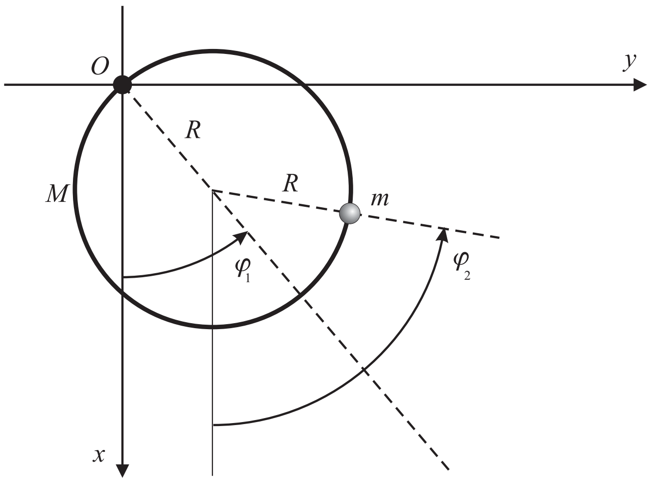
Lösning, Analytisk mekanik, 5C1121, Tentamen, 2005 03 11

Räkneproblem

Uppgift 1: En metallring har massa M och radie R. En punkt på dess periferi är upphängd i en fix punkt O. I O finns ett lager så att ringen kan svänga i ett vertikalplan med försumbar friktion kring en mot ringens plan vinkelrät och horisontell axel. På ringen kan en pärla glida med försumbar friktion. Pärlan har massan m. Beräkna vinkelfrekvenserna för små svängningar kring jämviktsläget för denna dubbelpendel.



Lösning 1: Kinetiska energin blir

$$T = \frac{1}{2}\left(2MR^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2)\right)$$

där $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{e}_\rho(\varphi_1) + R\boldsymbol{e}_\rho(\varphi_2)$ så derivering och kvadrering ger

$$\boldsymbol{v}^2 = R^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2),$$

så alltså är

$$T \approx \frac{1}{2}mR^2\left[\left(1 + \frac{2M}{m}\right)\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right],$$

i den kvadratiska approximationen. Potentiella energin blir

$$V = -MgR\cos\varphi_1 - mgR[\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2] \approx V_0 + \frac{1}{2}mgR\left[\left(1 + \frac{M}{m}\right)\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right].$$

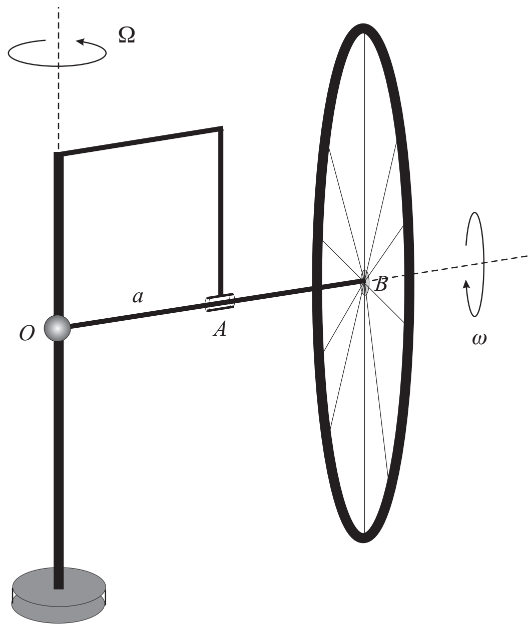
Alltså fås sekularekvationen

$$\left|-mR^2x\begin{pmatrix} 1+2M/m & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + mgR\begin{pmatrix} 1+M/m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

Detta ger

Svar: vinkelfrekvenserna blir $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2R}}$ och $\omega_2 = \sqrt{\frac{m+M}{M}\frac{g}{R}}$.

