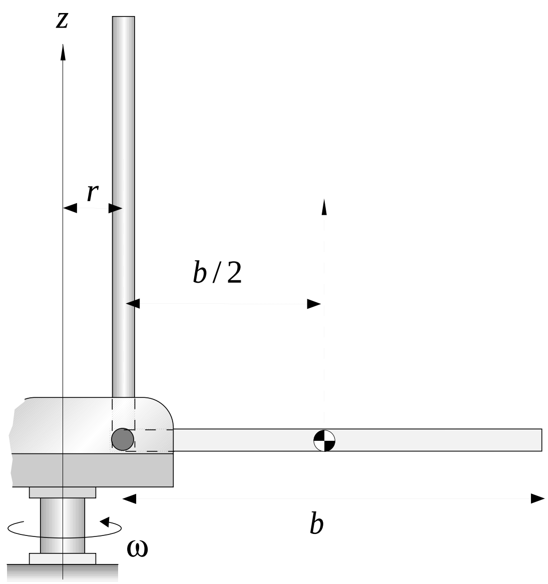


Att systemet roterar helt fritt betyder att det inte påverkas av något yttre kraftmoment i rotationsaxelns rikt-ning. Lägg en z-axel längs rotations-axeln!

Projicera momentekvationen

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{1}$$

på z-axeln:

$$M_z = \dot{H}_z \tag{2}$$

Här är det yttre kraftmomentet noll:

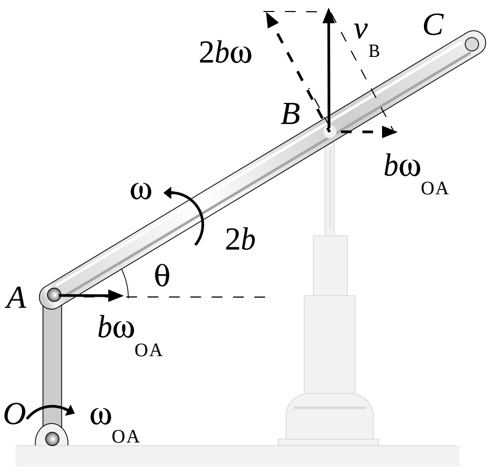
$$M_z = 0 \qquad \Rightarrow \quad \dot{H}_z = 0$$

$$\Rightarrow \qquad H_z = I^{\text{system}}\omega = \text{rörelsekonstant} \tag{3}$$

Rörelsemängdsmomentet från början är alltså lika med rörelsemängds-momentet i slutläget. Det återstår att bestämma tröghetsmomentet för hela systemet. I begynnelseläget kan för denna beräkning varje stångs massa sägas vara koncentrerad i en punkt på avståndet r från axeln. För slutläget bestäms tröghetsmomentet för stången med Steiners sats. Insättning i ekv (3) ger då

$$\left(I_1 + 2mr^2\right)\omega_0 = \left\{ I_1 + 2\left[\underbrace{\frac{mb^2}{12} + m\left(\frac{b}{2} + r\right)^2}_{\text{STEINERS SATS}} \right] \right\}\omega_1 \tag{4}$$

$$\omega_1 = \frac{I_1 + 2mr^2}{I_1 + 2\left[\dfrac{mb^2}{12} + m\left(\dfrac{b}{2} + r\right)^2\right]}\,\omega_0$$



Antag att både vinkelhastigheten ω och vinkelaccelerationen α för stången AC är riktade moturs. Vinkeln θ är känd men vi behåller beteckningen i lösningen för att göra den tydligare. Låt x-axeln vara horisontell och y-axeln vertikal.

