KTH Mekanik

KTH Mekanik
Fritz Bark

Tentamen i SG1102, Mekanik mindre kurs, 2009-01-09

Inga hjälpmedel är tillåtna förutom penna och kautschuk. Rita tydliga figurer och definiera alla införda storheter. Om Du fastnar på en uppgift, gå vidare till nästa. Om Du inte lyckas lösa en uppgift ända fram till svaret, lämna ändå in Din uppställning av problemet, inklusive figur. Ett korrekt uppställt problem ger poäng. *Lycka till!*

Problemdel

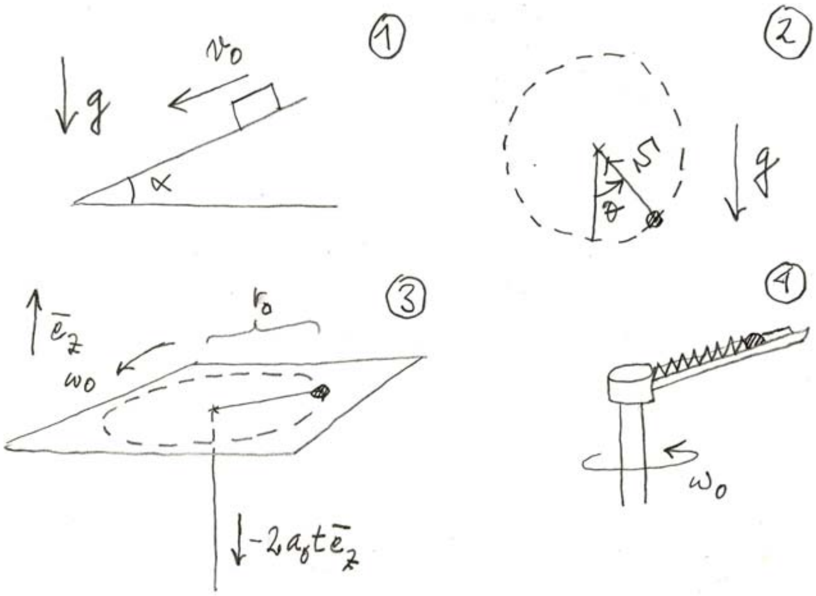
1. En liten kub, vars massa är m, kan glida på ett lutande plan. Friktionstalet mellan plan och kub är μ och planet lutar en vinkel α mot ett horisontalplan, se figur 1. Konstanterna α och μ uppfyller olikheten $\mu > \tan\alpha$. Tyngdaccelerationen är g. Kuben ges vid tiden $t = 0$ en hastighet v_0 nedåt på planet. Beräkna: I. När stannar kuben? II: Hur långt har kuben hunnit när den stannar? Ledning: Man kan, om man så vill, spara en del algebra genom att införa beteckningen $\lambda = -(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) > 0$.

2. En s.k. matematisk pendel består av en liten kropp, som är fäst i ett lätt snöre. Kroppens massa är m och snörets längd är l. Snörets fria ände hålls i en fix punkt och massan m rör sig i detta fall i en vertikal cirkelbana under inverkan av tyngdkraften mg och snörspänningen S, se figur 2. Bestäm snörspänningen S i pendelns översta läge $(\theta = \pi)$ om vinkelhastigheten $\dot{\theta} = \sqrt{6g/l}$ i cirkelbanans nedersta läge $(\theta = 0)$.

3. En liten kula med massan m kan röra sig friktionsfritt på ytan av ett horisontellt bord, se fig. 3. Kulan är fäst i en tråd, som löper genom ett litet hål i bordet. Trådens hålls till att börja med fix under bordet varvid kulan roterar runt hålet i en cirkelbana med radien r_0 med vinkelfrekvensen ω_0. Vid tiden $t = 0$ börjar en person (under bordet men utanför figuren) dra i tråden med hastigheten $-2a_0 t\mathbf{e}_z$ där a_0 är en konstant och enhetsvektorn $\mathbf{e}_z$ är riktad vertikalt uppåt. Beräkna trådkraften för $0 < t < \sqrt{r_0/a_0}$.

4. Betrakta ett glatt horisontellt halvrör, som roterar med den konstanta vinkelhastigheten ω_0 kring en vertikal axel. I röret ligger en partikel, vars massa är m, och en lätt fjäder, vars fjäderkonstant är k och naturliga längd r_0, se figur 4. Fjäderns ena ände är fäst vid rotationsaxeln och den andra vid partikeln så att partikelns rörelse i röret påverkas av fjäderkraften. Betrakta specialfallet $k/m = 3\omega_0^2/4$. Vid tiden $t = 0$ gäller att $r = r_0$ och $\dot{r} = -\omega_0 r_0$. Visa att $\dot{r} = 0$ för $t = \ln 3/\omega_0$.

Figurer



Teoridel

5. Ett backkröns kontur approximeras med en halvcirkelbåge. Från vila på krönets topp börjar en vagn rulla utför krönet under tyngdkraftens inverkan. Ställ upp rörelse-ekvationerna i polära koordinater för vagnens rörelse. Multiplicera en av dessa ekvationer med $\dot{\theta}$ och integrera den så erhållna ekvationen med avseende på tiden *t* för att beräkna $\dot{\theta}$ som funktion av θ. Formulera ett villkor för att vagnen skall lätta från vägen utför krönet och beräkna den vinkel för vilken detta sker.

6. En partikel, vars massa är *m*, rör sig i ett kraftfält **F**, som i det allmänna fallet beror av både tiden *t* och partikelns läge **r**. Definiera det arbete *U* som kraftfältet utför på partikeln om denna förflyttas mellan punkterna $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$. Beräkna *U* om $\mathbf{F} = mg(0,0,-1)$ där *g* är tyngdaccelerationen. Beräkna dessutom *U* för plan rörelse om, i planpolära koordinater, $\mathbf{F} = -k(r-l_0)\mathbf{e}_r$ där *k* och l_0 är en konstanter. Vilken mekanisk anordning beskrivs av det sistnämnda kraftfältet.

7. En partikel med massan *m* rör sig längs banan $\mathbf{r}(t)$ med hastigheten $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$. Definiera partikelns rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_O$ med avseende på origo. Visa dessutom att för plan rörelse i *x*-*y*-planet gäller att $\mathbf{H}_O = mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z$ där *r* och θ är polära koordinater.

8. Lösningen till differentialekvationen
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = a\omega_n^2 \sin \omega t$$
beskriver en påtvingad svängning. Härled en partikulärlösning för fallet $\omega \neq \omega_n$. Varför är lösningen orealistisk för $\omega = \omega_n$? Beskriv *kvalitativt* hur denna orealistiska partikulär-lösning ändras om man lägger till en svagt dämpande linjär mekanism i det svängande systemet.