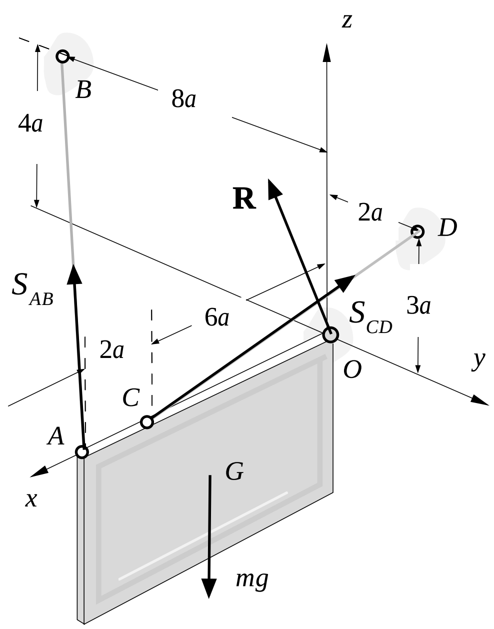


Frilägg skylten! Den påverkas av tyngdkraften mg, trådkrafterna S_{AB} och S_{CD} samt kontaktkraften $\mathbf{R}$. I den glatta kulleden verkar inget kraftparsmoment. Jämvikt fordrar att kraftsumman och kraftmomentsumman var för sig är noll, dvs att kraftsystemet bildar ett nollsystem: $\mathbf{F}=\mathbf{0}$ och $\mathbf{M}=\mathbf{0}$.
Först skrivs trådkrafterna $\mathbf{S}_{AB}$ och $\mathbf{S}_{CD}$ på vektorform:

$$\mathbf{r}_{AB}=\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A=(-8a,-8a,4a) \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{e}_{AB}=\frac{1}{3}(-2,-2,1) \tag{3}$$

$$\mathbf{S}_{AB}=S_{AB}\mathbf{e}_{AB}=\frac{S_{AB}}{3}(-2,-2,1) \tag{4}$$

$$\mathbf{r}_{CD}=\mathbf{r}_D-\mathbf{r}_C=(-6a,\ 2a,3a) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{CD}=\frac{1}{7}(-6,\ 2,\ 3) \tag{5}$$

$$\mathbf{S}_{CD}=S_{CD}\mathbf{e}_{CD}=\frac{S_{CD}}{7}(-6,\ 2,\ 3) \tag{6}$$

Vi kräver att kraftmomentet enl ekv (2) skall vara noll:

$$\left(\mathbf{M}_O=\sum \mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_k=\right) \quad \mathbf{r}_A\times\mathbf{S}_{AB}+\mathbf{r}_C\times\mathbf{S}_{CD}+\mathbf{r}_G\times(-mg\,\mathbf{e}_z)=\mathbf{0} \tag{7}$$

$$\frac{aS_{AB}}{3}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 8 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{vmatrix}+\frac{aS_{CD}}{7}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 6 & 0 & 0\\ -6 & 2 & 3\end{vmatrix}+(0,\ mg\cdot 4a,\ 0)=\mathbf{0} \tag{8}$$

Denna vektorekvation ger komponentekvationerna

$$\mathbf{e}_y: \quad -\frac{8}{3}aS_{AB}-\frac{18}{7}aS_{CD}+4mga=0 \tag{9}$$

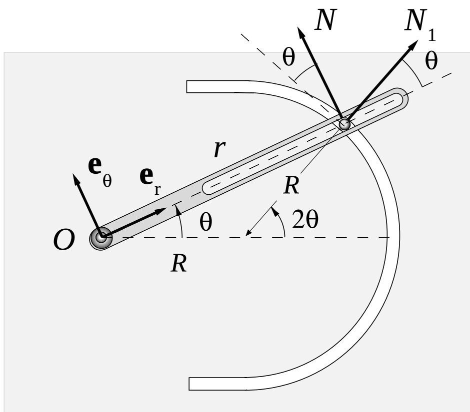
$$\mathbf{e}_z: \quad -\frac{16}{3}aS_{AB}+\frac{12}{7}aS_{CD}=0 \tag{10}$$

Ekv (9) och (10) ger $\underline{\underline{S_{AB}=\frac{3}{8}mg}}$; $\underline{\underline{S_{CD}=\frac{7}{6}mg}}$

Kraftsumman skall vara noll. Detta ger komponentekvationen

$$R_z+\frac{1}{3}S_{AB}+\frac{3}{7}S_{CD}-mg=0 \quad \Rightarrow \quad R_z+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}mg+\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{6}mg-mg=0 \quad \Rightarrow \tag{11}$$

$$\underline{\underline{R_z=\frac{3}{8}mg}}$$



Partikeln påverkas i horisontalplanet av en normalkraft N_1 från det cirkulära spåret och en normalkraft N från armen OA.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ har i cylinderkoordinater komponenterna:

$$\begin{cases} F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \\ F_\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases} \tag{1}$$

Här vet vi att bankurvan är $$r = 2R\cos\theta \tag{2}$$

Derivering ger $$\dot{r} = 2R(-\sin\theta)\cdot\dot{\theta} = -2R\sin\theta\cdot\dot{\theta} \tag{3}$$

$$\ddot{r} = -2R\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 - 2R\sin\theta\cdot\ddot{\theta} \tag{4}$$

Insättning i kraftekvationen (1) ger

$$\begin{cases} N_1\cos\theta = m\left(-2R\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 - 2R\sin\theta\cdot\ddot{\theta} - 2R\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2\right) \\ N + N_1\sin\theta = m\left(2R\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - 4R\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2\right) \end{cases} \tag{5}$$

