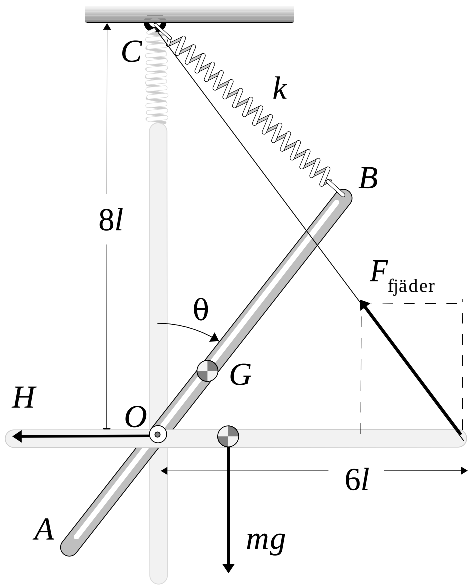


Den sökta reaktionskraften i O bestäms med kraftekvationen för stången: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ Det är komponenten i normalriktningen som blir horisontell.

$$F_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

Frilägg kroppen! Den påverkas av tyngdkraften mg, fjäderkraften $F_{\text{fjäder}}$ samt reaktionskraften från axeln. Avståndet mellan axeln och kroppens masscentrum är $3l/2$. Fjäderns längd för läget $\theta = \pi/2$ är $10l$ (Pythagoras sats). Förlängningen är alltså $7l$. I det horisontella läget fås

$$H + \frac{3}{5}k \cdot 7l = m\frac{3}{2}l\omega^2 \qquad (1)$$

Vi måste alltså bestämma stångens vinkelhastighet ω i det horisontella läget. Reaktionskraften gör inget arbete. Tyngdkraften och fjäderkraften är konservativa, vilket betyder att den mekaniska energin bevaras. Lagen om den mekaniska energins bevarande:

$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \qquad (2)$$

Insättning i ekv (2) ger

$$\frac{1}{2}I_O\omega^2 + mg\cdot 0 + \frac{1}{2}k(7l)^2 = 0 + mg\cdot\frac{3}{2}l + \frac{1}{2}kl^2 \qquad (3)$$

Kroppens tröghetsmoment med avseende på axeln är

$$I_O = I_G + m\left(\frac{3}{2}l\right)^2 = \frac{m\cdot(9l)^2}{12} + m\frac{9}{4}l^2 = \frac{108}{12}ml^2 = 9ml^2 \qquad (4)$$

Insättning ger

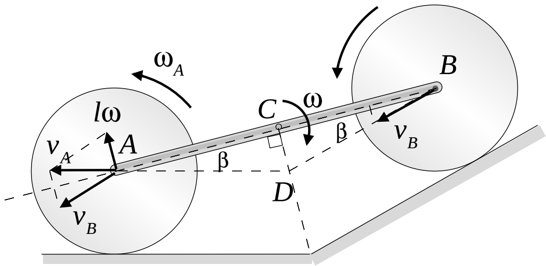
$$\frac{1}{2}9ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}k\,49l^2 = 0 + mg\cdot\frac{3}{2}l + \frac{1}{2}kl^2 \qquad (5)$$

$$ml\omega^2 = \frac{1}{3}mg - k\frac{16}{3}l \qquad (6)$$

Insättning i (1) ger

$$H = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}mg - \frac{16}{3}kl\right) - \frac{21}{5}kl \qquad (7)$$

$$\underline{\underline{H = \frac{1}{2}mg - \frac{61}{5}kl}}$$



Riktningarna för hastighet och acceleration i punkterna A och B måste vara längs respektive plan.

För punkterna A och B i stången gäller sambandsformeln

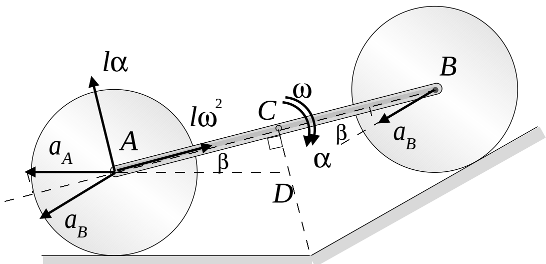
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA} \tag{1}$$

Vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ för stången antas vara riktad inåt, alltså medurs rotation. Vi väljer projektionsriktningar längs stången $\mathbf{e}_{BA}$ och vinkelrätt emot $\mathbf{e}_{DC}$. Sambandsformeln i komponentform blir då:

$$\mathbf{e}_{BA}: \quad v_A \cos\beta = v_B \cos\beta + 0 \tag{2}$$
$$\mathbf{e}_{DC}: \quad v_A \sin\beta = -v_B \sin\beta + l\omega \tag{3}$$

Ekv (2) ger $$v_A = v_B \tag{4}$$
Ekv (3) ger då $$\omega = 2v_A \sin\beta / l \tag{5}$$

Vinkelaccelerationen för stången $\boldsymbol{\alpha}$ antas vara riktad inåt, alltså medurs.



