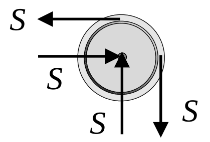
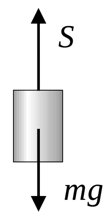



Frilägg systemets alla delar!

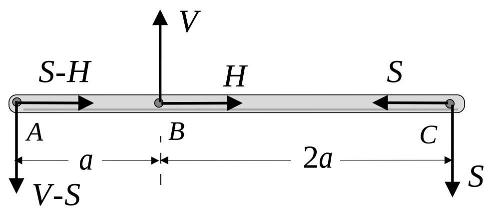
Om trissan friläggs visar momentekvationen med avseende på axeln $C$ att trådkraften $S$ måste vara lika på båda sidor. Kraftjämvikt ger kraftkomponenterna $S$ vid axeln.

Friläggning av tyngden $mg$ ger att




$$S = mg \qquad (1)$$

Frilägg stången $AC$! Antag kraftkomponenterna $H$ och $V$ i punkten $B$. Kraftjämvikt horisontellt och vertikalt ger då kraftkomponenterna $S-H$ respektive $V-S$ i punkten $A$ (enligt figur):

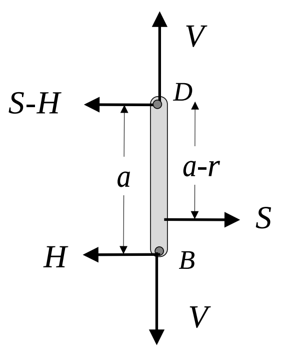



Jämvikt fordrar också

$$\curvearrowleft A: \quad V\cdot a - S\cdot 3a = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V = 3mg}}$$

Frilägg den vertikala stången $BD$! Lagen om verkan och motverkan ger kraften i $B$. Kraftjämvikt horisontellt och vertikalt ger då kraftkomponenterna $S-H$ respektive $V$ i punkten $D$:

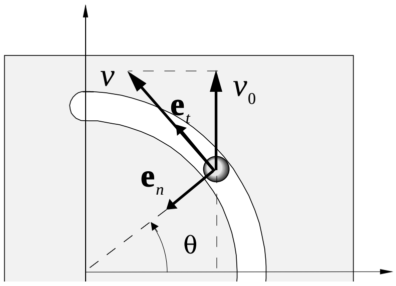



Jämvikt fordrar också

$$\curvearrowleft D: \quad S\cdot(a-r) - H\cdot a = 0 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{H = \frac{a-r}{a}mg}}$$

Det kan vara bra att kolla om resultatet stämmer med jämviktsekvationerna för hela systemet!




Partikeln har en cirkelrörelse med en konstant hastighetskomponent $v_0$ i $y$-riktningen. Partikelns totala hastighet är $v = r\dot{\theta}$ längs $\mathbf{e}_t$-riktningen. Vi får då sambandet

$$r\dot{\theta}\cos\theta = v_0 \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{r\cos\theta} \tag{2}$$

Accelerationen i det naturliga koordinatsystemet är

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{3}$$

Här är $s = r\theta$ och $\rho = r$ så att

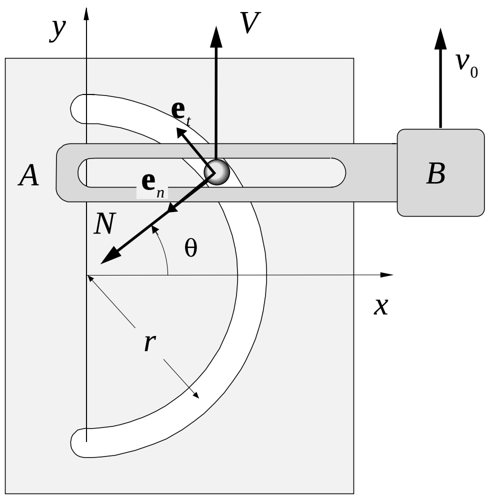
$$\mathbf{a} = r\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_t + r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_n \tag{4}$$

Vi vet att den accelerationen i $y$-riktningen är noll:

$$r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \dot{\theta}^2\tan\theta \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{v_0^{\,2}\sin\theta}{r^2\cos^3\theta} \tag{7}$$




Kraftekvationen: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (8)

har komponenterna

$$\mathbf{e}_t: \quad V\cos\theta = mr\ddot{\theta} \tag{9}$$

$$\mathbf{e}_n: \quad N - V\sin\theta = mr\dot{\theta}^2 \tag{10}$$

Ekv (9) och (7) ger

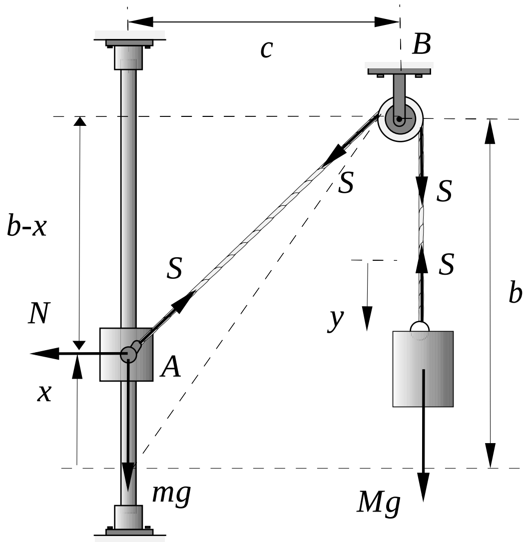
$$V = m\,\frac{v_0^{\,2}\sin\theta}{r\cos^4\theta}$$

