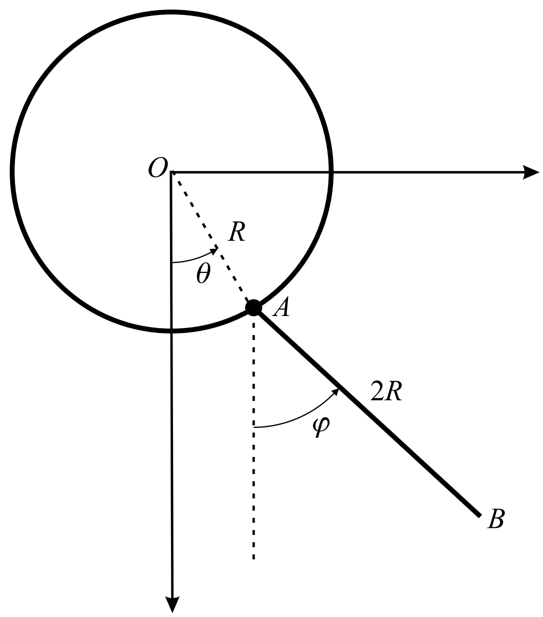
Lösning, Analytisk mekanik, 5C1121, Tentamen, 2003 03 11

Räkneproblem

Uppgift 1: En pendel består av en smal homogen stav AB, med längd $2R$. Den kan svänga fritt, i ett vertikalplan, kring en led i A. Denna led kan glida med försumbar friktion på en fix vertikal cirkelring av radie R. Ringen har mittpunkt i O och ligger i samma vertikalplan som staven kan svänga. Tag fram Lagrangefunktionen $L = T - V$ och de exakta rörelseekvationerna för systemet.



Lösning 1: Med utnyttjande av cylinderkoordinat-basvektorer ges läget för masscentrum hos staven ges av $\boldsymbol{r}_G = R\boldsymbol{e}_\rho(\theta) + R\boldsymbol{e}_\rho(\varphi)$. Hastigheten är då $\boldsymbol{v}_G = R\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\varphi(\theta) + R\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$. Då fås för

$$v_G^2 = \boldsymbol{v}_G \cdot \boldsymbol{v}_G = R^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi(\theta)\cdot\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)\right) = R^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\cos(\theta-\varphi)\right).$$

Kinetiska energin $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$ fås då till $T = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \frac{4}{3}\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\cos(\theta-\varphi)\right)$, eftersom $J = mR^2/3$. Potentiella energin blir $V = -mgR\,(\cos(\theta) + \cos(\varphi))$, så Lagrangefunktionen är (**Svar:**)

$$L = (1/6)mR\left[R\left(3\dot{\theta}^2 + 4\dot{\varphi}^2 + 6\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\cos(\theta-\varphi)\right) + 6g\,(\cos(\theta) + \cos(\varphi))\right].$$

Med följande delresultat

$$\begin{aligned}
p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mR^2\left(\frac{4}{3}\dot{\varphi} + \dot{\theta}\,\cos(\theta-\varphi)\right)\\
p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\,\cos(\theta-\varphi)\right)\\
-\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mR\left(R\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\sin(\theta-\varphi) - g\sin(\varphi)\right)\\
-\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mR\left(-R\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\sin(\theta-\varphi) - g\sin(\varphi)\right)
\end{aligned}$$

fås slutligen att rörelseekvationerna $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ och $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\theta\varphi} = 0$ blir respektive

$$\textbf{Svar:}\quad 4\ddot{\varphi} + 3\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi) - 3\dot{\theta}^2\sin(\theta-\varphi) + 3\frac{g}{R}\sin(\varphi) = 0,$$
$$\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\theta-\varphi) + \frac{g}{R}\sin(\theta) = 0.$$

Uppgift 2: Beräkna egenmodernas vinkelfrekvenser om man kan antaga små svängningar hos samma system som i uppgift 1.

Lösning 2: Behåller man upp till kvadratiska termer i L ovan (uppgift 1) får man

$$L = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \frac{4}{3}\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \right) - \frac{1}{2} mgR \left(\theta^2 + \varphi^2 \right)$$

Detta betyder att M- och K-matriserna blir

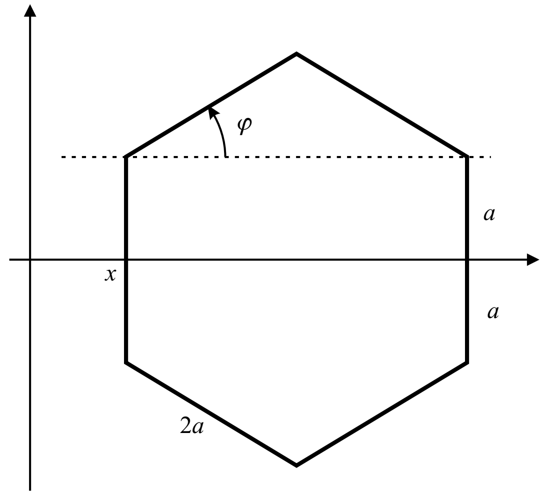
$$\mathbf{M} = mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{K} = mgR \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sekularekvationen blir då (efter att mR förkortats bort)