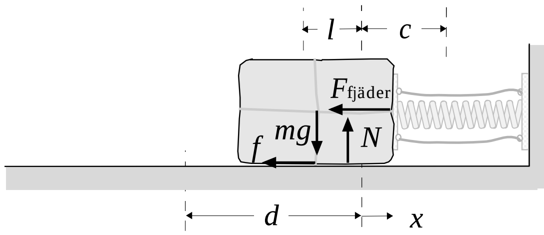
skrivs enklare $$\begin{cases} N_1\cos\theta = -2mR\left(2\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \sin\theta\cdot\ddot{\theta}\right) \\ N + N_1\sin\theta = 2mR\left(\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - 2\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2\right) \end{cases} \tag{6}$$

Vi ska bestämma N. Lös ut N_1 ur ekv (6a) och sätt in i ekv (6b)!

$$N - 2mR\left(2\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\ddot{\theta}\right) = 2mR\left(\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - 2\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2\right) \tag{7}$$

$$N = 2mR\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta\right)\cdot\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{N = \frac{2mR\ddot{\theta}}{\cos\theta}}}$$

Kommentar: En enklare lösning fås om man tänker sig cylinderkoordinatsystemet med origo i cirkelns centrum. Vinkelaccelerationen för radialriktningen är då $2\ddot{\theta}$. Kraftekvationens transversalkomponent (tangent till cirkelspåret) ger lösningen direkt: $N\cos\theta = mR\cdot 2\ddot{\theta}$.



Fjäderkraften och friktionskraften bromsar rörelsen så att lådan får farten noll när fjädern har sin maximala hoptryckning. Tiden verkar vara helt ointressant så vi ser vilken information lagen om arbetet ger:

$$U = T_1 - T_0 \tag{1}$$

Friktionskraften vid glidning är $f = \mu N = \mu mg$. Den är konstant, varför arbetet kan bestämmas som kraft gånger väg:

$$U_{\text{friktion}} = -\mu mg(d + c) \tag{2}$$

Fjäderkraftens arbete beräknas enligt

$$U_{\text{fjäder}} = \int_0^c -k(l + x)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{2}k(l + x)^2\right]_0^c = -\frac{1}{2}k(l + c)^2 + \frac{1}{2}kl^2 = -\frac{1}{2}k\left(c^2 + 2cl\right) \tag{3}$$

Arbetet är negativt. Uttrycket verkar stämma för specialfallen $c = 0$ och $l = 0$.

Insättning i ekv (1) ger

$$-\mu mg(d + c) - \frac{1}{2}k\left(c^2 + 2cl\right) = 0 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \tag{4}$$

$$\underline{\underline{\mu = \frac{m{v_0}^2 - k\left(c^2 + 2cl\right)}{2mg(d + c)}}} \tag{5}$$

Fjäderkraften är konservativ så att den har inte gjort något nettoarbete när lådan kommer tillbaka till ursprungliga tillståndet. Endast friktionskraften har gjort nettoarbete

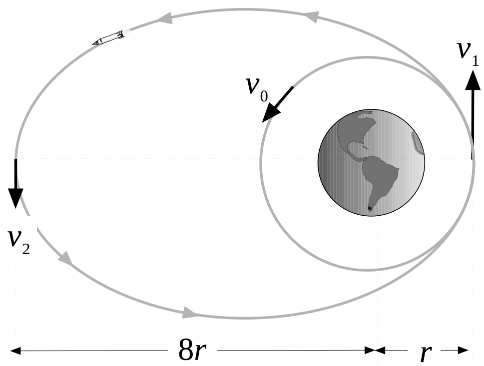
$$U = T_2 - T_0 \tag{6}$$

$$-\mu mg \cdot 2(d + c) = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \tag{7}$$

$${v_2}^2 = {v_0}^2 - 4\mu g(d + c) \tag{8}$$

Insättning av (5) ger

$$\underline{\underline{v_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}\left(c^2 + 2cl\right) - {v_0}^2}}}$$



Rymdfarkosten påverkas endast av gravitationskraften från jorden. För en cirkelrörelse med radien r kan den aktuella farten bestämmas med kraftekvationens normalkomponent:

$$m\frac{v_0{}^2}{r} = mg\frac{R^2}{r^2} \qquad \Rightarrow \tag{1}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r}} \tag{2}$$

Gravitationskraften är en *centralkraft*. Kraftmomentet $\mathbf{M}_O$ med avseende på jordens centrum är noll, vilket då enligt momentekvationen $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ betyder att rörelsemängdsmomentet $\mathbf{H}_O$ är en rörelsekonstant. Rörelsemängdsmomentets komponent vinkelrätt mot rörelsens plan bevaras:

$$r \cdot mv_1 = 8r \cdot mv_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = v_1/8 \tag{3}$$

Gravitationskraften är också *konservativ* med en känd potentialfunktion så att den mekaniska energin bevaras enligt

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2 - mg\frac{R^2}{r} = \frac{1}{2}mv_2{}^2 - mg\frac{R^2}{8r} \tag{5}$$

Eliminera nu ointressanta v_2 genom att sätta in (3):

$$v_1{}^2 - \frac{1}{64}v_1{}^2 = 2g\frac{8R^2}{8r} - 2g\frac{R^2}{8r} \tag{6}$$

$$\frac{63}{64}v_1{}^2 = \frac{14gR^2}{8r} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{gR^2}{r}} \tag{7}$$

Ekv (2) ger då att $v_1 = \dfrac{4}{3}v_0$

Svar: Farten v_1 måste vara $\dfrac{4}{3}$ gånger större än v_0