Ekv (10) och (2) ger

$$N = V\sin\theta + mr\left(\frac{v_0}{r\cos\theta}\right)^2 \tag{11}$$

$$N = m\,\frac{v_0^{\,2}\sin^2\theta}{r\cos^4\theta} + m\frac{v_0^{\,2}}{r\cos^2\theta} \tag{12}$$

$$\underline{\underline{N = \frac{mv_0^{\,2}}{r\cos^4\theta}}}$$




Hylsan påverkas av tyngdkraften, normalkraften och trådkraften. Farten söks som funktion av läget. En energiekvation är en ekvation där tiden har eliminerats och istället ger den kinetiska energin för olika lägen. Vi behöver kunna bestämma krafternas arbeten. Normalkraften utför inget arbete då den är vinkelrät mot förflyttningen. Tyngdkraften är konstant och storleken av dess arbete är "kraft gånger väg". Återstår trådkraftens arbete. Trådkraften är lika stor i hela tråden, eftersom trissan är lätt och lättrörlig. Vi betecknar trådkraftens arbete $U_{S1}$ respektive $U_{S2}$.

Lagen om arbetet: $$U = T - T_0 \qquad (1)$$

för hylsan $$-mg \cdot x + U_{S1} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad (2)$$

för tyngden $$Mg \cdot y - U_{S2} = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 \qquad (3)$$

Trådkraftens arbeten $U_{S1}$ och $U_{S2}$ måste vara lika stora eftersom förflyttningarna av angreppspunkterna har lika stora komponenter i trådkraftens riktning. Om vi adderar ekvationerna (2) och (3) fås energiekvationen för hela systemet. Den ekvationen, som också kan ställas upp direkt

$$-mgx + Mgy = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 \qquad (4)$$

säger att kinetiska energin för hela systemet är lika med alla krafters arbeten. Men vilket samband råder då mellan $x$ och $y$? Eftersom trådens längd är konstant måste

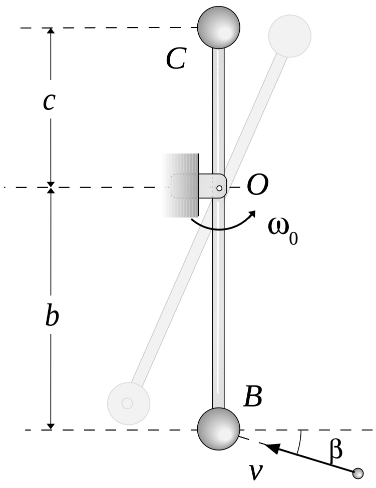
$$y = \sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{(b-x)^2 + c^2} \qquad (5)$$

$$\dot{y} = -\frac{2(b-x)(-\dot{x})}{2\sqrt{(b-x)^2 + c^2}} \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \frac{(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}} \dot{x} \qquad (6)$$

Insättning i (4) ger

$$-mgx + Mg\left[\sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{(b-x)^2 + c^2}\right] = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \frac{(b-x)^2}{(b-x)^2 + c^2} \dot{x}^2 \qquad (7)$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2Mg\left[\sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{(b-x)^2 + c^2}\right] - 2mgx}{m + M \dfrac{(b-x)^2}{(b-x)^2 + c^2}}}$$




Kroppen kan rotera helt fritt kring den fixa horisontella $z$-axeln (inåt) genom $O$. Vi betraktar ett kort stötförlopp då läget för kropparna inte ändras. Under stöttiden finns det inget yttre kraftmoment $M_z$ på hela systemet som driver eller bromsar.

Projicera momentekvationen för hela systemet

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{1}$$

på $z$-axeln:

$$M_z = \dot{H}_z \tag{2}$$

Det yttre kraftmomentet är noll:

$$M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{H}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad H_z = \text{rörelsekonstant} \tag{3}$$

Rörelsemängdsmomentet för hela systemet före stöt är alltså lika med rörelsemängdsmomentet efter stöt.

$$H_z^{\text{före}} = H_z^{\text{efter}} \tag{4}$$

$$m_1 v \cos\beta \cdot b - m\left(b^2 + c^2\right)\omega_0 = mc^2\omega_1 + \left(m + m_1\right)b^2\omega_1 \tag{5}$$

$$\underline{\underline{\omega_1 = \frac{m_1 v\, b \cos\beta - m\left(b^2 + c^2\right)\omega_0}{mc^2 + \left(m + m_1\right)b^2}}}$$