
Hanno Essén

Lagranges metod för en partikel

KTH MEKANIK
STOCKHOLM 2004

1 Inledning

Joseph Louis Lagrange (1763-1813) fann en metod som gör det möjligt att enkelt ta fram rörelseekvationerna för system med tvång, d.v.s. system av på olika sätt sammanlänkade partiklar och stela kroppar. Metoden innebär att rörelseekvationerna fås genom derivering av energiuttryck. Den är särskilt anpassad till så kallade *holonoma* tvång. Detta är, enkelt uttryckt, tvång som man kan ta hänsyn till genom att välja *koordinater* på lämpligt sätt.

Lagranges metod är sällan nödvändig för problem med en enda partikel. Dess styrka för sådana problem ligger mest på det fundamentala planet. Praktiskt kommer den bäst till sin rätt för *mekanismer*, länkade system av stela kroppar. Men, när Lagranges metod härleds för ett godtyckligt partikelsystem är det lätt att tappa orienteringen bland alla, till synes, oräkneliga summeringar och deriveringar som görs. Därför härleder vi metoden för *en enda partikel*. Längre fram visas att ett N -partikelsystem matematisk kan uppfattas som en partikel i ett rum av dimension $3N$. Man kan då återanvända partikelhärledningen nedan med små ändringar.

2 Generaliserade koordinater och tvång

Läget för en partikel i tredimensionella rummet kan anges genom att man ger värdena på tre stycken koordinater,

$$q_1, q_2, q_3, \quad (1)$$

som är specificerade på något sätt. Exempel är kartesiska koordinater (x, y, z) , cylinderkoordinater (ρ, φ, z) och sfäriska koordinater (r, φ, θ) . Lägesvektorn, $\mathbf{r}$, för partikeln kan då ses som en funktion av dessa koordinater,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (2)$$

Sådana godtyckliga koordinater kallas *generaliserade koordinater*. Det är inte alltid man behöver tre koordinater för att ange partikelns läge. För en plan partikelpendel t.ex. behövs bara en vinkel (φ), för en partikel i ett horisontalplan behövs bara två koordinater (x, y) , o.s.v. Man säger då att man har (holonoma) *tvång* och partikelns läge ges av $\mathbf{r}(q_1)$ eller av $\mathbf{r}(q_1, q_2)$. Det antal koordinater, n , man behöver kallas antalet *frihetsgrader*. För en partikel kan alltså n vara noll, ett, två eller tre ($n = 0, 1, 2$, eller 3). Vi skriver således

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, \dots, q_n) = \mathbf{r}(q) \quad (3)$$

för lägesvektorn; enbart q står då kollektivt för alla de behövliga koordinaterna. Om s är antalet tvång så gäller att,

$$n = 3 - s. \quad (4)$$

D.v.s antalet frihetsgrader n är tre minus antalet tvång s . Tre här är rummets dimensioner och ett tvång är en ekvation som inskränker partikelns rörelse. Om partikeln exempelvis måste vara på konstant avstånd R från origo gäller,

$$|\mathbf{r}| = R. \quad (5)$$

Denna ekvation är ett tvång och om den är uppfylld återstår två frihetsgrader – partikel kan röra sig på ytan av en sfär med radien R . Allmänt ges *tvången* av s stycken samband

$$f_k(\mathbf{r}) = 0, \quad k = 1, \dots, s, \quad (6)$$

som man vet att partikelns läge $\mathbf{r}$ måste uppfylla.

3 Kurvor, ytor och tangentvektorer

Det är intuitivt viktigt att förstå att uttrycket $\mathbf{r}(q_1)$ kan uppfattas som en parameterframställning av en *kurva* (med parametern q_1). Denna kurva är den en-dimensionella ”mångfald” där partikeln kan röra sig, i enlighet med tvången ($s = 2$). Notera att en *tangetvektor* till kurvan fås genom derivering

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}. \quad (7)$$

På motsvarande sätt ger $\mathbf{r}(q_1, q_2)$ en parameterframställning av en *yta*. Ytan är den två-dimensionella ”mångfald” som partikeln kan röra sig på, i enlighet med tvånget ($s = 1$). En yta har två tangentvektorer

