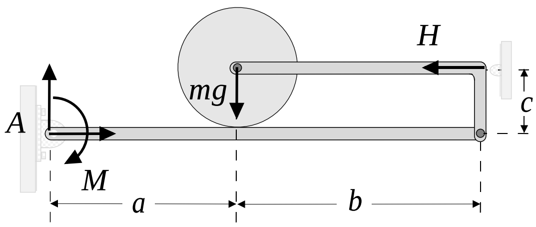
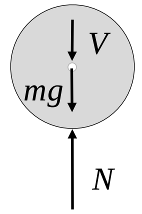


Frilägg systemet och alla dess delar!

Betrakta hela systemet!

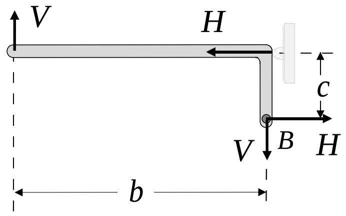
De yttre krafterna är hjulets tyngd mg, den horisontella kraften H i stödpunkten samt reaktionskraft i A. Dessutom finns ett kraftparsmoment. Jämvikt fordrar

$$\curvearrowleft A: \quad H \cdot c - mg \cdot a - M = 0 \qquad (1)$$



För hjulet finns ingen horisontell kraft i kontaktpunkten mot stången AB och då är också den horisontella kraften i centrum noll. Jämvikt fordrar

$$\uparrow: \quad N - mg - V = 0 \qquad (2)$$



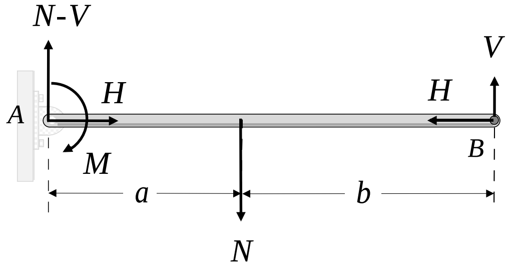
För den vinklade stången krävs

$$\curvearrowleft B: \quad H \cdot c - V \cdot b = 0 \qquad (3)$$

Ekv (1) ger $\quad H = \frac{a}{c} mg + \frac{M}{c}$

Ekv (3) ger då $\quad V = \frac{a}{b} mg + \frac{M}{b}$

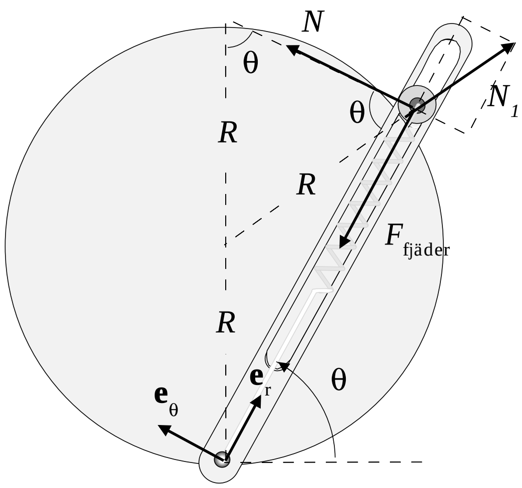
Ekv (2) ger då $\quad \underline{\underline{N = \frac{a+b}{b} mg + \frac{M}{b}}}$



Kontrollera gärna med momentekvationen för stången AB!

$$\curvearrowleft A: \quad V \cdot (a+b) - N \cdot a - M = 0$$

Om $V = N - mg$ från ekv (2) insättes får vi samma resultat.



En kraft skall bestämmas och det är rimligt att ställa upp kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Eftersom bankurvan ges i planpolära koordinater och två av krafterna ligger i radiell och transversell riktning (räknat från O) väljer vi här kraftekvationen i cylinderkoordinatsystemet:

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F_r \\ m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = F_\theta \end{cases} \tag{1}$$

Vi behöver först tidsderivatorna i vänsterleden.

Vinkelhastigheten är konstant: $\dot{\theta} = \omega \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0$ (2)

Tidsderivera $r = 2R\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = 2R\omega\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = -2R\omega^2\sin\theta$ (3)

Insättning i kraftekvationen ger:

$$m\left(-2R\omega^2\sin\theta - 2R\omega^2\sin\theta\right) = N_1\sin\theta - k\left(2R\sin\theta - l\right) \tag{4}$$

