Kungl Tekniska Högskolan
2002 10 21 Institutionen för Mekanik

Mekanik fortsättningskurs V, 5C1114, 2002 10 21, kl 14.00-18.00

Lösningar Problem

Uppgift 1: Lägg x-axel horisontellt åt vänster och y-axel vertikalt uppåt. Krafterna på dörren är förutom den givna kraften F, tyngkraften mg, nedåt i masscentrum, normalkrafter N_1 och N_2 båda uppåt vid vänstra respektive högra övre hörnet. Rörelseekvationerna ger då

$$(x) \qquad m\ddot{x} = -F \tag{1}$$
$$(y) \qquad m\ddot{y} = 0 = N_1 + N_2 - mg \tag{2}$$
$$(\dot{H}_{Gz} = M_{Gz}) \quad I_G\ddot{\theta} = 0 = \tfrac{d}{2}N_2 - \tfrac{d}{2}N_1 - \tfrac{H}{2}F \tag{3}$$

Ur den andra och tredje av dessa får man respektive

$$N_2 + N_1 = mg \tag{4}$$
$$N_2 - N_1 = (H/d)F \tag{5}$$

Ur detta fås att

$$2N_2 = mg + (H/d)F \tag{6}$$
$$2N_1 = mg - (H/d)F \tag{7}$$

Det största F får vara om hjulen skall ha kontakt med spåret är det som precis gör $N_1 = 0$. Detta ger
Svar:

$$F = dmg/H$$

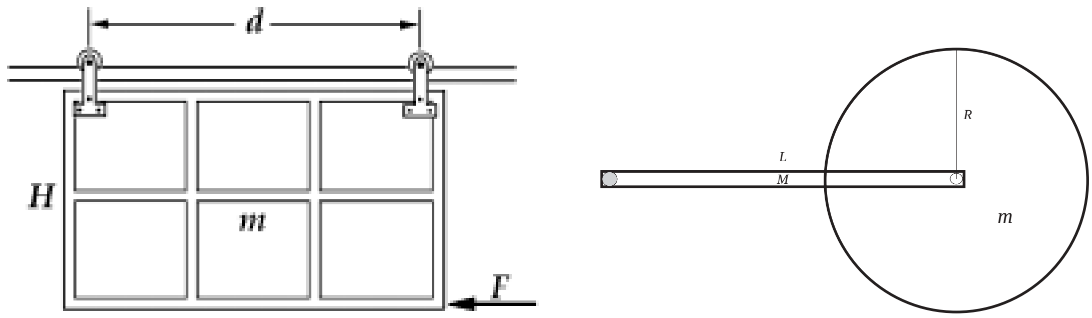


Figure 1: Bilder till Uppgift 1 respektive 2

Uppgift 2: Använd rörelsemängdsmomentets bevarande med avseende på den fixa vertikala axeln genom stången ände. Med hjälp av formeln för rörelsemängdsmomentets två delar får man först, när bara skivan roterar och dess masscentrum, samt stången, är i vila att

$$H_z = \frac{1}{2}mR^2\omega_0 \tag{8}$$

Efter att skivan bromsats relativt stången har man en stel kropp som roterar kring den fixa vertikala axeln. Dess vinkelhastihet kallar vi ω_1. Återstår att ta fram tröghetsmomentet. Detta är $I_z = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{1}{2}mR^2 + mL^2$; den första termen gäller stången, den andra skivan och den tredje flyttar skivans tröghetsmoment till den fixa axeln med Steiners sats. Då fås att $H_z = I_z\omega_1$ Således fås

$$\left[\frac{1}{3}ML^2 + \frac{1}{2}mR^2 + mL^2\right]\omega_1 = \frac{1}{2}mR^2\omega_0 \tag{9}$$

ur detta får man efter förenkling
Svaret:

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{1 + 2(1 + \frac{M}{3m})\frac{L^2}{R^2}}$$

Uppgift 3: Inför en horisontell x-axel och låt x vara koordinaten för vagnens mittpunkt (dvs. pendelns upphängningspunkt). Låt θ vara vinkeln mellan vertikalen och pendeln, dvs. pendelns utslagsvinkel. Använd först lagen om masscentrums rörelse. Eftersom ingen yttre kraft verkar i x-led, är masscentrum oaccelererat i x-led. Masscentrums x-koordinat x_G ges av

$$(M+m)x_G = Mx + mx_C$$

där

$$x_C = x + (l/2)\sin\theta$$

är x-koordinaten för pendelns mittpunkt (masscentrum). Ur $\dot{x}_G = 0$ fås nu

$$(M+m)\dot{x} = -m(l/2)\dot{\theta}\cos\theta$$

Systemets kinetiska energi ges av

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2$$

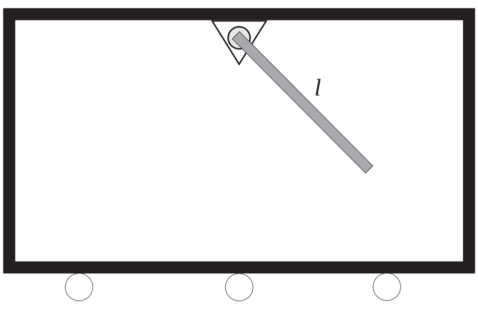
Här är $I_C = \frac{1}{12}ml^2$. Med en uppåtriktad y-axel med origo vid pendelns upphängningspunkt gäller att $y_C = -(l/2)\cos\theta$. Det betyder att

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + (l^2/4)\dot{\theta}^2$$

Med hjälp av $\dot{x} = -\frac{m}{m+M}\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta$ kan man eliminera alla $\dot{x}$ ur ekvationen för T. Potentiella energin är $V = mgy_C$ så till slut fås efter lite förenklingar att

$$E = T + V = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{m^2}{m+M}\frac{l^2}{8}\dot{\theta}^2\cos^2\theta - mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

I startläget är både $E = T = V = 0$ då allt är i vila och $\cos(\pi/2) = 0$. I nedersta läget är $\dot{\theta}$ den sökta vinkelhastigheten och $\cos(0) = 1$. Detta ger
svaret: $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{12(m+M)}{m+4M}\frac{g}{l}}$.



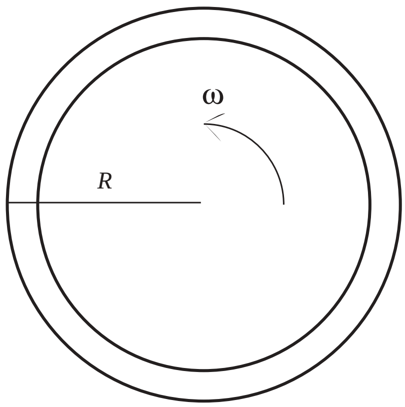


Figure 2: Bilder till Uppgift 3 respektive 4

Uppgift 4: Centrifugalkraften ges av

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{cf}} = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = m\omega^2R\boldsymbol{e}_r$$

Här är $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z$ och $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{e}_r$ med cylinderkoordinater i rymdstationens plan. För tyngdkraft fås då ekvationen $m\omega^2R = mg$ vilket ger **Svar:** $\omega = \sqrt{g/R}$.
Corioliskraften ges av $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}} = -2m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})$. Med $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_\theta$ fås (notera att $\omega = \dot{\theta}$) $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}} = 2m\omega v\boldsymbol{e}_r$. Villkoret att halva tyngden skall upplevas är då att $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cf}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{cor}} = \frac{1}{2}mg\boldsymbol{e}_r$.
Härur fås
Svaret: $v = -\frac{1}{4}\sqrt{gR}$; riktningen är alltså motsatt rotationsriktningen.