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \quad (8)$$

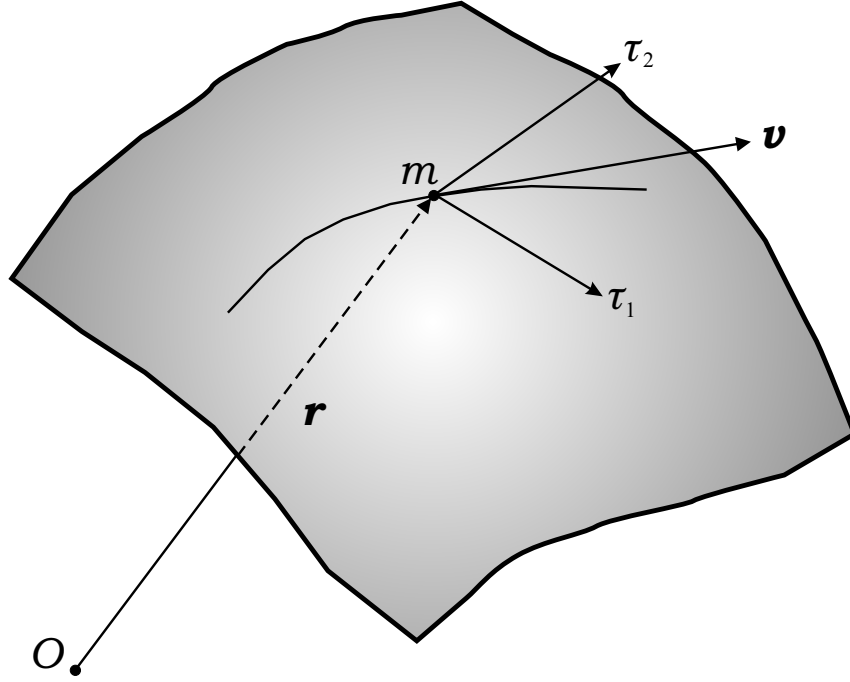
se figur 1. Finns det inga tvång kan man se $\mathbf{r}(q) = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ som en parametrisering av det tredimensionella rummet och motsvarande tre tangentvektorer,

$$\boldsymbol{\tau}_i(q) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

representerar de tre olika riktningar som man flyttar sig i när man ökar q_i och samtidigt håller de två övriga koordinaterna konstanta.

4 Generaliserade hastigheter

En partikels hastighetsvektor fås genom tidsderivering av läget $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, t)$. Denna vektor ändrar sig i tiden därför att de generaliserade koordinaterna $q_i = q_i(t)$



Figur 1: En partikel, m , rör sig på en (fix) yta $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2)$. De två vektorerna $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ är tangenter till ytan vid $\mathbf{r}(q_1, q_2)$. Partikelns bankurva $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(q_1(t), q_2(t))$ visas också. Hastighetsvektorn $\mathbf{v}$ är tangent till denna och då tvången (ytan) är tidsberoende ($\boldsymbol{\tau}_t = \mathbf{0}$) ligger hastighetsvektorn i det plan som spänns upp av $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$. Enligt (12) gäller här $\mathbf{v} = \dot{q}_1 \boldsymbol{\tau}_1 + \dot{q}_2 \boldsymbol{\tau}_2$

ändrar värde när partikel flyttar sig. Dock kan läget även bero explicit på tiden t . Man säger då att man har tidsberoende tvång (kurvor och ytor som rör sig). Hastighetsvektorn kan alltså skrivas

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}. \quad (10)$$

Tidsderivatorna av de generaliserade koordinaterna, $\dot{q}_i = dq_i/dt$, kallas *generaliserade hastigheter*. Om vi inför beteckningen,

$$\boldsymbol{\tau}_t(q, t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad (11)$$

och använder definitionen av tangentvektorer i ekvationerna (7) – (9), kan vi skriva

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \boldsymbol{\tau}_j + \boldsymbol{\tau}_t. \quad (12)$$

Notera att tangentvektorer, i allmänhet, beror på q , och i det tidsberoende fallet även på t , så att

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_i(q, t). \quad (13)$$

Vår hastighetsvektor kan alltså skrivas

$$\boldsymbol{v}(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \boldsymbol{\tau}_j(q, t) + \boldsymbol{\tau}_t(q, t). \quad (14)$$

Det viktiga är att observera att dess beroendet på de *generaliserade hastigheterna* $\dot{q}$ är *linjärt*. Detta innebär att derivatan

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_i} = \boldsymbol{\tau}_i(q, t) \quad (15)$$

är oberoende av de generaliserade hastigheterna $\dot{q}$. Notera att de två resultaten (9) och (15), med $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$, tillsammans ger

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \boldsymbol{\tau}_i, \quad (16)$$

d.v.s. två sätt att uttrycka tangentvektorerna. Det ser alltså ut som om man kan ”dividera bort prickarna”.

