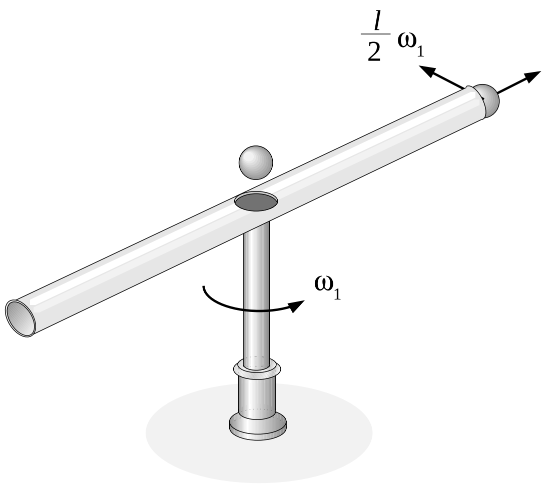


Röret roterar helt fritt kring den fixa vertikala z-axeln. Det finns inget yttre kraftmoment M_z på hela systemet som driver eller bromsar. Om rörets vinkelhastighet ändras måste det bero på den växelverkan som sker mellan kulorna och röret.

Projicera momentekvationen för hela systemet

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{1}$$

på z-axeln:

$$M_z = \dot{H}_z \tag{2}$$

Här är det yttre kraftmomentet noll:

$$M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{H}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad H_z = \text{rörelsekonstant} \tag{3}$$

Rörelsemängdsmomentet för hela systemet i utgångstillståndet är alltså lika med rörelsemängdsmomentet i sluttillståndet. Från början ger endast röret bidrag till rörelsemängdsmomentet:

$$H_z = I_G^{\text{rör}}\omega_0 = \frac{ml^2}{12}\omega_0 \tag{4}$$

Antag att rörets vinkelhastighet är ω_1 när den första kulan lämnar röret. Kulans hastighetskomponent vinkelrätt mot röret är då $l\omega_1/2$, så att rörelsemängdsmomentet för hela systemet blir

$$H_z = \frac{ml^2}{12}\omega_1 + \frac{l}{2}\cdot m_1\frac{l}{2}\omega_1 \tag{5}$$

vilket ger ekvationen

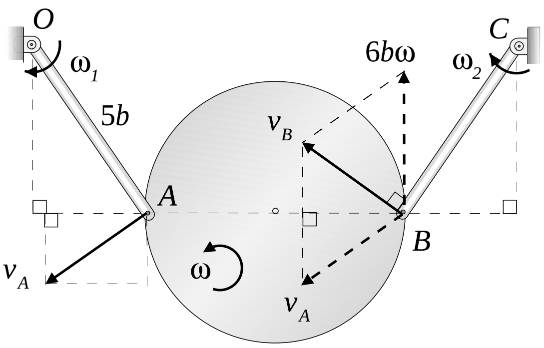
$$\frac{ml^2}{12}\omega_0 = \frac{ml^2}{12}\omega_1 + \frac{m_1 l^2}{4}\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\omega_1 = \frac{m}{m+3m_1}\omega_0}} \tag{6}$$

När den första kulan lämnat röret ändras inte dess rörelsemängdsmoment. Ekvationen för hela systemet blir då på samma sätt som tidigare

$$\left(\frac{ml^2}{12}\omega_0\right) = \frac{ml^2}{12}\omega_1 + \frac{m_1 l^2}{4}\omega_1 = \frac{ml^2}{12}\omega_2 + \frac{m_1 l^2}{4}\omega_2 + \frac{m_1 l^2}{4}\omega_1 \tag{7}$$

$$\frac{ml^2}{12}\omega_1 = \frac{ml^2}{12}\omega_2 + \frac{m_1 l^2}{4}\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{m}{m+3m_1}\omega_1 \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\omega_2 = \left(\frac{m}{m+3m_1}\right)^2\omega_0}}$$



Stångerna OA och BC roterar kring fixa punkter. Antag att vinkelhastigheten för BC är ω_2. Ändpunkternas hastigheter är $v_A = 5b\omega_1$ och $v_B = 5b\omega_2$ med riktningar enligt figuren. Sidorna i figurens rätvinkliga hastighetstrianglar förhåller sig som 3:4:5. Hastigheterna för ändpunkterna är därför

$$\mathbf{v}_A = -4b\omega_1\mathbf{e}_x - 3b\omega_1\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{v}_B = -4b\omega_2\mathbf{e}_x + 3b\omega_2\mathbf{e}_y$$

