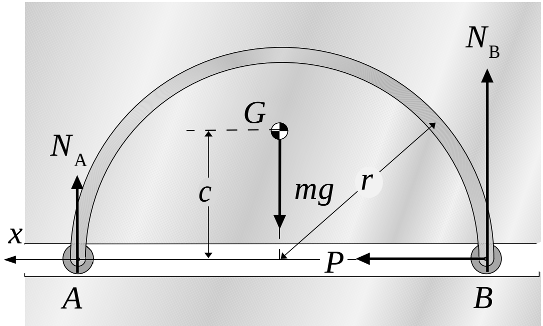


Frilägg halvcirkelbågen! Verkande krafter är dragkraften P, tyngdkraften mg och normalkrafterna N_A och N_B. Accelerationen bestäms av kraftekvationen medan momentekvationen måste användas för att bestämma de två normalkrafterna.

Lägg en x-axel längs spåret med positiv riktning åt vänster. Ställ upp komponenterna av kraftekvationen och momentekvationen:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \qquad \leftarrow: \quad P = m\ddot{x}_G \tag{1}$$

$$\uparrow: \quad N_A + N_B - mg = 0 \tag{2}$$

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad \circlearrowleft G: \quad r\cdot(N_B - N_A) - c\cdot P = I_G\ddot{\theta} \tag{3}$$

Ekv (1) ger direkt accelerationen

$$\underline{\underline{\ddot{x}_G = \frac{P}{m}}} \tag{4}$$

Vinkelaccelerationen $\ddot{\theta} = 0$. Ekvation (2) och (3) kan då skrivas

$$N_A + N_B = mg \tag{5}$$

$$N_B - N_A = \frac{c}{r}P \tag{6}$$

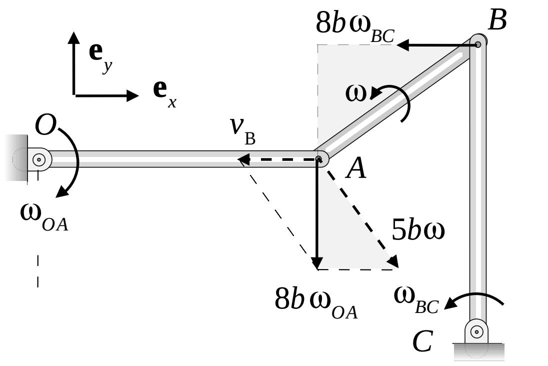
Vi vet masscentrums läge $c = \dfrac{2r}{\pi}$. Addition av ekvationerna (5) och (6) ger

$$2N_B = mg + \frac{2}{\pi}P \tag{7}$$

Resultatet är alltså

$$\underline{\underline{N_A = \frac{mg}{2} - \frac{P}{\pi}}} \;; \qquad \underline{\underline{N_B = \frac{mg}{2} + \frac{P}{\pi}}}$$

som visar att om $P = \dfrac{\pi}{2}mg$ så blir $N_A = 0$.



Stängerna OA och BC roterar kring fixa punkter. Hastigheterna för ändpunkterna är därför

$$\mathbf{v}_A = -8b\omega_{OA}\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{v}_B = -8b\omega_{BC}\mathbf{e}_x$$

För punkterna A och B gäller sambandsformeln

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA} \qquad (1)$$

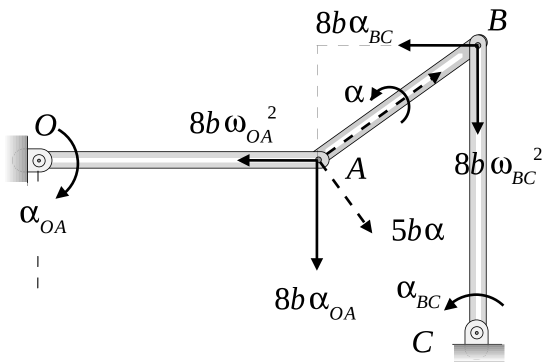
Vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ antas vara riktad utåt, alltså moturs rotation.