5 Rörelseekvationerna

Rörelseekvationerna för en partikel ges av

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}, \quad (17)$$

där $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ är rörelsemängden. Denna vektorekvation har ju i allmänhet tre komponenter längs lämpliga basvektorer. Om vi har tvång så behövs ju bara en ekvation per generaliserad koordinat q_i . Antalet rörelseekvationer som behövs är alltså lika med antalet frihetsgrader n .

När man väl valt sina generaliserade koordinater q_i lämpligt är i allmänhet de bästa basvektorerna tangentvektorerna $\boldsymbol{\tau}_i$. Om man alltså projicerar vektorekvationen (17) på de n tangentvektorerna fås n stycken rörelseekvationer som är anpassade till de n generaliserade koordinaterna. Dessa projicerade rörelseekvationer kan skrivas

$$\dot{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (18)$$

med hjälp av skalärprodukten.

Märk att detta är analogt med att titta på komponenterna av accelerationen och kraften längs så kallade ”rörliga” basvektorer. T.ex. i cylinderkoordinatfallet är dessa $e_\rho(\varphi)$, $e_\varphi(\varphi)$ och förfarandet ger komponenterna av rörelseekvationen längs den radiella och den transversella (eller azimuthala) riktningen. Notera dock att $\boldsymbol{\tau}_i$ inte behöver vara enhetsvektorer; detta spelar ingen roll i sammanhanget.

6 Lagranges metod

Att explicit få fram rörelseekvationerna med hjälp av formel (18) kan vara ganska besvärligt. Lagrange kom på en elegant genväg till dessa projicerade rörelseekvationer. Man kan få deras vänsterled genom att derivera rörelseenergin på ett speciellt sätt. Vi skall nu visa att,

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right), \quad (19)$$

där T är den kinetiska energin. Vi gör detta genom att i tur och ordning studera de två termerna i högerledet.

Den kinetiska energin kan skrivas

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (20)$$

och således fås

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) = m \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_i, \quad (21)$$

där vi använt $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ och ekvation (15) i sista steget. Om vi nu tidsderiverar detta fås

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} m \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = m \frac{d \mathbf{v}}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau}_i + m \mathbf{v} \cdot \frac{d \boldsymbol{\tau}_i}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{p} \cdot \frac{d \boldsymbol{\tau}_i}{dt}, \quad (22)$$

men

$$\frac{d \boldsymbol{\tau}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d \mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \quad (23)$$

eftersom man får byta ordning på de två deriveringarna. Sammanfattningsvis har vi fått

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}. \quad (24)$$

Kan vi bli av med den sista termen här får vi något som är projektionen av $\dot{\mathbf{p}}$ på $\boldsymbol{\tau}_i$.

För att få fram ekvation (19) beräknar vi nu den andra termen i högerledet. Vi får,

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial q_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \right) = m \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}, \quad (25)$$

och vi ser genast att om detta subtraheras från (24) fås $\dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\tau}_i$, vilket skulle bevisas.

7 Generaliserade krafter

Vi har alltså visat att rörelseekvationerna, enligt (18) och (19), kan skrivas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_i \quad (26)$$

Om vi nu definierar de *generaliserade krafterna*

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_i \quad (27)$$

får vi följande uttryck för de n rörelseekvationerna

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = Q_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (28)$$

Detta är den mest *generella formen* av *Lagranges rörelseekvationer*.

Hur skall man förstå de generaliserade krafterna? Vi antar ju att partikelns läge kan skrivas $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, t)$. En liten förflyttning av partikeln ges då av

$$d\mathbf{r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\tau}_j dq_j + \boldsymbol{\tau}_t dt \quad (29)$$

Arbetet som kraften uträttar på partikeln är alltså

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \boldsymbol{\tau}_j dq_j + \boldsymbol{\tau}_t dt \right). \quad (30)$$

Med hjälp av (27), och beteckningen

$$Q_t = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_t, \quad (31)$$

fås nu att

$$dW = \sum_{j=1}^n Q_j dq_j + Q_t dt. \quad (32)$$

Således fås att den *generaliserade kraften* Q_i ges av att

$$dW_i = Q_i dq_i \quad (33)$$

är det *arbete* som uträttas på partikeln om q_i ökas med dq_i medan de övriga q :na och tiden hålls konstanta.

