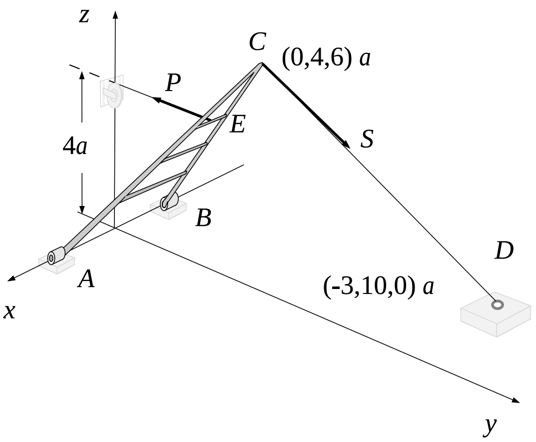


Frilägg kranarmen! Den påverkas av vajerkraften P, vajerkraften S samt kontaktkrafter i A och B.

Jämvikt fordrar att kraftsumman och kraftmomentsumman var för sig är noll, dvs att kraftsystemet bildar ett nollsystem: $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.

Först skrivs trådkraften $\mathbf{S}$ på vektorform:

$$\mathbf{r}_{CD} = \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_C = (-3a,\ 6a, -6a) \quad \Rightarrow \tag{1}$$

$$\mathbf{e}_{CD} = \frac{1}{3}(-1,\ 2,\ -2) \tag{2}$$

$$\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{CD} = \frac{S}{3}(-1,\ 2,\ -2) \tag{3}$$

Kontaktkrafterna i A och B efterfrågas ej och därför försöker vi att slippa dessa i räkningarna. I ekvationen $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ går de ej att undvika. Ekvationen $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ innehåller också dessa krafters moment, men tar vi x-komponenten ger de inget bidrag. Alltså:

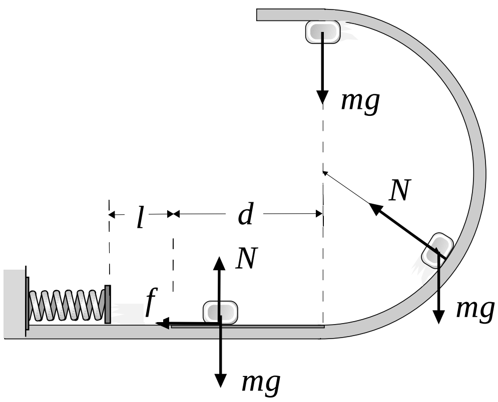
$$\left(\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k =\right) \quad \mathbf{r}_E \times \mathbf{P} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{S} + \text{kontaktkrafternas moment} = \mathbf{0} \tag{4}$$

$$aP\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \frac{aS}{3}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + \text{kontaktkrafternas moment} = \mathbf{0} \tag{5}$$

Denna vektorekvation har komponentekvationen

$$\mathbf{e}_x: \qquad 4aP - \frac{20}{3}aS = 0 \tag{6}$$

vilket ger vajerkraften $\qquad \underline{\underline{S = \frac{3}{5}P}}$



Kroppen påverkas av tyngdkraften mg, normalkraften N samt friktionskraften f. Vi söker i princip minsta begynnelse-energi i fjädern för att föra upp kroppen till översta läget utan att den förlorar kontakten med banan. Vilkoret är då att normalkraften är noll i det översta läget. Om bara tyngdkraften verkar i det översta läget säger kraftekvationens vertikala komponent att

$$m\frac{v_1^2}{r} = mg \tag{1}$$

Den minsta fart kroppen kan ha i översta läget är alltså $v_1 = \sqrt{gr}$.

Kroppen är från början i vila. Fjäderkraften gör arbetet $\frac{1}{2}kl^2$. Det är ett positivt arbete så att kroppens kinetiska energi ökar medan tyngdkraftens arbete $-mg \cdot 2r$ och friktionskraftens arbete $-\mu mg \cdot d$ är negativa. Summan av alla arbeten skall ge kinetisk energi i det översta läget.

