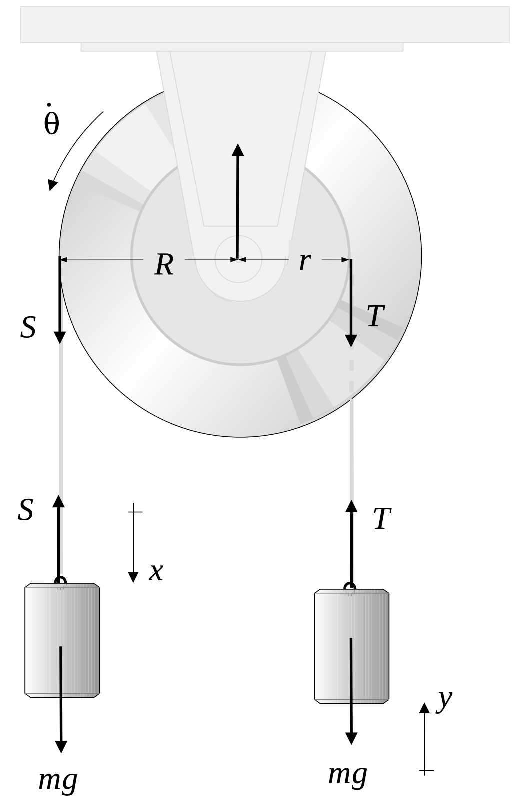



Frilägg trissan och de två tyngderna! Antag att trådkrafterna är $S$ respektive $T$ enligt figuren. Trissan påverkas också av en kontaktkraft vid axeln.

Antag att den vänstra tyngden får en hastighet $\dot{x}$ neråt medan den högra får hastigheten $\dot{y}$ uppåt och trissan får vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ moturs. Kinematikvillkoret blir då

$$\dot{x} = R\dot{\theta} \qquad (1)$$

$$\dot{y} = r\dot{\theta} \qquad (2)$$

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ för tyngderna och momentekvationen $\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ för trissan blir:

vänster $\downarrow$ : $mg - S = m\ddot{x}$ (3)

höger $\uparrow$ : $T - mg = m\ddot{y}$ (4)

Trissan $\curvearrowleft O$: $S \cdot R - T \cdot r = I\ddot{\theta}$ (5)

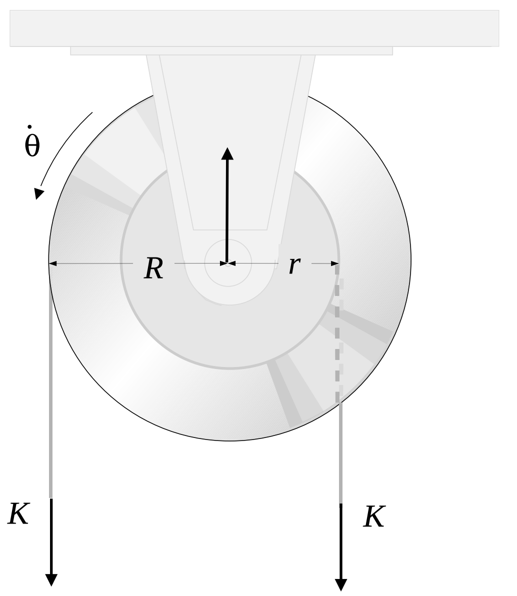
Multiplicera ekv (3) med $R$, ekv (4) med $r$ och addera sedan ekv (3), (4) och (5)! Resultatet blir

$$mg(R - r) = mR\ddot{x} + mr\ddot{y} + I\ddot{\theta} \qquad (6)$$

De tidsderiverade kinematikvillkoren (1) och (2) ger då

$$mg(R - r) = \left(mR^2 + mr^2 + I\right)\ddot{\theta} \qquad (7)$$

$$\underline{\underline{\ddot{\theta} = \frac{mg(R - r)}{m\left(R^2 + r^2\right) + I}}}$$

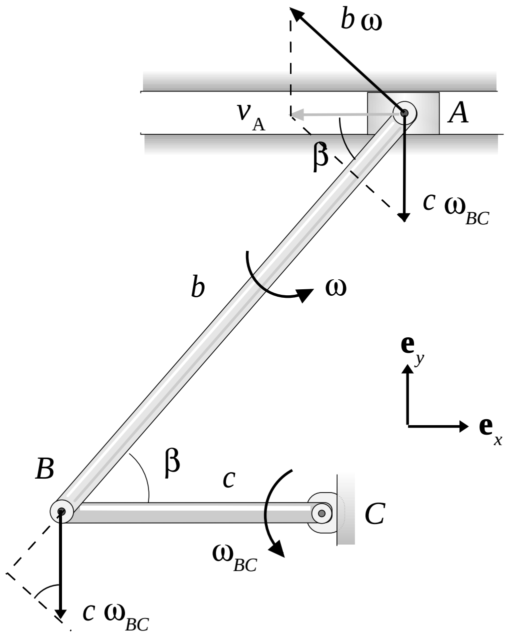



För det andra fallet utan tyngder räcker det med momentekvationen för trissan:

trissan $\curvearrowleft O$: $K \cdot R - K \cdot r = I\ddot{\theta}$ (8)

