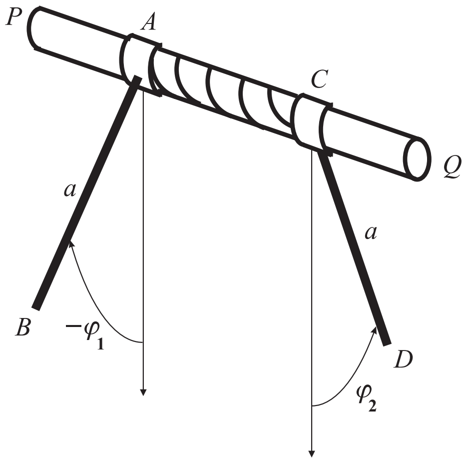
Kungl Tekniska Högskolan **2004 03 08**
Institutionen för Mekanik

Lösning, Analytisk mekanik, 5C1121, Tentamen, 2004 03 08

Räkneproblem

Uppgift 1: På en fix rak smal horisontell axel PQ är två likadana stänger, AB och CD, monterade. Båda har massan m och längden a. De kan rotera i varsitt fixt vertikalplan vinkelrätt mot PQ. Lagren vid A och C kan rotera fritt kring axeln PQ, men är förenade med en torsionsfjäder som är ospänd när stängerna är parallella. När vinkeln mellan stängerna är θ ges energin i torsionsfjädern av $\frac{1}{2}\kappa\theta^2$. Antag att $\kappa = 2mga$. Beräkna egenvinkelfrekvenserna för systemet vid små svängningar kring jämviktsläget. Ange kvalitativt vilken typ av rörelse de två vinkelfrekvenserna svarar mot.



Lösning 1: Kinetiska energin blir

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ma^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)\right)$$

och potentiella energin blir, $\kappa = 2mga$,

$$V = -mg\frac{1}{2}a\left(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2\right) + \frac{1}{2}2mga(\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

Eftersom vinkeln mella stavarna är $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$. Den kvadratiska approximationen blir då, bortsett från den konstanta termen som kastas bort,

$$V = \frac{1}{2}mga\left(\frac{5}{2}\varphi_1^2 + \frac{5}{2}\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_1\right)$$

Alltså fås sekularekvationen

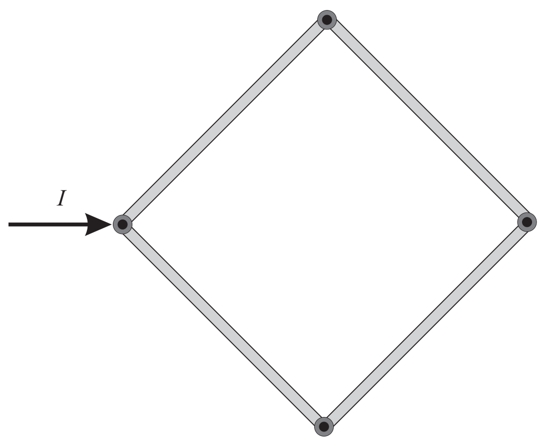
$$\left| -\frac{1}{3}a\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 5/2 & -2 \\ -2 & 5/2 \end{pmatrix} \right| = 0$$

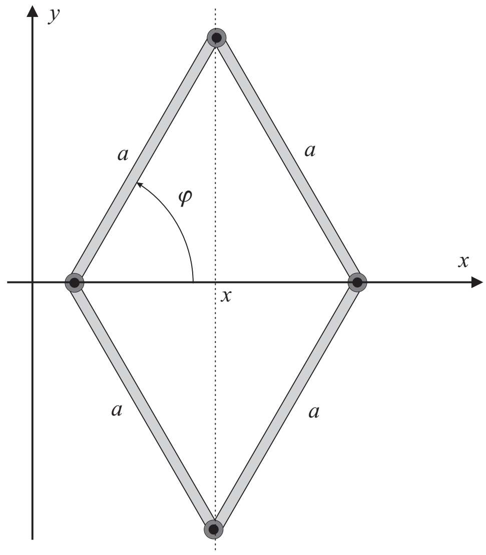
Detta ger $(-a\omega^2/3 + 5g/2)^2 - 4g^2 = 0$ så att

Svar: vinkelfrekvenserna blir $\omega_1 = 3\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{a}}$ och $\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{a}}$.

