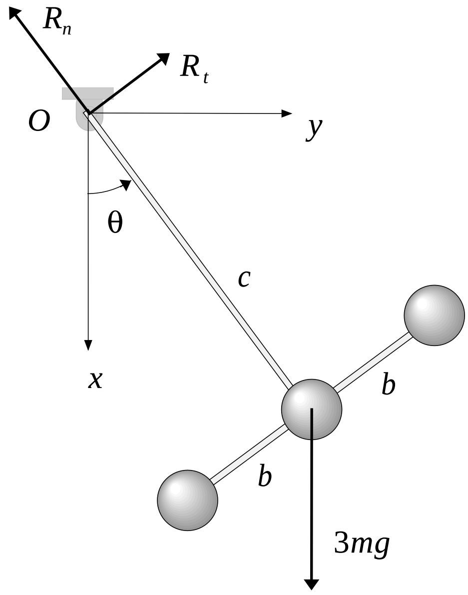


En stel kropp roterar kring en fix axel O. Masscentrum G för hela kroppen ligger på avståndet c från O. De krafter som påverkar kroppen är tyngdkraften och reaktionskraften i upphängningspunkten

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ i naturliga komponenter skrivs

$$\mathbf{e}_t : \quad R_t - 3mg\sin\theta = 3mc\ddot{\theta} \tag{1}$$

$$\mathbf{e}_n : \quad R_n - 3mg\cos\theta = 3mc\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

Vi måste alltså bestämma $\ddot{\theta}$ och $\dot{\theta}^2$ som funktion av vinkeln θ.

Momentekvationen med avseende på rotationsaxeln $M_z = \dot{H}_z$ blir :

$$-3mgc\sin\theta = I_O\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{3mgc}{I_O}\sin\theta \tag{3}$$

Lagen om mekaniska energins bevarande $T + V = T_0 + V_0$ ger

$$\frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 - 3mgc\cos\theta = 0 - 3mgc\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{6}{I_O}mgc\cos\theta \tag{5}$$

Insättning i (1) och (2) ger

$$R_t = \left(1 - \frac{3mc^2}{I_O}\right)3mg\sin\theta \tag{6}$$

$$R_n = \left(1 + \frac{6mc^2}{I_O}\right)3mg\cos\theta \tag{7}$$

Bestämning av tröghetsmomentet:

Kulorna är små och kan behandlas som partiklar. Tröghetsmomentet blir:

$$I_O = mc^2 + 2m\left(b^2 + c^2\right) = m\left(2b^2 + 3c^2\right) \tag{8}$$

Insättning ger

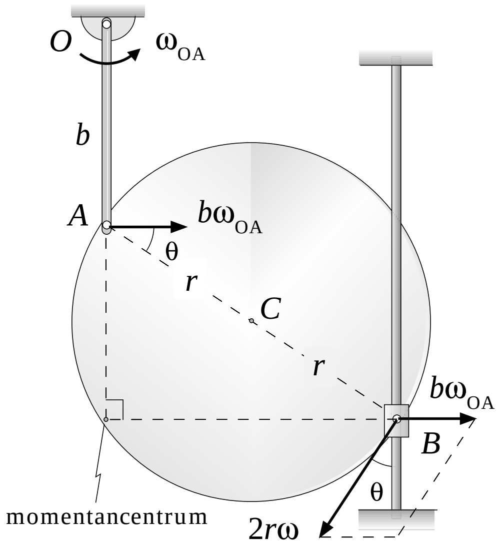
$$R_t = \frac{6b^2}{2b^2 + 3c^2}mg\sin\theta$$

$$R_n = \frac{2b^2 + 9c^2}{2b^2 + 3c^2} \cdot 3mg\cos\theta$$

I nedersta läget är alltså reaktionskraften uppåtriktad med storlek

$$\underline{\underline{R_n = \frac{2b^2 + 9c^2}{2b^2 + 3c^2}3mg}}$$

Resultatet kan för $b = 0$ jämföras med resultatet för en partikelpendel.