Om dragkraften $K = mg$ fås resultatet

$$\underline{\underline{\ddot{\theta} = \frac{mg(R - r)}{I}}}$$




Antag att vinkelhastigheten för $AB$ är $\omega$. Hastigheten för ändpunkten $B$ är känd:

$$\mathbf{v}_B = -c\omega_{BC}\mathbf{e}_y$$

För punkterna $A$ och $B$ gäller sambandsformeln

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{BA} \qquad (1)$$

Detta samband, att hastigheten i $A$ består av två delar visas i figuren. Sambandsformeln i komponentform blir:

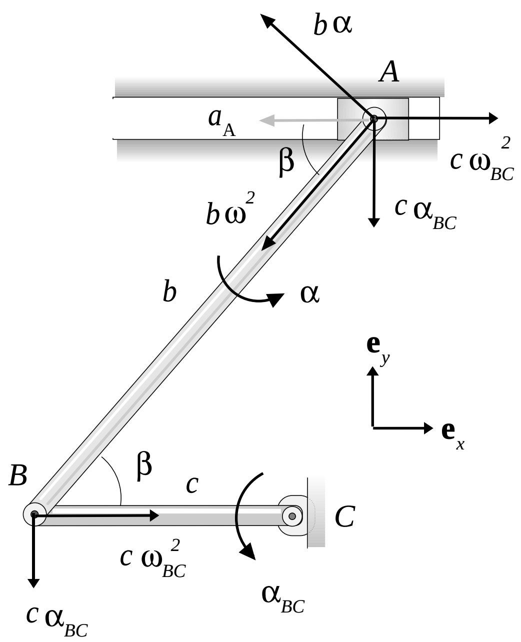
$$\leftarrow: \quad v_A = 0 + b\omega\sin\beta \qquad (2)$$

$$\downarrow: \quad 0 = c\omega_{BC} - b\omega\cos\beta \qquad (3)$$

Ekv (3) och (2) ger

$$\omega = \frac{c}{b\cos\beta}\omega_{BC} \qquad (4)$$

$$\underline{\underline{v_A = c\tan\beta\,\omega_{BC}}} \qquad (5)$$




$B$ har en cirkelrörelse kring $C$, så att accelerationen för ändpunkten $B$ är då

$$\mathbf{a}_B = c\omega_{BC}^{\ 2}\mathbf{e}_x - c\alpha_{BC}\mathbf{e}_y \qquad (6)$$

Sambandsformeln för accelerationer:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{BA}) \qquad (7)$$

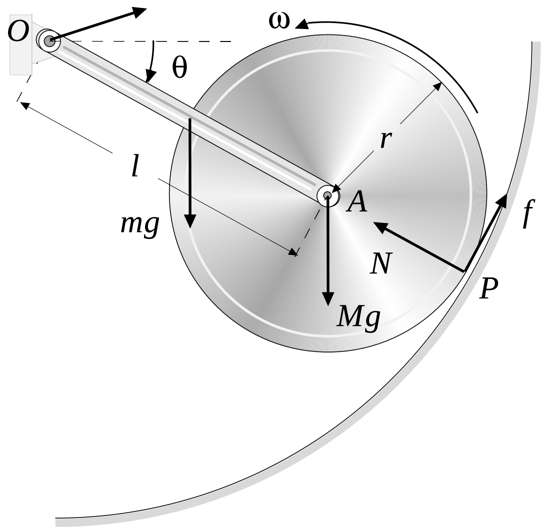
kan projiceras i stången $BC$:s riktning (ett sätt att direkt eliminera $\alpha$)

$$a_A\cos\beta = c\alpha_{BC}\sin\beta - c\omega_{BC}^{\ 2}\cos\beta + b\omega^2 \qquad (8)$$

$$a_A = c\alpha_{BC}\tan\beta - c\omega_{BC}^{\ 2} + \frac{b}{\cos\beta}\omega^2 \qquad (9)$$

Insättning av sambandet (4) ger

$$\underline{\underline{a_A = c\alpha_{BC}\tan\beta + c\omega_{BC}^{\ 2}\left(\frac{c}{b\cos^3\beta} - 1\right)}}$$




Frilägg systemet cirkelskiva + stång! Förutom tyngdkrafterna $mg$ och $Mg$ verkar en kontaktkraft $N$ och $f$ samt en reaktionskraft vid $O$. Frågeställningen gäller vinkelhastigheten som funktion av läget, vilket betyder att en energilag borde kunna ge resultatet direkt.