För punkterna A och B i stången AC gäller sambandsformeln

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \tag{1}$$

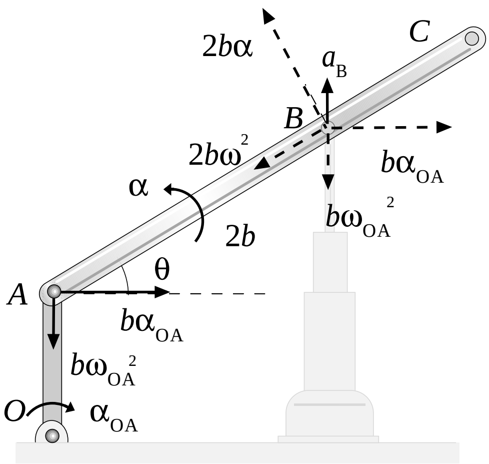
som i komponentform blir:

$$\rightarrow: \quad 0 = b\omega_{OA} - 2b\omega \sin\theta \tag{2}$$

$$\uparrow: \quad v_B = 0 + 2b\omega \cos\theta \tag{3}$$

Ekv (3) ger
$$\omega = \frac{v_B}{2b\cos\theta} \tag{4}$$

Insättning i ekv (2) ger då $\omega_{OA} = 2\omega \sin\theta$ eller $\omega_{OA} = \frac{v_B}{b}\tan\theta$ (5)



Då punkten A har en cirkelrörelse vet vi att centripetalaccelerationen är

$$a_{Ay} = -b\omega_{OA}^2 \tag{6}$$

Den tangentiella accelerationen är

$$a_{Ax} = b\alpha_{OA} \tag{7}$$

Sambandsformeln för accelerationer

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \tag{8}$$

blir då i komponentform:

$$\rightarrow: \quad 0 = b\alpha_{OA} - 2b\alpha \sin\theta - 2b\omega^2 \cos\theta \tag{9}$$

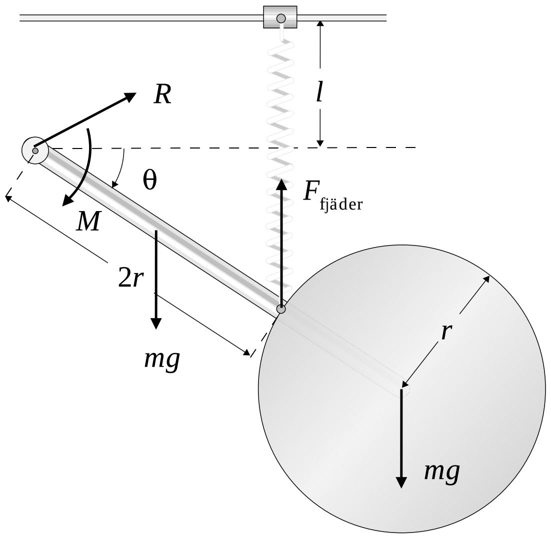
$$\uparrow: \quad a_B = -b\omega_{OA}^2 + 2b\alpha \cos\theta - 2b\omega^2 \sin\theta \tag{10}$$

För att bestämma α behövs bara ekvation (10). Ekv (9) ger sedan α_{OA}.
Sätt in (4) och (5) i ekv (10)!

$$a_B = -b\left(\frac{v_B}{b}\tan\theta\right)^2 + 2b\alpha\cos\theta - 2b\left(\frac{v_B}{2b\cos\theta}\right)^2 \sin\theta \tag{11}$$

Insättning av $\theta = 30°$ och förenkling ger

$$\underline{\underline{\alpha = \frac{1}{b\sqrt{3}}\left[a_B + \frac{2v_B^2}{3b}\right]}}$$



Att bestämma farten som funktion av läget betyder att man bör sikta in sig på en lösningsmetod som utnyttjar ett arbete-energisamband.

Frilägg kroppen! Den påverkas av två tyngdkrafter mg, fjäderkraften, reaktionskraften vid axeln samt kraftparsmomentet M. Reaktionskraften gör inget arbete, ty angreppspunkten är fix. Vi ställer upp lagen arbetet :

$$U = T - T_0 \tag{1}$$

Kraftparsmomentet gör arbetet $U_{\text{kraftpar}} = \int M \mathrm{d}\theta = M\theta$ (2)

Tyngdkrafterna gör arbetet $U_{\text{tyngdkraft}} = mg \cdot r \sin\theta + mg \cdot 3r \sin\theta$ (3)

Fjäderkraften gör arbetet $U_{\text{fjäder}} = -\frac{1}{2} k \cdot (2r \sin\theta)^2$ (4)