För punkterna A och B på cirkelskivan gäller sambandsformeln:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \tag{1}$$

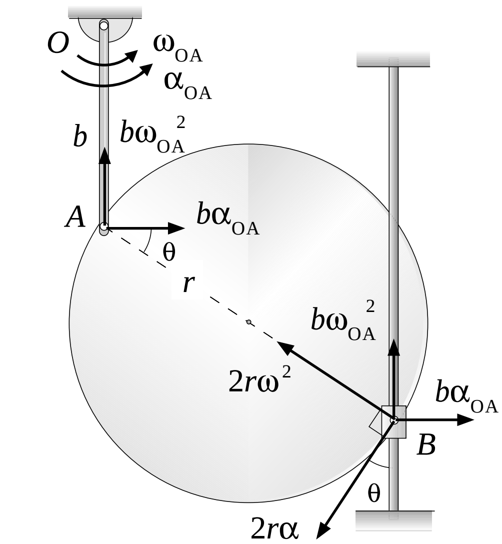
Vi antar att vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ är riktad inåt, vilket motsvar medurs rotation. Eftersom hastigheten för B är vertikal och hastigheten för A i det givna ögonblicket är horisontell fås komponentekvationerna

$$\rightarrow: \quad 0 = b\omega_{OA} - 2r\omega \cdot \sin\theta \tag{2}$$

$$\uparrow: \quad v_B = 0 - 2r\omega \cdot \cos\theta \tag{3}$$

Ekv (2) ger

$$\omega = \frac{b}{2r\sin\theta}\ \omega_{OA} \tag{4}$$



För punkterna A och B på cirkelskivan gäller också sambandsformeln för accelerationer:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \tag{5}$$

A har en cirkelrörelse kring den fixa punkten O så att dess acceleration är känd. Accelerationen för B består av A:s acceleration plus den acceleration som B skulle haft om den hade en cirkelrörelse kring A.

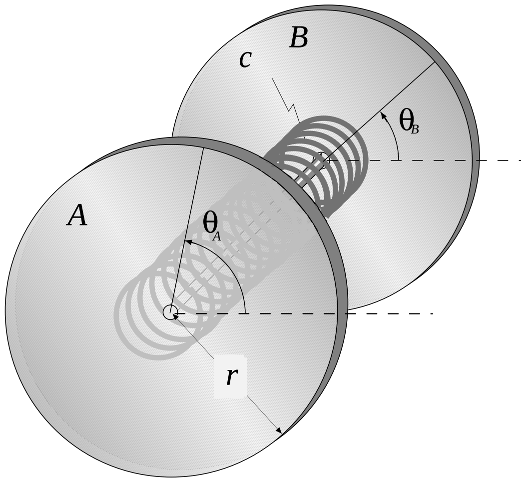
Sambandsformeln blir i komponentform

$$\rightarrow: \quad 0 = b\alpha_{OA} - 2r\alpha\sin\theta - 2r\omega^2\cos\theta \tag{6}$$

$$\uparrow: \quad a_B = b\omega_{OA}{}^2 - 2r\alpha\cos\theta + 2r\omega^2\sin\theta \tag{7}$$

Ekv (6) ger vinkelaccelerationen

$$\alpha = \frac{b\alpha_{OA} - 2r\omega^2\cos\theta}{2r\sin\theta}$$



Begynnelsevillkoret är

$$t = 0 \quad \begin{cases} \theta_A = -\pi \\ \theta_B = \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\theta}_A = 0 \\ \dot{\theta}_B = 0 \end{cases}$$

När skivorna släpps från detta läge kommer skivan A till en början att ha en positiv vinkelhastighet (moturs). Torsionsfjädern ger ett återförande kraftmoment på båda skivorna. Om vi betraktar hela systemet finns det inget yttre kraftmoment i axelriktningen, som vi låter vara z-axeln.