Sambandsformeln för accelerationer:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}) \tag{6}$$

blir i komponentform

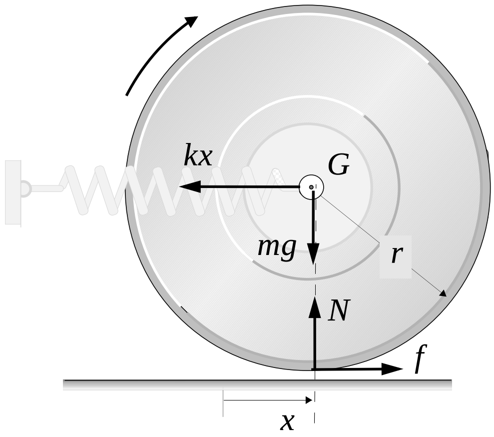
$$\mathbf{e}_{BA}: \quad a_A \cos\beta = a_B \cos\beta + 0 - l\omega^2 \tag{7}$$
$$\mathbf{e}_{DC}: \quad a_A \sin\beta = -a_B \sin\beta + l\alpha + 0 \tag{8}$$

Ekv (7) ger accelerationen a_B (utnyttja (5)!)

$$a_B = a_A + \frac{l\omega^2}{\cos\beta} = a_A + \frac{4v_A{}^2 \sin^2\beta}{l\cos\beta} \tag{9}$$

Insättning i (8) ger $$(a_A + a_B)\sin\beta = l\alpha$$

$$\underline{\underline{\alpha = \left(\frac{2a_A}{l} + \frac{4v_A{}^2 \sin^2\beta}{l^2 \cos\beta} \right) \sin\beta}}$$



Frilägg cylindern! Förutom tyngdkraften mg och fjäderkraften kx verkar en friktionskraft f och normalkraft N i kontaktpunkten. För att bestämma vid vilket läge glidning inträffar måste vi undersöka friktionsvillkoret

$$\frac{f}{N} \leq \mu$$

Glidning motsvaras av likhetstecknet. Antag nu rullning och bestäm friktionskraften och normalkraften i ett godtyckligt läge. Antag att vinkelaccelerationen för cylindern är $\ddot{\theta}$ medurs!

Vi ställer upp kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ för och momentekvationerna $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ med avseende på masscentrum för cylindern. I komponentform fås

$$\rightarrow \quad : \quad -kx + f = m\ddot{x}_G \tag{1}$$

$$\uparrow \quad : \quad N - mg = 0 \tag{2}$$

$$G\circlearrowright \quad : \quad -f \cdot r = \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} \tag{3}$$

Kinematiksambandet är $$\ddot{x}_G = r\ddot{\theta} \tag{4}$$

Dividera ekv (3) med r och utnyttja rullningsvillkoret (4). Vi får med (1) och (3)

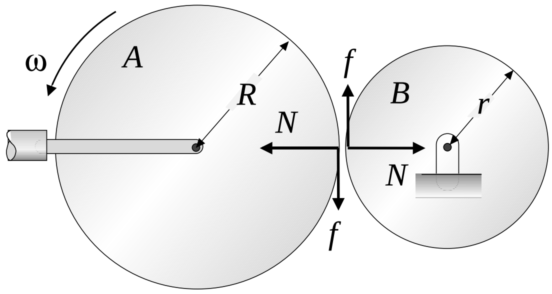
$$-kx + f = -2f \qquad \Rightarrow \qquad 3f = kx \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{1}{3}kx \tag{5}$$

Insättning i friktionsvillkoret ger

$$\frac{kx_1}{3mg} = \mu \tag{6}$$

Glidning inträffar alltså då $$\underline{\underline{x_1 = \frac{3mg}{k}\mu}}$$

Med de givna numeriska värdena fås $x_1 = \dfrac{300}{60} \cdot 0.3 \text{ m} = 1.5 \text{ m}$



Från början är cirkelskivan B i vila och rörelsen startar på grund av friktionskraften, som då är fullt utvecklad:

$$f = \mu N$$

De andra krafterna på skivorna har angreppspunkt i skivornas centrumpunkter.

Cirkelskivornas vinkelacceleration bestäms med momentekvationen med avseende på respektive centrum

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G.$$

I komponentform fås

Skiva B $\quad \circlearrowright G : \quad \mu N \cdot r = \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta}_B \qquad (1)$

Skiva A $\quad \circlearrowleft G : \quad -\mu N \cdot R = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta}_A \qquad (2)$

Eliminering av friktionskraften ger

$$-\frac{mr}{2}\ddot{\theta}_B = \frac{mR}{2}\ddot{\theta}_A \qquad (3)$$

eller $$-r\ddot{\theta}_B = R\ddot{\theta}_A \qquad (4)$$

Tidsintegrering ger $$-r\left(\dot{\theta}_B - 0\right) = R\left(\dot{\theta}_A - \omega\right) \qquad \Rightarrow \qquad (5)$$

$$-r\dot{\theta}_B = R\left(\dot{\theta}_A - \omega\right) \qquad (6)$$

När glidningen upphört antas skivorna ha vinkelhastigheterna $\dot{\theta}_{A1}$ och $\dot{\theta}_{B1}$ och de rullar då mot varandra, vilket motsvaras av villkoret

$$r\dot{\theta}_{B1} = R\dot{\theta}_{A1} \qquad (7)$$

Insättning i (6) ger

$$\dot{\theta}_{A1} = \frac{\omega}{2}; \qquad \dot{\theta}_{B1} = \frac{R}{2r}\omega$$

Om radierna är lika blir båda vinkelhastigheterna $\omega/2$.