$$m\left(0 + 4R\omega^2\cos\theta\right) = N - N_1\cos\theta \tag{5}$$

Ekv (4) ger

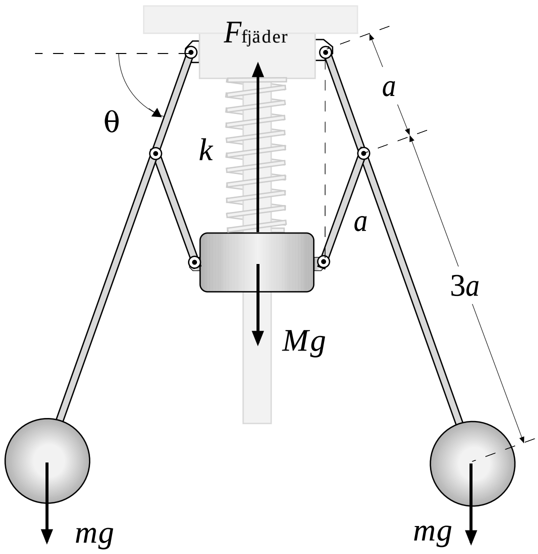
$$N_1 = \frac{k\left(2R\sin\theta - l\right)}{\sin\theta} - 4mR\omega^2 \tag{6}$$

Ekv (5) ger då

$$N = \left[\frac{k\left(2R\sin\theta - l\right)}{\sin\theta} - 4mR\omega^2\right]\cos\theta + 4mR\omega^2\cos\theta \tag{7}$$

$$\underline{\underline{N = \frac{k\left(2R\sin\theta - l\right)}{\tan\theta}}}$$

Man kan också räkna problemet som "vanlig" cirkelrörelse med basvektorerna utgående från cirkelns centrum.



Vinkelhastigheten som funktion av läget söks och därför kan man sikta in sig på en energiekvation.

De krafter som gör arbete är tyngdkrafterna och fjäderkraften. Dessa krafter är konservativa. Det finns också krafter i varje led men de bidrar inte till arbetet, antingen för att leden är fix eller att två krafters arbeten i samma led tillsammans blir noll.

Den mekaniska energin bevaras:

$$T + V = T_0 + V_0 \tag{1}$$

Centrumkroppens vertikala lägeskoordinat räknas positiv neråt och ges av $y = 2a\sin\theta$, så att dess hastighet kan skrivas $\dot{y} = 2a\cos\theta \cdot \dot{\theta}$

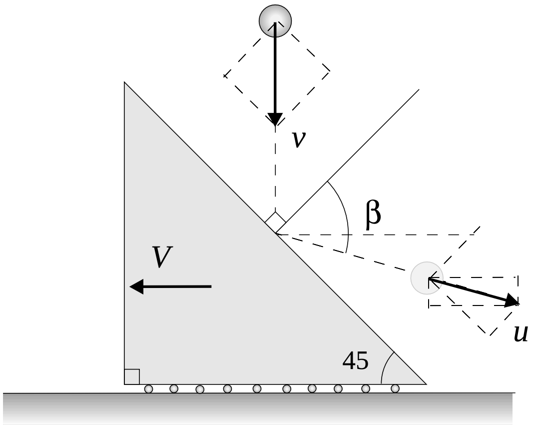
Insättning i ekv (1) ger

$$\begin{aligned} &2\cdot\frac{1}{2}m\left(4a\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(2a\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(2a\sin\theta - a\right)^2 - Mg2a\sin\theta - 2mg\cdot 4a\sin\theta \\ &= 0 + 0 - Mga - 4mga + 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Vi förenklar detta

$$\left(16m + 2M\cos^2\theta\right)a^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ka^2\left(2\sin\theta - 1\right)^2 = Mga\left(2\sin\theta - 1\right) + 4mga\left(2\sin\theta - 1\right) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{(M+4m)\dfrac{g}{a}\left(2\sin\theta - 1\right) - \dfrac{1}{2}k\left(2\sin\theta - 1\right)^2}{16m + 2M\cos^2\theta}}}}$$



Ett stötproblem. Om man betraktar hela systemet finns inga yttre stötkrafter den horisontella riktningen, varför rörelsemängden i den horisontella riktningen måste bevaras. Den är noll från början:

$$mu\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)-MV=0 \qquad (1)$$

Prismats yta är glatt så att det finns ingen stötkraft på den lilla kulan parallellt med prismats lutande yta. Kulans rörelsemängd i den riktningen är konstant:

$$mu\sin\beta=m\frac{v}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

Slutligen ger uttrycket för studstalet

$$e=-\frac{u\cos\beta-\left(-\frac{V}{\sqrt{2}}\right)}{-\frac{v}{\sqrt{2}}-0} \qquad (3)$$

Vi skriver ekvationerna lite snyggare:

$$mu(\cos\beta+\sin\beta)-\sqrt{2}MV=0 \qquad (1')$$

$$u\sin\beta=\frac{v}{\sqrt{2}} \qquad (2')$$

$$ev=\sqrt{2}u\cos\beta+V \qquad (3')$$

Eliminera vinkeln β och farten u genom att lösa ut $u\cos\beta$ och $u\sin\beta$ ur ekv (2') och (3') och sätta in det i ekv (1):

$$m\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(ev-V)+\frac{v}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}MV=0$$

$$m((ev-V)+v)-2MV=0$$

$$V=\frac{m(1+e)}{2M+m}\,v$$