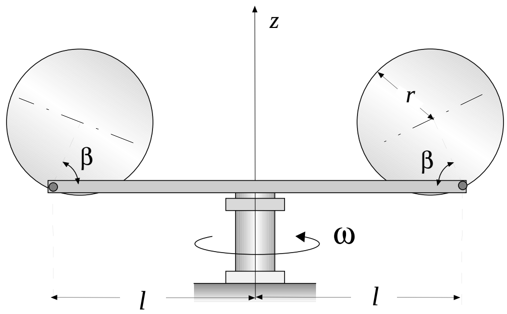


Att systemet roterar helt fritt betyder att det inte påverkas av något yttre kraftmoment i rotationsaxelns riktning. Lägg en z-axel längs rotationsaxeln!

Projicera momentekvationen

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{1}$$

på z-axeln:

$$M_z = \dot{H}_z \tag{2}$$

Betrakta hela systemet! Här är det yttre kraftmomentet M_z noll:

$$M_z = 0 \qquad \Rightarrow \quad \dot{H}_z = 0$$

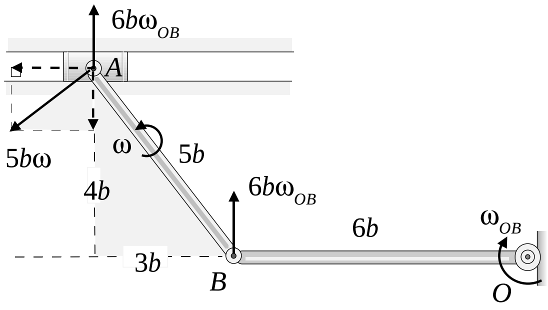
$$\Rightarrow \qquad H_z = I^{\text{system}}\omega = \text{rörelsekonstant} \tag{3}$$

Denna komponent av rörelsemängdsmomentet från början är alltså lika med rörelsemängdsmomentet i ett slutläge. Det återstår nu att bestämma tröghetsmomentet för hela systemet. Tröghetsmomentet för en cirkelskiva med avseende på centrumaxeln vinkelrät emot skivan är $mr^2/2$. Tröghetsmomentet med avseende på en diameter blir då, enligt satsen om tunn skiva, $mr^2/4$. Tröghetsmomentet med avseende på z-axeln fås sedan med Steiners sats.

$$2\cdot\left(\frac{mr^2}{4} + m(l-r)^2\right)\omega_0 = 2\cdot\left(\frac{mr^2}{4} + m(l-r\cos\beta)^2\right)\omega_1 \tag{4}$$

$$\omega_1 = \frac{\dfrac{mr^2}{4} + m(l-r)^2}{\dfrac{mr^2}{4} + m(l-r\cos\beta)^2}\,\omega_0 \tag{5}$$

$$\underline{\underline{\omega_1 = \frac{r^2 + 4(l-r)^2}{r^2 + 4(l-r\cos\beta)^2}\;\omega_0}}$$



Hastigheten för A är given.

$$\mathbf{v}_A = -v_A \mathbf{e}_x \tag{1}$$

Stången OB roterar kring en fix punkt. Hastigheten för ändpunkten är därför

$$\mathbf{v}_B = 6b\omega_{OB}\mathbf{e}_y \tag{2}$$

För punkterna A och B gäller sambandsformeln

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA} \qquad (3$$

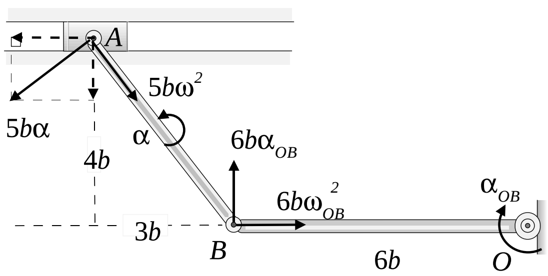
Vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ antas vara riktad utåt, alltså moturs rotation. De två markerade trianglarna är likformiga (med sidförhållandet 3 : 4 : 5) och detta utnyttjas då komponenterna av den sista termen i ekv (3) skall bestämmas. Sambandsformeln i komponentform blir då:

$$\leftarrow: \quad v_A = 0 + 4b\omega \tag{4}$$

$$\uparrow: \quad 0 = 6b\omega_{OB} - 3b\omega \tag{5}$$

Ekv (4) ger $\quad \omega = v_A / 4b \quad (6)$

Ekv (5) ger då $\quad \omega_{OB} = v_A / 8b \quad (7)$



Accelerationen för ändpunkten B är

$$\mathbf{a}_B = 6b\omega_{OB}{}^2\mathbf{e}_x + 6b\alpha_{OB}\mathbf{e}_y \tag{8}$$

Sambandsformeln för accelerationer:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}) \tag{9}$$

blir i komponentform

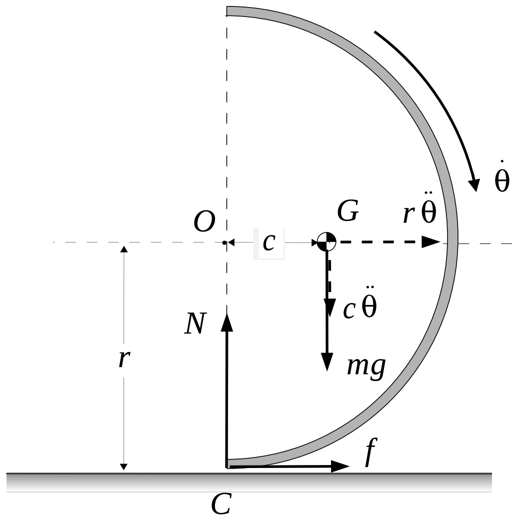
$$\leftarrow: \quad 0 = -6b\omega_{OB}{}^2 + 4b\alpha - 3b\omega^2 \tag{10}$$

$$\uparrow: \quad 0 = 6b\alpha_{OB} - 3b\alpha - 4b\omega^2 \tag{11}$$

Eliminera α genom att multiplicera ekv (10) med 3 och ekv (11) med 4 och därefter addera ekvationerna!