Kroppens kinetiska energi är $T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(I_O^{\text{stång}} + I_O^{\text{skiva}}\right)\dot{\theta}^2$ (5)

Tröghetsmomenten är $I_O^{\text{stång}} = \frac{m(2r)^2}{3} = \frac{4mr^2}{3}$ (6)

$$I_O^{\text{skiva}} = I_G^{\text{skiva}} + m(3r)^2 = \frac{mr^2}{2} + 9mr^2 = \frac{19mr^2}{2} \tag{7}$$

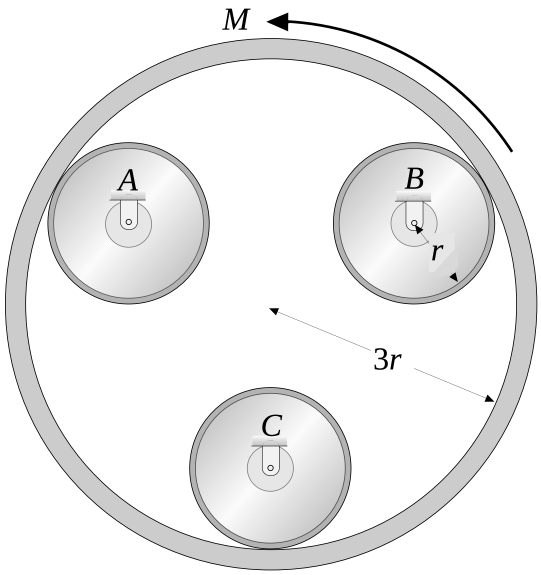
$$I_O = I_O^{\text{stång}} + I_O^{\text{skiva}} = \frac{65mr^2}{6} \tag{8}$$

Kroppens kinetiska energi är $T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{65}{6} mr^2 \dot{\theta}^2$ (9)

Insättning i lagen om arbetet ekv(1) ger

$$M\theta + 4mgr\sin\theta - 2kr^2 \sin^2\theta = \frac{65}{12} mr^2 \dot{\theta}^2 \tag{10}$$

$$\underline{\underline{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{12\left(M\theta + 4mgr\sin\theta - 2kr^2\sin^2\theta\right)}{65mr^2}}}}$$



Om man frilägger kugghjulen och kuggkransen framkommer kontaktkrafterna. Dessa gör tillsammans inget arbete, ty: Reaktionskraften på kugghjulets centrum A har en fix angreppspunkt. Kontaktkrafterna mellan kugghjul och kuggkrans är enligt lagen om verkan och motverkan lika stora och motriktade så att de tillsammans inte bidrar till arbetet. För tyngdkrafterna gäller också att angreppspunkterna är fixa.

Frågeställningen gäller vinkelaccelerationen. Den kan bestämmas med momentekvationer eller effektlagen. Här ges en lösning med effektlagen. Det är ju också möjligt att använda en energilag och sedan tidsderivera den.

Lagen om effekten: $$P = \dot{T} \tag{1}$$

Endast kraftparsmomentet M bidrar till effekten:

$$M\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\cdot 2m(3r)^2\dot{\theta}^2 + 3\cdot\frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2\right] \tag{2}$$

Första termen i högerledet är den tunna kuggkransens rörelseenergi, den andra termen motsvarar rörelseenergin för de tre kugghjulen, för vilka vinkelhastigheten är $\dot{\varphi}$. Eftersom hastigheten för kontaktpunkten i kuggkrans respektive kugghjul måste vara lik är kinematiksambandet

$$3r\dot{\theta} = r\dot{\varphi} \tag{3}$$

Insättning av (3) i effektlagen (2) ger

$$M\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[9mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{27}{4}mr^2\dot{\theta}^2\right] \tag{4}$$

$$M\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{63}{4}mr^2\dot{\theta}^2\right) \quad \Rightarrow \quad M\dot{\theta} = \frac{63}{2}mr^2\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{63}{2}mr^2\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\ddot{\theta} = \frac{2M}{63mr^2}}}$$