Om det yttre kraftmomentet på hela systemet är noll med avseende på z-axeln måste det totala rörelsemängdsmomentet vara konstant. Eftersom starten är från vila är rörelsemängdsmomentet noll:

$$M_z = \dot{H}_z \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \dot{H}_z \qquad \Rightarrow \qquad H_z = \text{konstant} = 0 \tag{1}$$

$$I_A \dot{\theta}_A + I_B \dot{\theta}_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta}_B = -\frac{I_A}{I_B} \dot{\theta}_A \tag{2}$$

Torsionsfjädern ger ett kraftmoment och en potential som beräknas på samma sätt som för en vanlig fjäder:

$$V = \frac{1}{2} c \, (\theta_A - \theta_B)^2 \tag{3}$$

Eftersom torsionskraftmomentet är det enda som påverkar rörelsen kan vi ställa upp lagen om mekaniska energins bevarande:

$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \tag{4}$$

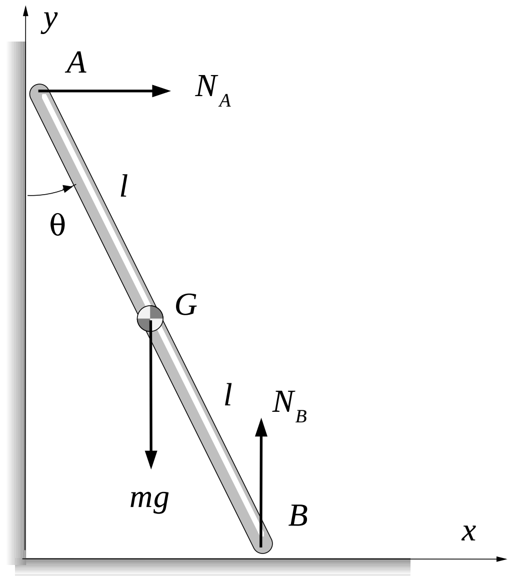
Insättning ger

$$\frac{1}{2} I_A \dot{\theta}_A^{\,2} + \frac{1}{2} I_B \dot{\theta}_B^{\,2} + \frac{1}{2} c \, 0^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} c \, (-\pi - \pi)^2 \tag{5}$$

Eliminera $\dot{\theta}_B$ med sambandet (2)

$$\frac{1}{2} I_A \dot{\theta}_A^{\,2} + \frac{1}{2} I_B \left(\frac{I_A}{I_B} \dot{\theta}_A \right)^2 = 2\pi^2 c \qquad \Rightarrow \tag{6}$$

$$\left(1 + \frac{I_A}{I_B} \right) I_A \dot{\theta}_A^{\,2} = 4\pi^2 c \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\dot{\theta}_A = 2\pi \sqrt{\frac{c \, I_B}{I_A (I_A + I_B)}}}}$$



Frilägg stången! Den påverkas av tyngdkraften mg samt normalkrafterna N_A och N_B.
Vi söker vinkelaccelerationen och den dyker upp i momentekvationen, som i sin tur innehåller de obekanta normalkrafterna. Lösningsmetoden blir då att kombinera kraftekvationen

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \tag{1}$$

och momentekvationen

$$\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G. \tag{2}$$

I komponentform fås

$$\rightarrow: \quad N_A = m\ddot{x}_G \tag{3}$$

$$\uparrow: \quad N_B - mg = m\ddot{y}_G \tag{4}$$

$$\circlearrowleft G: \quad N_B \cdot l\,\sin\theta - N_A \cdot l\,\cos\theta = I_G \cdot \ddot{\theta} \tag{5}$$

Med kinematiksamband kan vi eliminera $\ddot{x}_G$ och $\ddot{y}_G$:

$$x_G = l\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_G = l\cos\theta\cdot\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_G = -l\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta} \tag{6}$$

$$y_G = l\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_G = -l\sin\theta\cdot\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}_G = -l\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 - l\sin\theta\cdot\ddot{\theta} \tag{7}$$

Sätt först in dessa samband i (3) och (4)! Sätt därefter in ekv (3) och (4) i ekv (5)!

$$mgl\sin\theta + m\left(-l\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 - l\sin\theta\cdot\ddot{\theta}\right)l\sin\theta - m\left(-l\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta}\right)l\cos\theta = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}$$

De två $\dot{\theta}^2$-termerna försvinner. Förenkling ger

$$mgl\sin\theta = \left[\frac{ml^2}{3} + ml^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\right]\ddot{\theta}$$

"Trigonometriska ettan" ger då resultatet

$$\underline{\underline{\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l}\sin\theta}}$$

Resultatet kan (på ett enklare sätt) också fås genom att ställa upp en energilag och tidsderivera den. Masscentrum rör sig i en cirkelbana med radien l. Detta kan också utnyttjas för att bestämma dess hastighet och acceleration.