KTH Mekanik

Tentamen i SG1102, Mekanik mindre kurs, 2007-10-27

Lösningar till problemdelens uppgifter

KTH Mekanik
Fritz Bark

1. Kraftekvationerna

$$\mathbf{e}_r : m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -S + mg\cos\theta$$

$$\mathbf{e}_\theta : m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg\sin\theta$$

där S är snörspänningen, ger med $r = l$ och multiplikation av den andra ekvationen med $\dot{\theta}$

$$S = ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

$$l\dot{\theta}\ddot{\theta} = -g\dot{\theta}\sin\theta$$

I den sista av dessa ekvationer noterar man att $\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{\theta}^2}{2}$. Integration m.a.p. t ger att

$$l\dot{\theta}^2 = 2g\cos\theta + C$$

Integrationskonstanten C bestämmes ur villkoret

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{l}, \theta = 0$$

vilket ger att

$$l\dot{\theta}^2 = 2g(\cos\theta - 1) + \frac{v_0^2}{l}$$

Insättning i uttrycket för S ger likheten

$$S = mg(3\cos\theta - 2) + \frac{mv_0^2}{l}$$

Villkoret

$$S = mg, \theta = \frac{\pi}{2}$$

ger då att

$$v_0 = \sqrt{3gl} \Rightarrow S = (3\cos\theta + 1)mg$$

Snöret slaknar för $S = 0$, dvs. då $\theta = arccos(-\frac{1}{3})$.

2. Energiekvationen lyder i detta fall

$$\frac{m_0 v^2}{2} + \frac{k(\Delta l)^2}{2} = E$$

där den totala energin E är konstant och Δl är gummibandets förlängning. Då partikeln träffar gummibandet gäller att

$$v = v_0, \Delta l = 2a - a = a$$

Då partikeln befinner sig i vändläget, dvs, dess hastighet är momentant lika med noll,
Finner man, med hjälp av Pythagoras sats, att

$$v = 0, \Delta l = 2\sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{16}} - a = \frac{3a}{2}$$

Insättning i energiekvationen ger att

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{ka^2}{2} = 0 + \frac{9ka^2}{8}$$

dvs. $k = \dfrac{4mv_0^2}{5a^2}$.

3. Kraftekvationen lyder i detta fall

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

eller, i omskriven form,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 a \sin \omega t .$$

Den allmänna lösningen till denna ekvation är

$$x = A\cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \frac{a\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

där de två första termerna är lösningen till den homogena ekvationen. Den sista termen, partikulärlösningen, fås genom ansatsen

$$x = C \sin \omega t .$$

Konstanten C bestäms genom insättning i ekvationen. Eftersom de fria svängningarna dämpats ut sätter man $A=B=0$. Slutligen skall gälla att

$$\frac{a\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2} = 4a ,$$

vilket ger att

$$\omega = \frac{\sqrt{3}\omega_n}{2}$$

4. Till att börja med är snörspänningen $S = 2m_0 g$. Man finner då från kraftekvationen i $\mathbf{e}_r$ – led att

$$m_0 r_0 \omega_0^2 = 2m_0 g$$

dvs.

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{r_0}}$$

Under det att partikeln B sönderfaller är systemets rörelsemängdsmoment

$$H_{0z} = m_0 r^2 \dot{\theta}$$

m.a.p. en z-axel genom hålet och vinkelrät mot bordet konstant ty ingen av krafterna har något moment m.a.p. denna axel, se t.ex. exempel 10.7 i boken. Vi räknade det talet på en av föreläsningarna. Således gäller i det nya slutillståndet efter det att

$$r_0 \to r_1, \omega_0 \to \omega_1$$

följande samband

$$m_0 r_0^2 \omega_0 = m_0 r_1^2 \omega_1 .$$

Kraftekvationen ger i detta fall att

$$m_0 r_1 \omega_1^2 = m_0 g$$

Man finner från de två sista ekvationerna att

$$r_1 = 2^{1/3} r_0$$

$$\omega_1 = 2^{-2/3} \omega_0$$