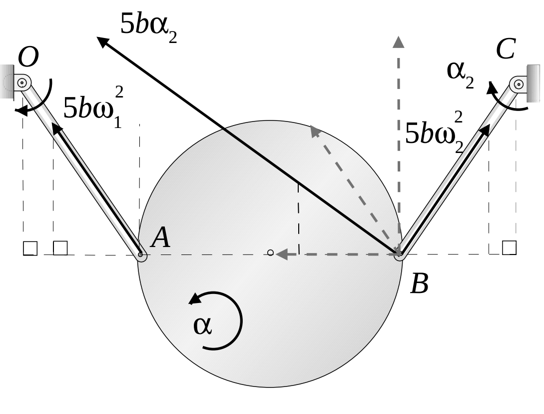
För punkterna A och B gäller sambandsformeln

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{AB} \tag{1}$$

Vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ antas vara riktad utåt, alltså moturs rotation. Sambandsformeln i komponentform blir då:

$$\rightarrow: \quad -4b\omega_2 = -4b\omega_1 + 0 \tag{2}$$
$$\uparrow: \quad 3b\omega_2 = -3b\omega_1 + 6b\omega \tag{3}$$

Ekv (2) och (3) ger $\qquad \omega_2 = \omega = \omega_1 \qquad (4)$



Accelerationerna för ändpunkterna är

$$\mathbf{a}_A = -3b\omega_1^2\mathbf{e}_x + 4b\omega_1^2\mathbf{e}_y \tag{5}$$
$$\mathbf{a}_B = \left(3b\omega_2^2 - 4b\alpha_2\right)\mathbf{e}_x + \left(4b\omega_2^2 + 3b\alpha_2\right)\mathbf{e}_y \tag{6}$$

Sambandsformeln för accelerationer:

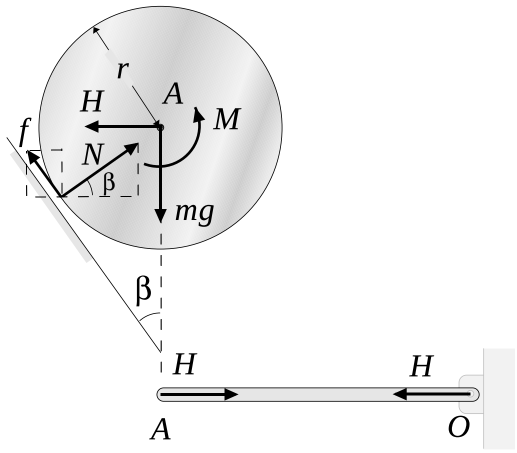
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{AB}\right) \tag{7}$$

blir i komponentform

$$\rightarrow: \quad 3b\omega_2^2 - 4b\alpha_2 = -3b\omega_1^2 + 0 - 6b\omega^2 \tag{8}$$
$$\uparrow: \quad 4b\omega_2^2 + 3b\alpha_2 = 4b\omega_1^2 + 6b\alpha + 0 \tag{9}$$

Utnyttja nu (4)! Ekv (8) ger $\qquad \alpha_2 = 3\omega_1^2$

Insättning i (9) ger vinkelaccelerationen $\qquad \underline{\underline{\alpha = \frac{3}{2}\omega_1^2}} \qquad$ (moturs)



Frilägg stången och cirkelskivan!

Den lätta stången, som är i jämvikt, är en tvåkraftskropp. Jämviktsekvationerna visar att krafterna i ändpunkterna måste vara lika stora och motriktade. Vi antar att kraften är H.
Cirkelskivan påverkas av tyngdkraften mg, normalkraften N, friktionskraften f, kontaktkraften H samt kraftparsmomentet M.

Vi söker vinkelaccelerationen och kontaktkraften H och ställer därför (för cirkelskivan) upp kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \tag{1}$$

och momentekvationen

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{2}$$

Vid glidning vet vi att friktionskraften är maximal: $f = \mu N$.
I komponentform fås då

$$\rightarrow: \quad N\cos\beta - \mu N\sin\beta - H = m\ddot{x}_G \tag{3}$$

$$\uparrow: \quad N\sin\beta + \mu N\cos\beta - mg = m\ddot{y}_G \tag{4}$$

$$\circlearrowleft G: \quad M - \mu N \cdot r = I_G \cdot \ddot{\theta} \tag{5}$$