8 Konservativa krafter

Om arbetet W , åtminstone lokalt, är en funktion av q och t , så att man kan skriva,

$$W = W(q, t), \quad (34)$$

gäller att *differentialen* av W definitionsmässigt är

$$dW = \sum_{j=1}^n \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial W}{\partial t} dt. \quad (35)$$

Jämför man detta uttryck med (32) och sätter $dW = dW$, kan man omedelbart identifiera koefficienterna framför koordinatdifferentialerna och få att

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (36)$$

Observera att i det *allmänna fallet gäller detta ej*. Det infinitesimala arbetet dW är normalt inte en differential av en funktion av q och t utan beror även på t.ex. hastigheterna.

Om kraften på partikeln är *konservativ* så gäller att arbetet på partikeln ges av minus den potentiella energifunktionen

$$V(q, t) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}(q, t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (37)$$

Notera att integralen här måste vara oberoende av integrationsvägen mellan en (godtycklig fix) startpunkt $\mathbf{r}_0$ och slutpunkten $\mathbf{r}(q, t)$ för att definiera en funktion av slutpunkten. När detta gäller får man att arbetet ges av

$$W(q, t) = -V(q, t). \quad (38)$$

Jämför vi nu med equation (36) får vi att den *generaliserade kraften*

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (39)$$

När kraften är *konservativ* är således den generaliserade kraften Q_i minus partiella derivatan av potentiella energin med avseende på q_i .

9 Lagrangefunktionen

I det konservativa fallet har vi alltså att rörelseekvationerna (28) kan skrivas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n. \quad (40)$$

Bildar man nu funktionen

$$L = L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q), \quad (41)$$

den så kallade *Lagrangefunktionen* eller Lagrangianen, ser man att dessa ekvationer kan skrivas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (42)$$

Denna eleganta form av rörelseekvationerna som ofta kallas *Euler-Lagranges ekvationer* gäller alltså om krafterna är konservativa.

Euler-Lagranges ekvationer kan fås också på ett fundamentalt annorlunda sätt. Det visar sig att dessa ekvationer gäller om den så kallade *verkan*,

$$S[q(t)] = \int L(q, \dot{q}) dt, \quad (43)$$

som är en funktional av banan $q(t)$, minimeras av den verkliga banan som partikeln följer. Detta kallas *minsta verkans princip*.

10 Hastighetsberoende krafter

I förra avsnittet visade vi att en Lagrangefunktion $L(q, \dot{q})$ kan införas i fallet att krafterna är konservativa och har en potentiell energi $V(q)$. Om krafterna däremot är hastighetsberoende fungerar detta ej. Om de hastighetsberoende krafterna är dissipativa (friktion) och omvandlar mekanisk energi till värme är det inte mycket att göra. Vissa kända hastighetsberoende krafter uträttar emellertid inget arbete: *Lorentzkraften* på en partikel med laddning e från ett magnetfält $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{F}_L = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (44)$$

(Gaussiska enheter, c är ljushastigheten) och *Corioliskraften*,

$$\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (45)$$

på en partikel i ett referenssystem som roterar med vinkelhastighetsvektorn $\boldsymbol{\omega}$. Dessa krafter påverkar inte energins bevarande; eftersom de är vinkelräta mot hastigheten uträttar de inget arbete. Det visar sig att man kan definiera en Lagrangefunktion

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q, \dot{q}) \quad (46)$$

vars rörelseekvationer (42) innehåller sådana krafter. Funktionen $U(q, \dot{q})$ kallas då *arbetsfunktion*. Som man inser av det föregående, är kravet för att detta skall fungera att uttrycken,

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right), \quad (47)$$

skall ge de rätta generaliserade krafterna. För en partikel utan tvång beskriven med kartesiska koordinater måste alltså, $Q_i = F_i$, ($i = 1, 2, 3 = x, y, z$), helt enkelt vara de kartesiska komponenterna av kraften. Vi tittar nu på de två fallen var för sig.