Eftersom reaktionskraften vid $O$ (fix angreppspunkt) och kontaktkraften vid $P$ (momentancentrum) inte gör något arbete är hela systemet konservativt och den mekaniska energin bevaras:

$$T+V=T_0+V_0 \tag{1}$$

Kinetiska energin för stången, som roterar kring fix axel, är i ett godtyckligt läge

$$T^{stång}=\frac{1}{2}I_O^{stång}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2=\frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

Kinetiska energin för cirkelskivan, vars momentancentrum är kontaktpunkten $P$, kan skrivas (Steiners sats används)

$$T^{skiva}=\frac{1}{2}I_P^{skiva}\omega^2=\frac{1}{2}\left(I_A^{skiva}+Mr^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{Mr^2}{2}+Mr^2\right)\omega^2=\frac{3Mr^2}{4}\omega^2 \tag{3}$$

Punkten $A$ har en cirkelrörelse kring $O$ så att farten är $v_A=l\dot{\theta}$. Då $P$ är momentancentrum kan farten också skrivas $v_A=r\omega$. Detta ger skivans vinkelhastighet

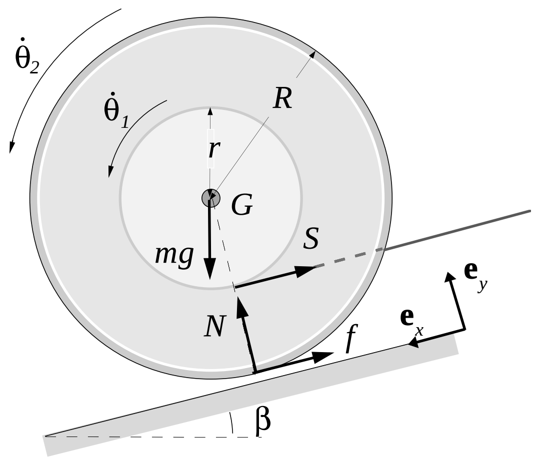
$$\omega=\frac{l}{r}\dot{\theta} \tag{4}$$

Insättning av (2), (3) och (4) i energilagen (1) ger

$$\frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2+\frac{3Mr^2}{4}\omega^2-mg\frac{l}{2}\sin\theta-Mgl\sin\theta=0+0+0+0 \tag{5}$$

$$\frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2+\frac{3Mr^2}{4}\frac{l^2}{r^2}\dot{\theta}^2-\left(\frac{m}{2}+M\right)gl\sin\theta=0 \tag{6}$$

$$\underline{\underline{\dot{\theta}=\sqrt{\left(\frac{6m+12M}{2m+9M}\right)\frac{g}{l}\sin\theta}}}$$




Frilägg cylindrarna! Betrakta innerrullen som en kropp och båda ytterrullarna som en kropp. Förutom tyngdkrafterna $m_1 g$ och $m_2 g$ (tillsammans $mg$) verkar trådkraften $S$ och en kontaktkraft i kontaktpunkten. Om innerrullen friläggs verkar en rektionskraft i centrum från ytterrullarna. Ytterrullarna påverkas av en lika stor och motriktad kraft.

Antag att vinkelaccelerationen för innerrullen är $\ddot{\theta}_1$ moturs! På samma sätt antas att ytterrullarna har vinkelaccelerationen $\ddot{\theta}_2$ moturs.

Krafterna *mellan* kropparna kan elimineras direkt genom att vi ställer upp kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ för hela systemet och momentekvationerna $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ med avseende på masscentrum för de båda kropparna. I komponentform fås

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Hela | $\mathbf{e}_x$ | : | $mg\sin\beta - S - f = m\ddot{x}_G$ | (1) |
| Hela | $\mathbf{e}_y$ | : | $N - mg\cos\beta = 0$ | (2) |
| Innerrulle | $\circlearrowleft G$ | : | $S \cdot r = \dfrac{m_1 r^2}{2}\ddot{\theta}_1$ | (3) |
| Ytterrulle | $\circlearrowleft G$ | : | $f \cdot R = \dfrac{m_2 R^2}{2}\ddot{\theta}_2$ | (4) |

Kinematiksambandet är $$\ddot{x}_G = r\ddot{\theta}_1 = R\ddot{\theta}_2 \qquad (5)$$

Om ekv (5) sätts in i ekv (4) så fås $$\ddot{x}_G = \frac{2}{m_2} f$$

Om ekv (5) sätts in i ekv (3) så fås $$S = \frac{m_1 r}{2}\ddot{\theta}_1 = \frac{m_1}{2}\ddot{x}_G = \frac{m_1}{m_2} f \qquad (6)$$

Insättning i ekv (1) ger

$$mg\sin\beta - \frac{m_1}{m_2} f - f = \frac{2m}{m_2} f \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{m_2}{2m + m_1 + m_2} mg\sin\beta \qquad (7)$$

Normalkraften bestäms ur ekv (2). Det friktionstal som krävs är alltså

$$\mu = \frac{f}{N} = \frac{m_2}{2m + m_1 + m_2}\tan\beta \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mu = \frac{m_2}{3(m_1 + m_2)}\tan\beta}}$$