Tyngdpunkten $G \equiv A$ har ingen acceleration så att $\ddot{x}_G = \ddot{y}_G = 0$.
Tröghetsmomentet för en cirkelskiva är $I_G = \dfrac{mr^2}{2}$

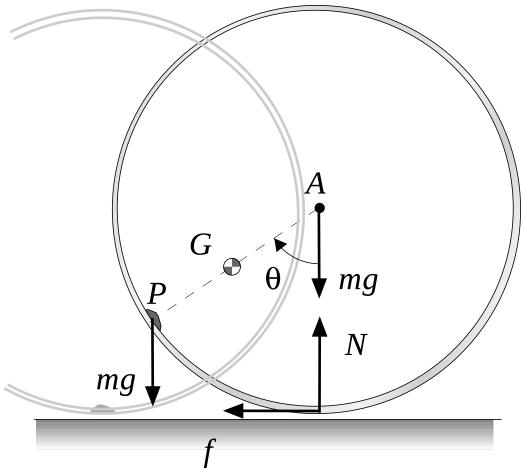
Ekvationerna (4), (5) och (6) ger då i tur och ordning

$$N = \frac{mg}{\sin\beta + \mu\cos\beta}$$

$$\underline{\underline{H = \frac{\cos\beta - \mu\sin\beta}{\sin\beta + \mu\cos\beta}\, mg}}$$

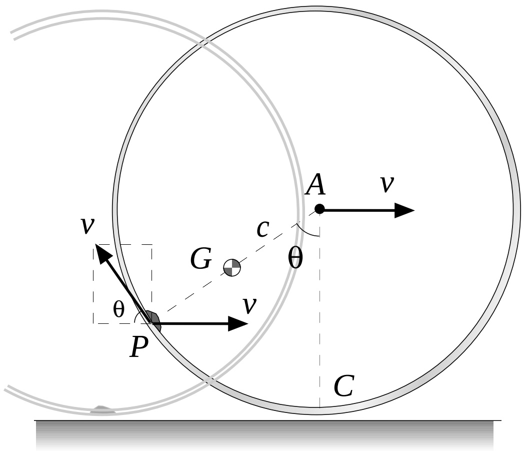
$$\underline{\underline{\ddot{\theta} = \frac{2}{mr^2}\left(M - \frac{\mu mgr}{\sin\beta + \mu\cos\beta}\right)}}$$

Resultatets rimlighet kontrolleras lämpligen genom att sätta $\beta = 0$ och $\beta = \pi/2$.



Vi söker farten som funktion av läget. Tiden är ointressant vilket betyder att vi vill ställa upp en energiekvation.

Frilägg kroppen! Den påverkas av tyngdkraften $2mg$, normalkraften N samt friktionskraften f. Vid rullning gör inte de två sistnämnda krafterna något arbete. Tyngdkraften, som är konservativ, är den enda kraft som gör arbete.



Betrakta först kinematiken! Sambandet mellan centrumpunktens hastighet och vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ är

$$v_A \equiv v = r\dot{\theta} \tag{1}$$

Enligt sambandsformeln

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{AP} \tag{2}$$

är då partikelns hastighet

$$\mathbf{v}_P = \left(v - v\cos\theta\right)\mathbf{e}_x + v\sin\theta\,\mathbf{e}_y \tag{3}$$

Kroppens kinetiska energi kan bestämmas antingen med kinetiska energins två delar för hela kroppen, då masscentrums hastighet måste bestämmas, eller som summan $T = T^{\text{cirkelring}} + T^{\text{partikel}}$. Vi följer nu det senare spåret.

$$T^{\text{cirkelring}} = \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(I_A + mr^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\cdot 2mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 = mv^2 \tag{4}$$

$$T^{\text{partikel}} = \frac{1}{2}m{v_P}^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(v - v\cos\theta\right)^2 + \left(v\sin\theta\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}mv^2\left[1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right] = \left(1-\cos\theta\right)mv^2 \tag{5}$$

Den totala kinetiska energin kan då skrivas: $T = \left(2-\cos\theta\right)mv^2$ (6)

Lagen om bevarandet av den mekaniska energin $T + V = T_0 + V_0$

ger då
$$\left(2-\cos\theta\right)mv^2 - mgr\cos\theta = m{v_0}^2 - mgr \tag{7}$$

$$\left(2-\cos\theta\right)v^2 = {v_0}^2 - gr\left(1-\cos\theta\right) \tag{8}$$

$$\underline{\underline{v = \sqrt{\frac{{v_0}^2 - gr\left(1-\cos\theta\right)}{2-\cos\theta}}}}$$