av (4) ger
$$\alpha = -\left(\frac{d}{r} + \frac{d^2}{r^2}\right)\Omega^2 = \underline{\underline{-\frac{d}{r}\left(1 + \frac{d}{r}\right)\Omega^2}}$$

Ekv (7) ger vinkelaccelerationen α_{BC} (de understrukna termerna är lika)

$$\alpha_{BC} = \frac{d}{r}\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\alpha_{BC} = -\frac{d^2}{r^2}\left(1 + \frac{d}{r}\right)\Omega^2}}$$



Vi söker en kraft på stången och därför frilägger vi stången från cirkelskivan. Den påverkas av en kraft i P som antas ha komponenterna K och R. I skåran verkar kraften N vinkelrätt mot stången, eftersom friktionen är obefintlig. Vi bortser här från de vertikala krafterna.

Stången roterar, liksom hela systemet, med given vinkelhastighet ω och vinkelacceleration α kring den fixa axeln vid O. Eftersom masscentrum G har en cirkelrörelse kring O blir accelerationskomponenterna $\ddot{x}_G = -r\alpha$ och $\ddot{y}_G = -r\omega^2$. Sambandet mellan acceleration och krafter ges av kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ och momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$.

I komponentform fås

$$\leftarrow \;:\; -K + \frac{N}{\sqrt{2}} = mr\alpha \tag{1}$$

$$\uparrow \;:\; R + \frac{N}{\sqrt{2}} = -mr\omega^2 \tag{2}$$

$$\circlearrowleft G:\; K \cdot r - R \cdot r = I_G\alpha \tag{3}$$

Tröghetsmomentet för stången är $I_G = \dfrac{m\left(2\sqrt{2}\,r\right)^2}{12} = \dfrac{2mr^2}{3}$ (4)

Dividera ekv (3) med r och addera alla tre ekv (1-3):

$$\frac{2N}{\sqrt{2}} = mr\left(\frac{5}{3}\alpha - \omega^2\right) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{N = \frac{\sqrt{2}}{2}mr\left(\frac{5}{3}\alpha - \omega^2\right)}} \tag{5}$$

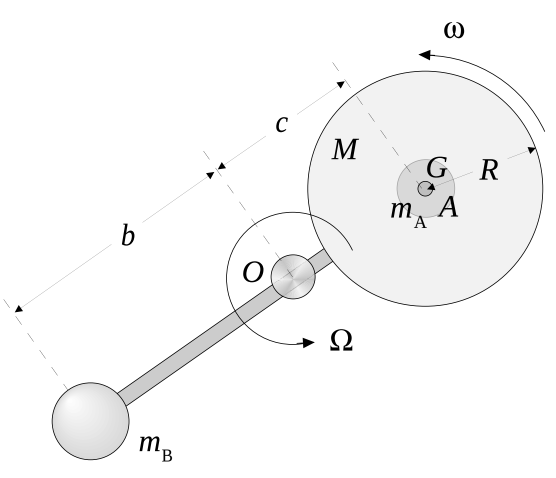
Detta resultat får man direkt med momentekvationen $\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{PG} \times m\mathbf{a}_G$

$$\circlearrowleft P:\; N \cdot r\sqrt{2} = I_G\alpha + mr^2\alpha - mr^2\omega^2 \tag{6}$$

Alternativt fås resultatet med kraftekvationen (2) ovan kombinerad med momentekvationen $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$:

$$\circlearrowleft O:\; \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot r - R \cdot r = I_O\alpha \tag{7}$$

där I_O fås med Steiners sats: $I_O = \dfrac{2mr^2}{3} + mr^2$



Systemet kan rotera helt fritt kring den fixa vertikala z-axeln genom O. De bromsande krafterna vid A är inre krafter om hela systemet betraktas, vilket betyder att hela systemet inte påverkas av något yttre kraftmoment i rotationsaxelns (z-axelns) riktning.

Projicera momentekvationen

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{1}$$

på z-axeln:

$$M_z = \dot{H}_z \tag{2}$$

Här är det yttre kraftmomentet noll:

$$M_z = 0 \qquad \Rightarrow \quad \dot{H}_z = 0$$

$$\Rightarrow \qquad H_z = \text{rörelsekonstant} \tag{3}$$

Rörelsemängdsmomentet för hela systemet i utgångstillståndet är alltså lika med rörelsemängdsmomentet i sluttillståndet. Från början ger endast cirkelskivan bidrag till rörelsemängdsmomentet. Det bestäms med rörelsemängdsmomentets två delar: $\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_{OG} \times m\mathbf{v}_G$ där G (eller A) är cirkelskivans masscentrum. Eftersom från början $v_G \equiv v_A = 0$ fås alltså för starttillståndet

$$\left(H_O\right)_z = \left(H_G\right)_z = I_G^{\text{skiva}}\omega = \frac{MR^2}{2}\omega \tag{4}$$

I sluttillståndet roterar systemet som en enda stel kropp och rörelsemängdsmomentet är det totala tröghetsmomentet gånger vinkelhastigheten. Eftersom motvikten och motorn är små kan de behandlas som partiklar. Insättning i ekv (3) ger då

$$\frac{MR^2}{2}\omega = \left[m_A c^2 + m_B b^2 + \left(\underbrace{\frac{MR^2}{2} + Mc^2}_{\text{STEINERS SATS}}\right)\right]\Omega \tag{5}$$

vilket ger resultatet

$$\underline{\underline{\Omega = \frac{MR^2}{2\left(m_A c^2 + m_B b^2\right) + M\left(R^2 + 2c^2\right)}\,\omega}}$$