De två markerade trianglarna är likformiga (med sidförhållandet 3 : 4 : 5) och detta utnyttjas då komponenterna av den sista termen i ekv (1) skall bestämmas. Sambandsformeln i komponentform blir då:

$$\leftarrow: \quad 0 = 8b\omega_{BC} - 3b\omega \qquad (2)$$
$$\downarrow: \quad 8b\omega_{OA} = 0 + 4b\omega \qquad (3)$$

Ekv (3) ger $\qquad \omega = 2\omega_{OA} \qquad (4)$

Ekv (2) ger då $\qquad \omega_{BC} = 3\omega_{OA}/4 \qquad (5)$



Accelerationerna för ändpunkterna är

$$\mathbf{a}_A = -8b\omega_{OA}^2\mathbf{e}_x - 8b\alpha_{OA}\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{a}_B = -8b\alpha_{BC}\mathbf{e}_x - 8b\omega_{BC}^2\mathbf{e}_y$$

Sambandsformeln för accelerationer:

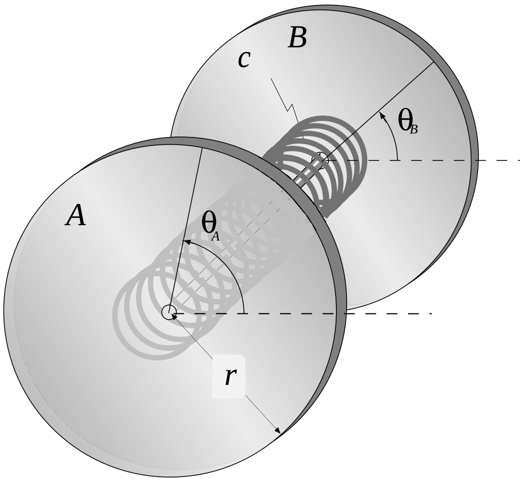
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}) \qquad (6)$$

blir i komponentform

$$\leftarrow: \quad 8b\omega_{OA}^2 = 8b\alpha_{BC} - 3b\alpha - 4b\omega^2 \qquad (7)$$
$$\downarrow: \quad 8b\alpha_{OA} = 8b\omega_{BC}^2 + 4b\alpha - 3b\omega^2 \qquad (8)$$

Ekv (8) ger vinkelaccelerationen $\qquad \alpha = 2\alpha_{OA} - 2\omega_{BC}^2 + \dfrac{3}{4}\omega^2$

Insättning av (4) och (5) ger $\qquad \underline{\underline{\alpha = 2\alpha_{OA} + \dfrac{15}{8}\omega_{OA}^2}}$



Begynnelsevillkoret är

$$t=0 \quad \begin{cases} \theta_A = -\pi \\ \theta_B = \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\theta}_A = 0 \\ \dot{\theta}_B = 0 \end{cases}$$

När skivorna släpps från detta läge kommer skivan A till en början att ha en positiv vinkelhastighet (moturs). Torsionsfjädern ger ett återförande kraftmoment på båda skivorna. Om vi betraktar hela systemet finns det inget yttre kraftmoment i axelriktningen, som vi låter vara z-axeln.

Om det yttre kraftmomentet på hela systemet är noll med avseende på z-axeln måste det totala rörelsemängdsmomentet vara konstant. Eftersom starten är från vila är rörelsemängdsmomentet noll:

$$M_z = \dot{H}_z \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \dot{H}_z \qquad \Rightarrow \qquad H_z = \text{konstant} = 0 \tag{1}$$

$$I_A\dot{\theta}_A + I_B\dot{\theta}_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta}_B = -\frac{I_A}{I_B}\dot{\theta}_A \tag{2}$$

Torsionsfjädern ger ett kraftmoment och en potential som beräknas på samma sätt som för en vanlig fjäder:

$$V = \frac{1}{2}c\left(\theta_A - \theta_B\right)^2 \tag{3}$$

Eftersom torsionskraftmomentet är det enda som påverkar rörelsen kan vi ställa upp lagen om mekaniska energins bevarande:

