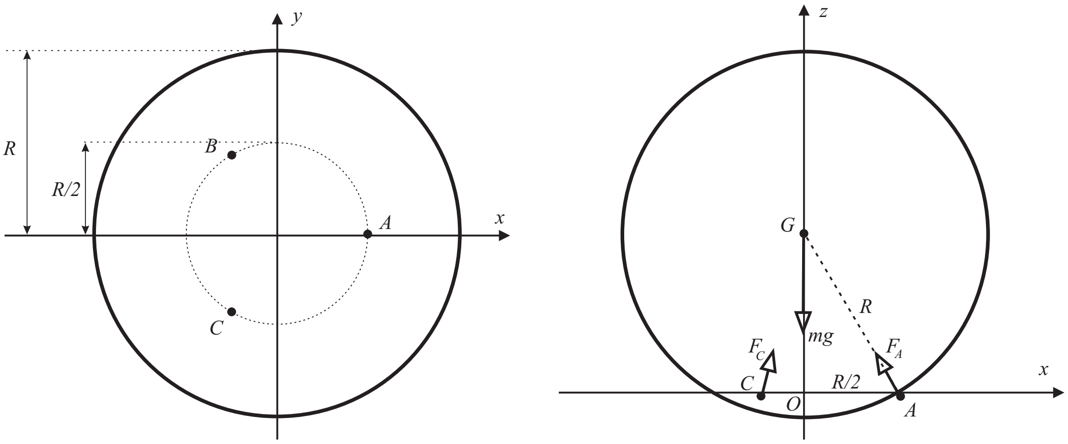
Mekanik för I, SG1109, Lösningar till problemtentamen, 2011 05 23

Uppgift 1: Ett glatt homogent klot med radien R och massan m vilar på tre stycken stödpiggar A, B och C belägna i ett horisontalplan. I ett lämpligt koordinatsystem är lägena givna av A : $(R/2)(1,\,0,\,0)$, samt för B och C av: $(R/2)(\cos(2\pi/3),\,\pm\sin(2\pi/3),\,0)$. Alla tre piggar ligger alltså på avståndet $R/2$ från z-axeln. Beräkna läget för klotets masscentrum G samt krafterna från piggarna på klotet (storlek och riktning). Ledning: $\cos(2\pi/3) = -1/2,\ \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$.



Figur 1: Till vänster klotet sett uppifrån. Till höger en friläggning av klotet sett längs y-axeln. Punkten B ligger då rakt bakom punkten C.

Lösning 1: Klotets masscentrum ligger på z-axeln. I figuren ser man att masscentrums z-koordinat, z_G, ges av, $z_G^2 + (R/2)^2 = R^2$, enligt Pytagoras sats på den rätvinkliga triangeln OAG. Detta ger **Svar:** $z_G = \sqrt{3}R/2$**.**

Kraftjämvikt ger ekvationen:

$$F_A\boldsymbol{e}_{AG} + F_B\boldsymbol{e}_{BG} + F_C\boldsymbol{e}_{CG} - mg\,\boldsymbol{e}_z = \mathbf{0}.$$

Av symmetriskäl måste beloppen av de tre krafterna från stödpiggarna vara lika: $F_A = F_B = F_C = F$. Likaledes är z komponenterna av de tre enhetsvektorerna $\boldsymbol{e}_{AG}, \boldsymbol{e}_{BG}, \boldsymbol{e}_{CG}$ lika stora. Vi har att $\boldsymbol{e}_{AG} = (\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_A)/|\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_A| = (-1/2, 0, \sqrt{3}/2)$. z-komponenten av kraftjämvikts ekvationen ger då att,

$$3F\frac{\sqrt{3}}{2} - mg = 0,$$

så att vi får, **Svar:** kraftbeloppet från vardera stödpigg är

$$F = \frac{2mg}{3\sqrt{3}},$$

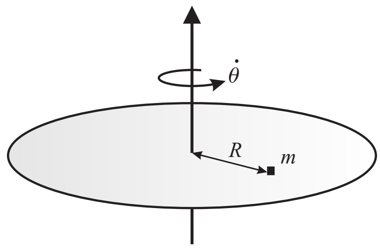
och riktningarna ges av,

$$\boldsymbol{e}_{AG} = (1/2)(-1,\,0,\,\sqrt{3}),$$

och,

$$\boldsymbol{e}_{BG} = (1/2)(1/2,\,-\sqrt{3}/2,\,\sqrt{3}),\ \boldsymbol{e}_{CG} = (1/2)(1/2,\,\sqrt{3}/2,\,\sqrt{3}).$$

Uppgift 2: En partikel, som har massan m, ligger på en cirkulär horisontell platta på avståndet R från mittpunkten. Vid tiden $t = 0$ börjar plattan rotera kring en fix vertikal axel genom mittpunkten. Vinkelhastigheten ges av $\dot{\theta}(t) = \alpha t$, där α är en konstant. Statiska friktionstalet mellan plattan och partikeln är μ. Till vilken tid $t = T$ ligger partikeln kvar i vila relativt plattan?