$$0 = -18b\omega_{OB}{}^2 + 24b\alpha_{OB} - 25b\omega^2 \tag{12}$$

Insättning av (4) och (5) ger $\quad \underline{\underline{\alpha_{OB} = \frac{59}{48}\frac{v_A{}^2}{16b^2}}}$



Efter friläggning av kroppen ser man att den påverkas av tyngdkraften och kontaktkraften. För att rullning skall gälla i första ögonblicket krävs ett minsta friktionstal $\mu_{\min}$, som motsvarar gränsfallet mot glidning. Detta gränsfall ges av friktionsvillkoret

$$\mu > \frac{f}{N} \tag{1}$$

Vi antar rullning, bestämmer för detta fall friktionskraft f och normalkraft N och sätter sedan in i friktionsvillkoret.

I det första ögonblicket har kroppen ingen vinkelhastighet. Om rullning gäller så är accelerationen för O $r\ddot{\theta}$. Accelerationen för masscentrum G fås då med sambandsformeln. Komponenterna är $r\ddot{\theta}$ och $c\ddot{\theta}$, se figur!

Halvcylinderskalets rörelse ges av kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ och momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$.

I komponentform fås

$$\rightarrow \ : \quad f = mr\ddot{\theta} \tag{2}$$

$$\downarrow \ : \quad -N + mg = mc\ddot{\theta} \tag{3}$$

$$G \curvearrowright \ : \quad N \cdot c - f \cdot r = I_G \ddot{\theta} \tag{4}$$

Tröghetsmomentet fås med Steiners sats:

$$I_G = I_O - mc^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_G = mr^2 - mc^2 \tag{5}$$

Multiplicera ekv (2) med r, ekv (3) med c och addera sedan de tre ekvationena (2)-(4). Resultatet blir

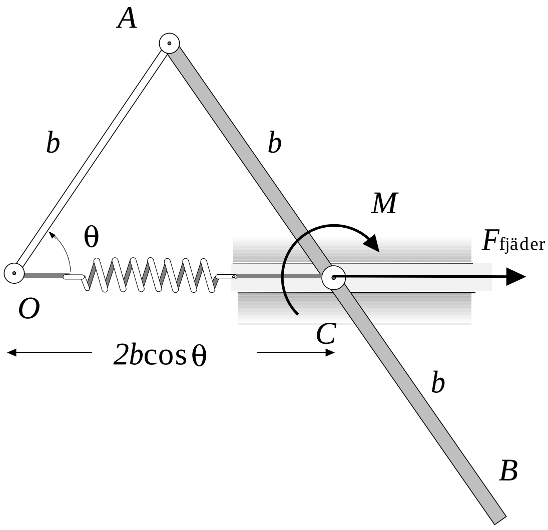
$$mgc = \left[mr^2 + mc^2 + m\left(r^2 - c^2\right)\right]\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\theta} = \frac{gc}{2r^2} \tag{6}$$

Insättes detta i ekv (2) och (3) fås krafterna

$$f = \frac{mgc}{2r} \qquad\qquad N = mg\left(1 - \frac{c^2}{2r^2}\right) \tag{7}$$

Det sökta friktionstalet är $\mu_{\min} = \dfrac{f}{N} \qquad \Rightarrow \qquad \mu_{\min} = \dfrac{rc}{2r^2 - c^2}$

Avståndet c är givet: $\quad c = \dfrac{2r}{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\mu_{\min} = \dfrac{\pi}{\pi^2 - 2}}}$



Problemformuleringen att bestämma vinkelhastighet som funktion av en lägeskoordinat innebär en lösningsmetod där man använder en energiekvation. Yttre krafter på stängerna är tyngdkraft och kontaktkraft vid C, fjäderkraften samt en reaktionskraft i O. Kraftparsmomentet M tillkommer. Arbete uträttas bara av fjäderkraften och kraftparsmomentet.

Lagen om arbetet säger att totala arbetet är lika med förändringen i kinetisk energi.

$$U = T - T_0 \tag{1}$$

Den kinetiska energin kan bestämmas med de två delarna: $T = \frac{1}{2} m v_G{}^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2$

För att få ett uttryck på masscentrums hastighet kan man skriva x-koordinaten och sedan tidsderivera:

$$x_C = 2b\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_C = -2b\sin\theta \cdot \dot{\theta} \tag{2}$$

Insättning i (1) ger

$$M\theta - \frac{1}{2}k(2b - 2b\cos\theta)^2 = \frac{1}{2}m\left(-2b\sin\theta \cdot \dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m(2b)^2}{12}\dot{\theta}^2 \tag{3}$$

$$M\theta - 2kb^2(1-\cos\theta)^2 = mb^2\left(2\sin^2\theta + \frac{1}{6}\right)\dot{\theta}^2 \tag{4}$$

$$\underline{\underline{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{6M\theta - 12kb^2(1-\cos\theta)^2}{mb^2\left(12\sin^2\theta + 1\right)}}}}$$