$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \tag{4}$$

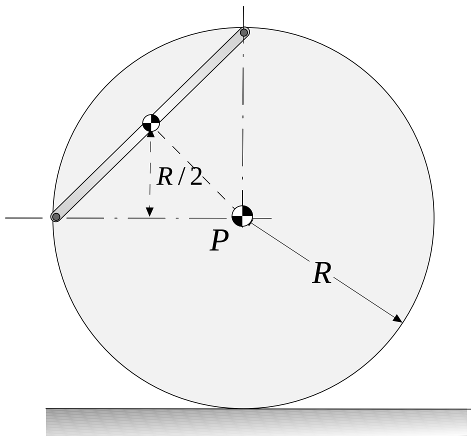
Insättning ger

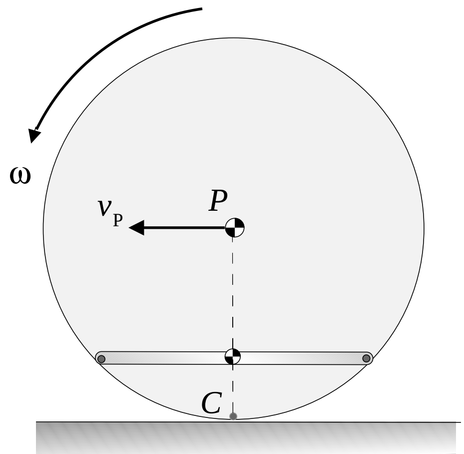
$$\frac{1}{2}I_A\dot{\theta}_A^{\,2} + \frac{1}{2}I_B\dot{\theta}_B^{\,2} + \frac{1}{2}c\,0^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}c\left(-\pi-\pi\right)^2 \tag{5}$$

Eliminera $\dot{\theta}_B$ med sambandet (2)

$$\frac{1}{2}I_A\dot{\theta}_A^{\,2} + \frac{1}{2}I_B\left(\frac{I_A}{I_B}\dot{\theta}_A\right)^2 = 2\pi^2 c \qquad \Rightarrow \tag{6}$$

$$\left(1+\frac{I_A}{I_B}\right)I_A\dot{\theta}_A^{\,2} = 4\pi^2 c \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\dot{\theta}_A = 2\pi\sqrt{\frac{c\,I_B}{I_A\left(I_A+I_B\right)}}}}$$





Yttre krafter är tyngdkraft och kontaktkraft. Kontaktkraften gör inget arbete vid rullning, eftersom kontaktpunkten (angreppspunkten) är momentancentrum och saknar hastighet. Tyngdkraften är alltså den enda kraft som gör arbete.
Systemet är därför konservativt och den mekaniska energin bevaras. Det betyder att förändringen i kinetisk energi är densamma som förändringen i potentiell energi.

$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \tag{1}$$

Den kinetiska energin kan skrivas antingen som de två delarna eller med användning av momentancentrum C:

$$T = \frac{1}{2} I_C \omega^2 \tag{2}$$

Insättning i lagen om mekaniska energins bevarande (1) ger

$$\frac{1}{2} I_C \omega^2 - m_1 g \frac{R}{\sqrt{2}} = 0 + m_1 g \frac{R}{2} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{2 m_1 g}{I_C}\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$$

Rullning innebär att $v_P = R\omega$

$$\Rightarrow \qquad v_P = R\sqrt{\frac{m_1 g R}{I_C}\left(1+\sqrt{2}\right)} \tag{4}$$

Tröghetsmomentet är

$$\begin{aligned} I_C &= I_C^{\text{stång}} + I_C^{\text{cylinder}} \\ &= \left[\frac{m_1\left(R\sqrt{2}\right)^2}{12} + m_1\left(R - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\right] + \left[\frac{mR^2}{2} + mR^2\right] \qquad (5) \\ &= m_1\left(\frac{2}{3}R^2 + R^2 - \frac{2R^2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{2} mR^2 \end{aligned}$$

Insättning ger

$$\underline{\underline{v_P = \sqrt{\frac{6\left(1+\sqrt{2}\right) m_1 g R}{m_1\left(10 - 6\sqrt{2}\right) + 9m}}}}$$