

## Analytisk mekanik, 5C1121

### Inlämningsuppgift 1, VT 2004

En partikel med massan  $m$ , rör sig under inverkan av kraftfältet

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -k\mathbf{r} \\ &= -k(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) = -kr\mathbf{e}_r(\theta, \varphi) = -k(\rho\mathbf{e}_\rho(\varphi) + z\mathbf{e}_z)\end{aligned}$$

som angivits i Cartesiska, sfäriska- respektive cylinderkoordinater. Detta är ett centralkraftfält.

- Visa att rörelsemängdsmomentet  $\mathbf{L}$  är bevarat.
- Visa (motivera) att detta medför att rörelsen är plan.
- Lägg  $z$ -axeln längs  $\mathbf{L}$  och räkna ut  $\mathbf{L}$  i cylinderkoordinater.
- Härled ett samband mellan vinkelhastigheten  $\dot{\varphi}$  och avståndet  $\rho$  från kraftcentrum ur rörelsemängdsmomentets konstans.
- Vad är potentiella energin  $V(q)$  för detta kraftfält?

Behandla problemet som plant (2 frihetsgrader) och ställ upp Lagrangefunktionen  $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$  och rörelseekvationerna

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2$$

för

- fallet  $q_1 = x, q_2 = y$ .
- fallet  $q_1 = \rho, q_2 = \varphi$ .
- Beräkna partikelns bankurva. Vad har kurvan för form (namn)?
- Beräkna omloppstiden för ett varv i den slutna banan?