Den högre vinkelfrekvensen ω_1 svarar mot svängning i motfas med torsionsfjädern aktiv. Den lägre mot svängning med parallella stavar enbart under inverkan av tyngdkraften.

Uppgift 2: Fyra likadana stänger (massa m, längd a) är hopledade i ändarna så att de bildar en plan fyrsiding (en romb). Denna mekanism ligger i vila med alla vinklar räta (kvadrat) på ett plant horisontellt underlag när den träffas av en stötimpuls I parallell med kvadratens diagonal. Beräkna stängernas vinkelhastighet omedelbart efter stöten.





Lösning 2: Symmetrin gör att problemet har två frihetsgrader och generaliserade koordinater, x, φ, väljs enligt figuren. Vi behöver kinetiska energin. Lägena för masscentra ges av

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{G1,2} &= [x \mp (a/2)\cos\varphi]\boldsymbol{e}_x + [(a/2)\sin\varphi]\boldsymbol{e}_y,\\ \boldsymbol{r}_{G3,4} &= [x \mp (a/2)\cos\varphi]\boldsymbol{e}_x - [(a/2)\sin\varphi]\boldsymbol{e}_y,\end{aligned}$$

Hastigheterna blir då

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{G1,2} &= [\dot{x} \pm (a/2)\dot{\varphi}\sin\varphi]\boldsymbol{e}_x + [(a/2)\dot{\varphi}\cos\varphi]\boldsymbol{e}_y,\\ \boldsymbol{v}_{G3,4} &= [\dot{x} \pm (a/2)\dot{\varphi}\sin\varphi]\boldsymbol{e}_x - [(a/2)\dot{\varphi}\cos\varphi]\boldsymbol{e}_y,\end{aligned}$$

Kinetiska energin är, $T = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{4} v_{Gi}^2 + 4\frac{1}{2}\frac{1}{12}ma^2\dot{\varphi}^2$, enligt Könings teorem. Förenkling ger

$$T = 2m\dot{x}^2 + \frac{2}{3}ma^2\dot{\varphi}^2.$$

Vi behöver de generaliserade stötimpuserna I_x, I_φ. Vi har att arbetet som kraften uträttar kan skrivas $\delta W = Q_x \mathrm{d}x + Q_\varphi \mathrm{d}\varphi$. Här är

$$Q_a = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_a}$$

där $\boldsymbol{r} = (x - a\cos\varphi)\,\boldsymbol{e}_x$ är kraftens angreppspunkt. Detta ger $Q_x = F_x$ och $Q_\varphi = F_x a\sin\varphi$ så att de generaliserade stötimpulserna blir $I_x = I$ och $I_\varphi = Ia\sin\varphi$.

Vi behöver ju bara värdena vid det initiala läget som ges av $\varphi = \pi/4$ och $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Lagranges ekvationer för stöt ger nu

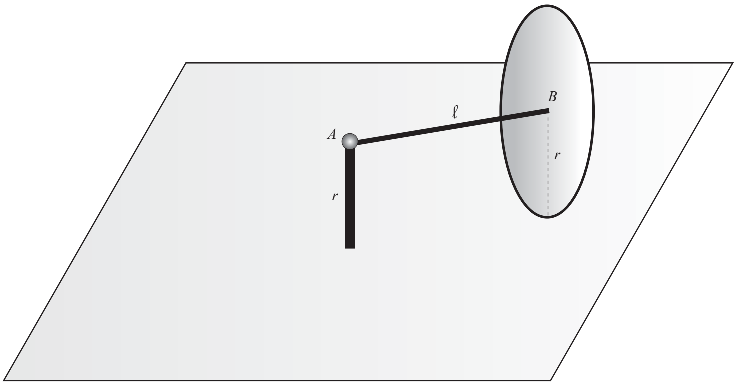
$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= 4m\dot{x} = I\\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{4}{3}ma^2\dot{\varphi} = \frac{a}{\sqrt{2}}I\end{aligned}$$