Lagen arbetet:

$$\boxed{U = T_1 - T_0} \tag{2}$$

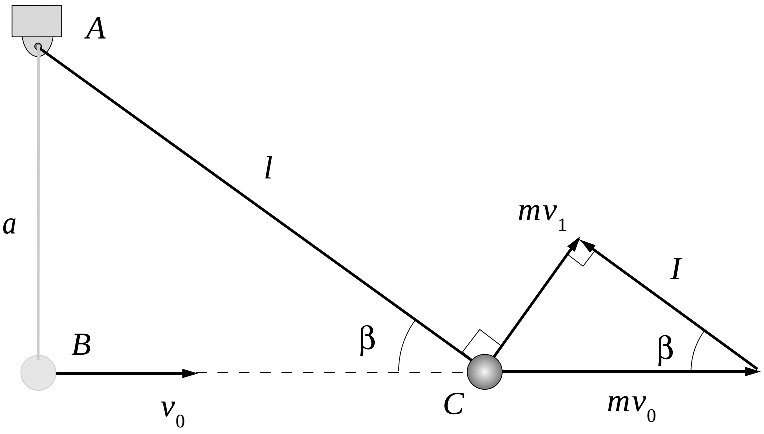
$$\frac{1}{2}kl^2 - \mu mg \cdot d - mg \cdot 2r = \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 \tag{3}$$

Sätt i ekv (1)!

$$kl^2 = 5mgr + 2\mu mgd \tag{4}$$

Den minsta fjäderförkortningen är

$$\underline{\underline{l = \sqrt{\frac{mg(5r + 2\mu d)}{k}}}}$$



Figuren visar att när pucken kommer till C är rörelsemängden mv_0. I detta läge blir tråden sträckt och en trådkraft uppkommer plötsligt. Under ett kort tidsintervall ger trådkraften en impuls, som ändrar rörelsemängden till mv_1 vinkelrätt mot tråden. Bankurvan är en cirkelrörelse efteråt. Impulsen måste ju vara i trådens riktning och därför ges impulsen av triangelgeometrin

Impulslagen: $$\boxed{\mathbf{I} = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0} \tag{1}$$

är en vektorekvation. Impulsens storlek ges alltså enligt figuren av

$$I = mv_0 \cdot \cos\beta \tag{2}$$

Avståndet mellan B och C bestäms med Pythagoras sats och då kan $\cos\beta$ skrivas:

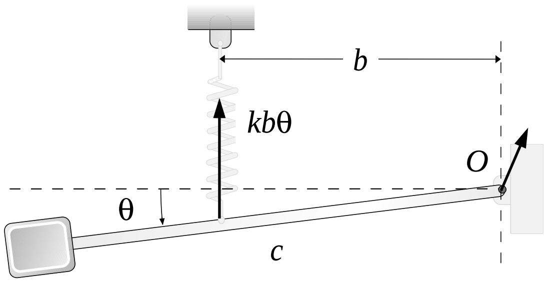
$$\cos\beta = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l} \tag{3}$$

Insättning i ekv (2) ger $$I = mv_0 \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l} \tag{4}$$

Den maximala farten blir då

$$\underline{\underline{v_0 = \frac{l}{m\sqrt{l^2 - a^2}} I}}$$

Insättning av numeriska värden ger $v_0 = \dfrac{3.2}{2.0\sqrt{0.64}}$ m/s = 2.0 m/s



Svängningstiden för stångens små svängningar kring det horisontella jämviktsläget skall bestämmas. Låt vinkeln θ vara stångens vridningsvinkel, som alltså är liten. Fjäderns förlängning räknat från jämviktsläget är då $b\theta$. Massans hastighet är $c\dot{\theta}$. Frilägg kroppen! Den påverkas av tyngdkraften, fjäderkraften och reaktionskraften vid O. I jämviktsläget balanseras tyngdkraftens moment med avseende på O av fjäderkraftens moment. Dessa statiska krafter kan man alltså bortse ifrån i det dynamiska fallet.

För att eliminera reaktionskraften i O ställer vi upp

momentekvationen $$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{1}$$

som allmänt har z-komponenten $$M_z = \dot{H}_z \tag{2}$$

Den enda dynamiska kraft som ger moment är fjäderkraftens dynamiska del $kb\theta$. Rörelsemängdsmomentet för plan rörelse i planpolära koordinater är $mc^2\dot{\theta}$. Alternativt bestäms det som hävarm gånger rörelsemängd $c \cdot mc\dot{\theta}$. Insättning i momentekvationen ger

$$-b \cdot kb\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mc^2\dot{\theta}\right) \tag{3}$$

$$mc^2\ddot{\theta} + kb^2\theta = 0 \tag{4}$$

Standardekvationen blir

$$\ddot{\theta} + \frac{kb^2}{mc^2}\,\theta = 0 \tag{5}$$

Identifiering ger då egenvinkelfrekvensen i kvadrat

$$\omega_n{}^2 = \frac{kb^2}{mc^2} \tag{6}$$

Perioden är då $$\underline{\underline{\tau_n = 2\pi\frac{c}{b}\sqrt{\frac{m}{k}}}}$$