$$\det(-\mathbf{M}x + \mathbf{K}) = \begin{vmatrix} -Rx + g & -Rx \\ -Rx & -(4/3)Rx + g \end{vmatrix} = 0$$

och roten ur dess rötter är **Svar:**

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{37}}{2} \frac{g}{R}}.$$



Uppgift 3: Sex stycken likadana smala homogena stavar har längd $2a$ och är hopfogade med leder i ändarna så att de bildar en plan sexkant. Initialt är sexkanten regelbunden (alla vinklar lika) och i vila. En av sidorna (stavarna) träffas då av en stötimpuls mitt på som är vinkelrät mot sidan och ligger i sexkantens plan. Antag att denna sida får farten v. Hur stor fart får den motsatta sidan? (Ledning: på grund av symmetrin har problemet bara två frihetsgrader och lämpliga generaliserade koordinater är x och φ.)

Lösning 3: Stången som stöts till får masscentrumhastighet $v = v_{G1} = \dot{x}$ och ingen vinkelhastighet. Genom att derivera läget för masscentrum för de övriga stängerna får man deras masscentrumhastigheter. Lägena ges av

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{G2,3} &= (x + a\cos(\varphi))\boldsymbol{e}_x \pm (a + a\sin(\varphi))\boldsymbol{e}_y, \\ \boldsymbol{r}_{G4,5} &= (x + 3a\cos(\varphi))\boldsymbol{e}_x \pm (a + a\sin(\varphi))\boldsymbol{e}_y, \\ \boldsymbol{r}_{G6} &= (x + 4a\cos(\varphi))\boldsymbol{e}_x \end{aligned}$$

Hastigheterna blir då

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{G2,3} &= (\dot{x} - a\dot{\varphi}\sin(\varphi))\boldsymbol{e}_x \pm (a\dot{\varphi}\cos(\varphi))\boldsymbol{e}_y, \\ \boldsymbol{v}_{G4,5} &= (\dot{x} - 3a\dot{\varphi}\sin(\varphi))\boldsymbol{e}_x \pm (a\dot{\varphi}\cos(\varphi))\boldsymbol{e}_y, \\ \boldsymbol{v}_{G6} &= (\dot{x} - 4a\dot{\varphi}\sin(\varphi))\boldsymbol{e}_x \end{aligned}$$

Kinetiska energin är, $T = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{6} v_{Gi}^2 + 4\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$ ty bara fyra av stavarna roterar (med vinkelhastigheten $\dot{\varphi}$). Här är $J = \frac{ma^2}{3}$. Vi behöver ju bara kinetiska energin vid det initiala läget som ges av $\varphi = \pi/6$ och $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/6) = 1/2$, Efter förenkling fås att kinetiska energin då är $T_0 = 3m\dot{x}^2 + \frac{20}{3}ma^2\dot{\varphi}^2 - 6ma\dot{x}\dot{\varphi}$. Lagranges ekvationer för stöt ger nu

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{x}}\right)_{\mathrm{f}} - \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{x}}\right)_{\mathrm{i}} &= 6m(\dot{x} - a\dot{\varphi}) - 0 = I_x \\ \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\varphi}}\right)_{\mathrm{f}} - \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\varphi}}\right)_{\mathrm{i}} &= ma\left(-6\dot{x} + \frac{40}{3}a\dot{\varphi}\right) - 0 = 0 \end{aligned}$$

Här är I_x stötimpulsen på staven till vänster i figuren. Ur dessa ekvationer fås

$$\begin{aligned} v \equiv \dot{x} &= \frac{10I_x}{33m} \\ \dot{\varphi} &= \frac{3I_x}{22ma} \end{aligned}$$

för värdena direkt efter stöten. Sätts dessa in i ekvationen för $\boldsymbol{v}_{G6}$ ovan fås **Svar:** $v_{G6} = v/10$.

Idéproblem:

Uppgift 4: Eulers dynamiska ekvationer för en stel kropp är ekvationer för vinkelhastighetens komponenter längs kroppsfixa huvudaxlar. Dessa kan skrivas

$$
\begin{aligned}
J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\
J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 &= M_2, \\
J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 &= M_3.
\end{aligned}
$$

Antag att momentvektorn är noll samt att $J_1 = J_2$, dvs. att kroppen är en fri symmetisk snurra, och lös dessa ekvationer.

Uppgift 5: Serieutveckla potentiella energin $V(q_1, \ldots, q_n)$ för ett system av n frihetsgrader till och med termer av andra graden. Vad skall gälla för termerna i denna utveckling om approximationen 'små svängningar' skall vara meningsfull?

Uppgift 6: Antag att tröghetstensorn är känd med masscentrum som momentpunkt (origo). Vi behöver nu tröghetstensorn m.a.p. en annan momentpunkt med koordinaterna (X, Y, Z) i masscentrumsystemet. Beräkna denna d.v.s. härled Steiners sats för tröghetstensorn.

Alla idéproblem kan lösas med hjälp av litteraturen.

Hanno Essén 03 03 11