Figur 2: I uppgift 2 inför man cylinder koordinater.

Lösning 2: Partikel följer med i cirkelbanan på plattan så länge friktionskraften kan tillhandahålla den nödvändiga accelerationen, d.v.s. så länge,

$$|m\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{F}| < \mu N = \mu m g.$$

Vi uttrycker accelerationen i cylinderkoordinater för fallet att $r = R =$konstant. Detta ger,

$$\boldsymbol{a} = -R\dot{\theta}^2 \boldsymbol{e}_r + R\ddot{\theta}\, \boldsymbol{e}_\theta = -R\alpha^2 t^2 \boldsymbol{e}_r + R\alpha\, \boldsymbol{e}_\theta.$$

Kraften är således $\boldsymbol{F} = mR\alpha(\alpha t^2 \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_\theta)$. Beloppet av kraften är då,

$$|\boldsymbol{F}| = mR\alpha\sqrt{\alpha^2 t^4 + 1}.$$

Detta belopp växer med t och blir större än $\mu m g$ vid en tid som uppfyller,

$$mR\alpha\sqrt{\alpha^2 t^4 + 1} = \mu m g,$$

d.v.s. när

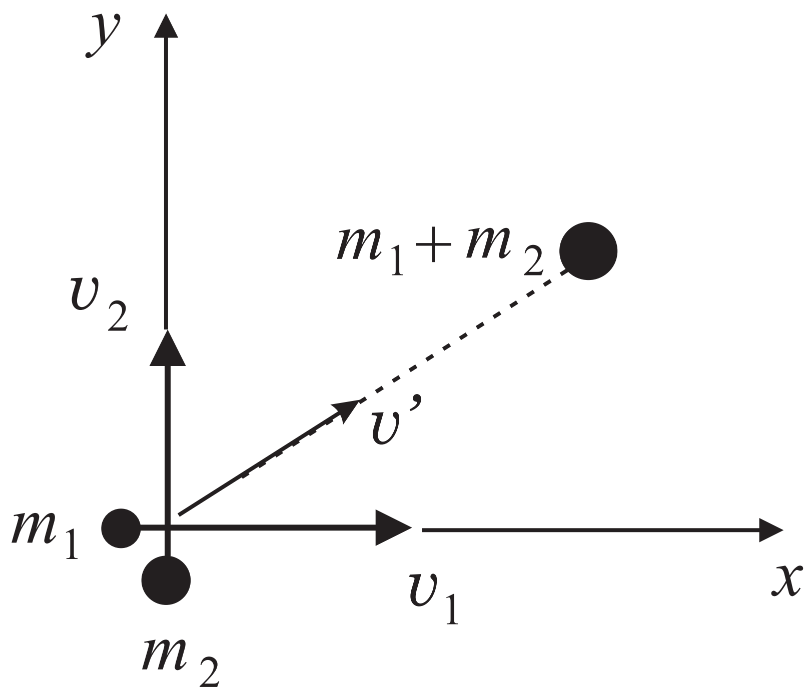
$$1 + \alpha^2 t^4 = \left(\frac{\mu g}{R\alpha}\right)^2.$$

Detta ger
Svar:

$$t = \sqrt[4]{\frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{\mu g}{R\alpha}\right)^2 - 1\right]} = \frac{1}{\alpha}\sqrt[4]{\left[\left(\frac{\mu g}{R}\right)^2 - \alpha^2\right]},$$

om detta är reellt. Annars glider det direkt vid $t = 0$.

Uppgift 3: Två partiklar rör sig på ett strävt horisontalplan med vinkelräta hastigheter när de plötsligt krockar och fastnar i varandra. Glidfriktionstalet är μ. Partiklarna har massorna m_1 och m_2 och just innan de krockar har de farterna v_1 respektive v_2. Hur långt glider de efter krocken?



Figur 3: Bild till Uppgift 3. h och g är givna. α och v skall räknas ut.

Lösning 3: Vid krocken är rörelsemängden bevarad. Detta ger,

$$m_1 v_1 \boldsymbol{e}_x + m_2 v_2 \boldsymbol{e}_y = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}',$$

där $\boldsymbol{v}'$ är hastigheten omedelbart efter krocken.