10.1 Partikel i elektromagnetiskt fält

En partikel som har laddningen e och som rör sig under inverkan av ett yttre elektriskt och magnetiskt fält kan beskrivas med Lagrangefunktionen

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e \left(\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right). \quad (48)$$

Här är Φ den elektriska potentialen och $\mathbf{A}$ den så kallade vektorpotentialen. De är definierade så att de elektriska och magnetiska fälten ges av,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (49)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (50)$$

Arbetsfunktionen blir i detta fall

$$U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = e \left(\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (51)$$

och efter lite räkningar får man att rörelseekvationernas x -komponent,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (52)$$

blir

$$m\ddot{x} = eE_x + \frac{e}{c}(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y). \quad (53)$$

De tre komponenterna tillsammans kan således sammanfattas i vektorekvationen

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}. \quad (54)$$

Detta är rörelseekvationen för en laddad partikel under inverkan av ett elektromagnetiskt fält.

10.2 Partikel i accelererat referenssystem

Antag att vi väljer att studera rörelsen för en partikel i ett accelererat referenssystem. Systemet kan ha en *translationsacceleration* $\mathbf{a}_0$ relativt inertialsystemen. Det kan också rotera med *vinkelhastighetsvektor* $\boldsymbol{\omega}$. Vi lägger koordinatsystemet i det accelererade systemet så att origo ligger på rotationsaxeln. I den elementära mekaniken får man fram rörelseekvationerna i detta accelererade system med hjälp av Coriolis teorem.

Det framgår då att translationsaccelerationen ger upphov till en fiktiv kraft,

$$\mathbf{F}_a = -m\mathbf{a}_0, \quad (55)$$

som är av samma karaktär som tyngdaccelerationen. Denna har en potentiell energi

$$V_a(\mathbf{r}) = m\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{r}. \quad (56)$$

Rotationen kräver tre stycken fiktiva krafter:

$$\mathbf{F}_r = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\omega^2 \mathbf{r}_\perp, \quad (57)$$

$$\mathbf{F}_t = m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad (58)$$

$$\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (59)$$

Den första kallas *centrifugalkraft* och är riktad radiellt (vinkelrätt) ut från rotationsaxeln. Centrifugalkraften har en potentiell energi

$$V_r(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 r_\perp^2. \quad (60)$$

Den andra uppträder bara om vinkelhastigheten inte är konstant i tiden. Den tredje är den ovan nämnda, icke arbetande, Corioliskraften.

Rörelseekvationerna för en partikel i ett sådant accelerande system kan fås ur följande Lagrangefunktion

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (61)$$

där arbetsfunktionen ges av

$$U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = V(\mathbf{r}, t) + V_a(\mathbf{r}, t) + V_r(\mathbf{r}, t) - m\dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (62)$$

d.v.s.

$$U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = V(\mathbf{r}, t) + m\mathbf{a}_0(t) \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}m[\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}]^2 - m\dot{\mathbf{r}} \cdot [\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}]. \quad (63)$$

Här är $V(\mathbf{r}, t)$ potentiella energin för de verkliga konservativa krafter som verkar på partikeln betraktad från ett inertialsystem. Rörelseekvationerna svarande mot denna Lagrangefunktion blir

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_C. \quad (64)$$

Här förutsätts att läget, $\mathbf{r}$, hastigheten, $\dot{\mathbf{r}}$, och accelerationen, $\ddot{\mathbf{r}}$, mäts relativt det accelererade systemet och att origo för lägesvektorn, $\mathbf{r}$, måste ligga på rotationsaxeln.

11 Generaliserade storheter

Följande generaliserade storheter införs i Lagrangeformalismen

- Generaliserade koordinater: q_i
- Generaliserade hastigheter: $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$
- Generaliserade krafter: $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$ eller $Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)$
- Generaliserade rörelsemängder: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Uttrycken för de generaliserade krafterna förutsätter att inga dissipativa krafter verkar. Mera allmänt har man $Q_i = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_i$.

Endast de *generaliserade rörelsemängderna*, p_i , har inte berörts ovan. Med hjälp av dessa kan Lagranges ekvationer, i det icke-dissipativa fallet (42), skrivas

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (65)$$

Det kan hända att en viss generaliserad koordinat q_i inte ingår i Lagrangefunktionen, fast $\dot{q}_i$ ingår. Då är $\partial L / \partial q_i = 0$ och ur ekvation (65) framgår då direkt att motsvarande generaliserade rörelsemängd är konstant: $p_i = \text{konst.}$ Koordinaten q_i kallas då *cyklisk*.