Ur den andra av dessa ekvationer fås

$$\textbf{Svar:}\ \dot{\varphi} = \frac{3I}{4\sqrt{2}ma}.$$

Uppgift 3: Ena ändpunkten B av en rak stång AB med längden ℓ är fäst i centrum av en homogen tunn cirkulär skiva med radien r så att stången är vinkelrät mot skivan. Den andra ändpunkten A av stången är med en led, som medger fri vridbarhet i alla riktningar fäst vid en fix punkt. Skivan rullar utan glidning på ett horisontellt plan beläget på avståndet r nedanför A. AB är alltså horisontell. Skivans massa är m och stångens massa kan försummas.

Bestäm skivans tryck mot horisontalplanet om AB roterar med konstant vinkelhastighet ω_0 kring vertikalen genom A.



Lösning 3: I lämpligt valt Resalsystem gäller att vinkelhastighetsvektorn för skivan, med hänsyn taget till rullningsvillkoret, blir

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0\, \boldsymbol{e}_2^B - (\ell/r)\omega_0\, \boldsymbol{e}_3^B$$

Resalsystemets vinkelhastighet ges av

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_0\, \boldsymbol{e}_2^B.$$

Vi använder nu

$$\boldsymbol{M}_A = (mg\ell - N\ell)\boldsymbol{e}_1^B$$

och att

$$\boldsymbol{L}_A = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = J_1\omega_0\boldsymbol{e}_2^B + J_3[-(\ell/r)\omega_0]\boldsymbol{e}_3^B$$

med $J_1 = m\ell^2 + mr^2/4$ samt $J_3 = mr^2/2$. Dessutom är

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_A = \frac{\mathrm{d}^B}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{\omega}_B \times \boldsymbol{L}_A.$$

Då $\frac{\mathrm{d}^B}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}_A = \mathbf{0}$ ger detta, efter lite algebra, att

$$-mr\ell\omega_0^2/2 = mg\ell - N\ell$$

och om N löses ur detta fås

Svar: $N = mg + mr\omega_0^2/2$.

Idéproblem:

Uppgift 4: En form av Lagranges ekvationer är

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a.$$

Storheterna Q_a är de generaliserade krafterna. Visa att dessa i det konservativa fallet kan skrivas

$$Q_a = -\frac{\partial V}{\partial q_a}$$

där V är den potentiella energin.

Uppgift 5: De så kallade Euler-Lagranges ekvationer,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0,$$

gäller om systemets rörelse uppfyller minsta verkans princip:

$$\delta S[q(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L[q(t), \dot{q}(t)]\,\mathrm{d}t = 0.$$

Visa detta!

Uppgift 6: En kropp med formen av en liksidig triangel har konstruerats av tre smala homogena stänger, med längden ℓ och massan m, som hopfogats i sina ändpunkter. Beräkna tröghetstensorns komponenter för ett huvudaxelsystem med origo i masscentrum.

Lösning 6: Lägg triangeln i xy-planet med origo i dess masscentrum. Då är

$$J_z = 3\left[\frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{1}{3}h\right)^2\right]$$

där h är höjden i den liksidiga triangeln med sidan ℓ. Denna ges av $h = \sqrt{3}\ell/2$ så att

$$J_z = \frac{1}{2}m\ell^2.$$

Enligt tunna satsen och symmetrin fås sedan att

$$J_x = J_y = \frac{1}{2}J_z = \frac{1}{4}m\ell^2$$

och då koordinatsystemet är ett huvudaxelsystem ger detta hela tröghetstensorn.

Hanno Essén 04 03 08