Omedelbart efter krocken är då kinetiska energin för den hopslagna partikeln,

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{m_1 + m_2}.$$

När friktionskraften har stannat denna hopslagna partikel har den uträttat arbetet $-T$ enligt lagen om kinetiska energin. Eftesom normalkraften är lika med tyngdkraften, $N = (m_1 + m_2)g$, fås för glidfriktionskraften $f = \mu N = \mu(m_1 + m_2)g$. Friktionskraften uträttar alltså arbetet,

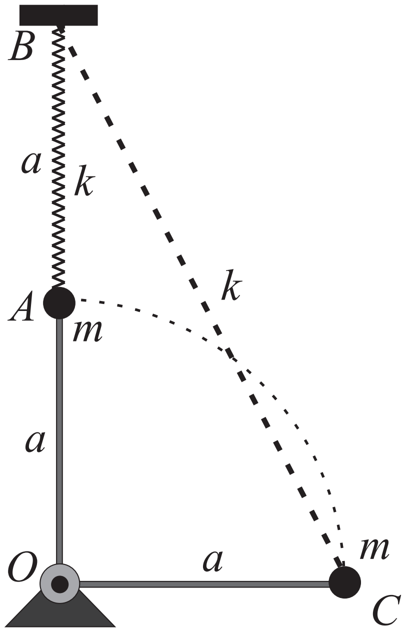
$$-\mu(m_1 + m_2)g\ell = 0 - T,$$

där ℓ är sträckan som partikeln rört sig (eftersom kraften hela tiden är antiparallell med förflyttningen). Alltså fås,

Svar: Sträckan som det glider blir

$$\ell = \frac{1}{2\mu g}\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Uppgift 4: En lätt stav OA av längden a kan rotera fritt kring en horisontell axel i O. I änden A finns en partikel med massan m. En lätt fjäder är fäst i partikeln samt i B rakt ovanför O på höjden $2a$. Dess styvhet är k och dess naturliga längd a. Från början är staven vertikal och i vila. När den sedan faller blir dess maximala utslagsvinkeln 90 grader, se Figur 2. Beräkna den vinkelfrekvens $\omega_n = \sqrt{k/m}$, uttryckt i g och a, som partikeln skulle svänga med om den hängde fritt i fjädern.



Figur 4: Lägena för systemet vid start och vändpunkt, d.v.s. för $\theta = 0°$ och $\theta = 90°$.

Lösning 4: Här är energin bevarad ty endast tyngdkraft och fjäderkraft uträttar arbete. Energin ges av

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k\,\delta^2(\theta) = E,$$

där θ är vinkeln mellan OA och riktningen vertikalt uppåt och $\delta(\theta)$ är fjäderförlängningen.

Nollnivån för tyngdkraftens potentiella energi är vald vid det upprätta startläget. Där är också fjäderförlängningen $\delta(0) = 0$. Eftersom kinetiska energin också är noll gäller här att $E = 0$.

I det nedre läget, vändläget, där $\theta = 90°$, är kinetiska energin också noll. Vi har även att $\cos(90°) = 0$. Fjäderförlängningen δ ges i detta läge av $a^2 + (2a)^2 = (a + \delta)^2$ enligt Pytagors sats på triangeln OCB i figuren. Ur denna andragradsekvation fås den positiva roten $\delta = (\sqrt{5} - 1)a$. Energisambandet ovan ger alltså att,

$$0 - mga + \frac{1}{2}k(\sqrt{5} - 1)^2a^2 = 0.$$

Ur detta fås, $k(\sqrt{5} - 1)^2a^2 = 2mga$, vilket ger,

Svar:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{(\sqrt{5} - 1)^2a}}.$$

.

Teoritentamen

Uppgift 5: Vilka typer av kraftsystem har enkraftsresultant och vad innebär det? Beräkna enkraftsresultantens angreppspunkt för ett parallellkraftsystem.

Svar 5: Plana kraftsystem, parallellkraftsystem och strålkraftsystem med kraftsumma $\boldsymbol{F}$ skild från noll. Alternativt kraftsystem för vilka kraftsumman är vinkelrät mot momentet $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{M} = 0$ med $\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{0}$. Se Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs, avsnitt 2.10.3, sid. 49.

Uppgift 6: En konisk pendel är en partikel som hänger i en tråd och rör sig i en cirkelbana. Bestäm partikelns fart v i cirkelbanan om trådens längd är ℓ och cirkelbanans radie är r.

Svar 6: Detta problem är behandlat i Exempel 7.11 i Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs, sid 194. Svaret bör vara

$$v = \sqrt{g \frac{r^2}{\sqrt{\ell^2 - r^2}}}.$$

Uppgift 7: Vilka är Keplers tre lagar för planetrörelse? Härled en av dem.

Svar 7: Detta finns i avsnitt 11.1, sid. 249 i Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs. Den som är lättast att härleda är den om sektorshastighetens konstans. Den visas på sid. 251 i Nyberg.

Uppgift 8: Bestäm allmänna lösningen till den odämpade påtvingade svängning som beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \, x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t).$$

Svar 8: Detta finns i Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs 12.5 på sidan 279. Eftersom påtvingade svängningar inte ingick enligt information på kurshemsidan får man full poäng på denna uppgift om man härleder allmänna lösningen till den homogena ekvationen och anger att man skall lägga till en partikulärlösning för den inhomogena.

HE 2011 05 23