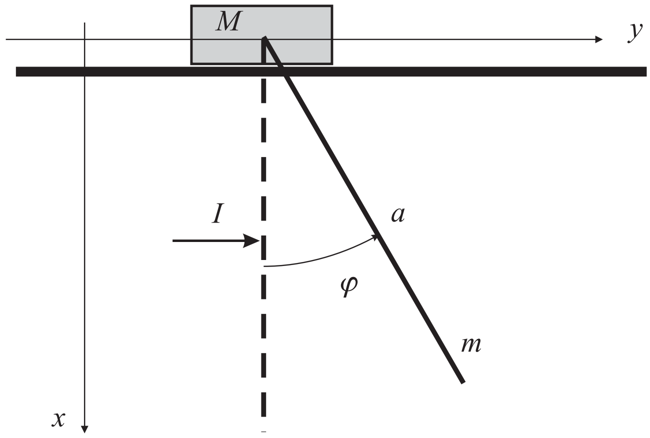
Uppgift 2: Ett cykelhjul, med med massa m och tröghetsmoment J med avseende på sin symmetriaxel, är monterat på en lätt horisontell axel OB med längden ℓ. Hjulet kan betraktas som tunt. Axeln OB roterar kring vertikalen med vinkelhastigheten Ω och hjulet roterar kring symmetriaxeln OB med vinkelhastigheten ω. På avståndet a från en fix kulled i O passerar OB genom en liten välsmord hylsa A som påverkar axeln OB med en kraft som är vinkelrät mot axeln. Beräkna denna kraft till storlek och riktning.



Lösning 2: Detta problem är samma som Example 5.4 sid. 84 i Chapter 5 (Three dimensional motion of rigid bodies). Byt bara d mot a och $\dot{\varphi}$ mot ω.

Svar: $F = \frac{mg\ell - J\Omega\omega}{a}$ uppåt (om positivt, annars neråt förståss).

Uppgift 3: En kloss med massan M kan glida längs ett rakt glatt horisontellt spår. Från klossen hänger en stång, med massa m och längd a, i sin ena ände. Denna är ledad i klossen så att stången kan rotera i ett vertikalplan som innehåller spåret. När systemet är i vila slås stången till i sin mittpunkt så att den får en stötimpuls I parallell med spåret. Beräkna klossens fart och stången vinkelhastighet omedelbart efter slaget.



Lösning 3: Kinetiska energin blir

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\frac{a^2}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ma\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Arbetet för den kraft $F(t)$ som tidsintegrerad ger I kan skrivas

$$\delta W = \delta W_y + \delta W_\varphi = Q_y dy + Q_\varphi d\varphi = F dy + \frac{a}{2}F d\varphi$$

så att $Q_y = F$ och $Q_\varphi = (a/2)F$. De generaliserade stötimpulserna blir alltså $I_y = I$ och $I_\varphi = (a/2)I$.

Lagrange stötekvationer ($p_a \equiv \partial L/\partial \dot{q}_a = \partial T/\partial \dot{q}_a$)

$$\begin{aligned} p_y(t+\tau) - p_y(t) &= I_y \\ p_\varphi(t+\tau) - p_\varphi(t) &= I_\varphi \end{aligned}$$

ger således (vid $\varphi = 0, t = 0$)

$$\begin{aligned} (M+m)\dot{y} + \frac{1}{2}ma\dot{\varphi} &= I \\ m\frac{a^2}{3}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}ma\dot{y} &= \frac{a}{2}I \end{aligned}$$

Ur dessa kan man lösa ut de önskade storheterna.

Svar: $\dot{y} = \frac{I}{m+4M}$ och $\dot{\varphi} = \frac{6MI}{ma(m+4M)}$.

Idéproblem:

Uppgift 4: En form av Lagranges ekvationer är

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0.$$

Betrakta fallet med en partikel och antag att $L = T - U$ där arbetsfunktionen U ges av, $U = -\frac{1}{2}m\Omega^2\rho^2 - m\Omega\rho^2\dot{\varphi}$, i cylinderkoordinater (ρ, φ, z). Beräkna rörelseekvationerna och tolka dessa.

Lösning 4: Bilda $L = T - U$ och få

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m\Omega^2\rho^2 + m\Omega\rho^2\dot{\varphi}.$$

Rörelse ekvationerna blir

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 &= m\rho\Omega^2 + 2m\Omega\rho\dot{\varphi} \\ m\rho\ddot{\varphi} + 2m\dot{\rho}\dot{\varphi} &= -2m\Omega\dot{\rho} \\ m\ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

I högerleden står här massa gånger acceleration i cylinderkoordinater, i vänsterleden således generaliserade krafter.

Tolkningen är att detta är ekvationerna för en fri partikel som rör sig relativt ett system som roterar kring z-axeln med vinkelhastigheten Ω. Krafterna på partikeln är således centrifugal och Coriolis krafterna. Notera att man kan skriva om Lagrangefunktionen på följande form

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2(\Omega + \dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2].$$

Av denna form framgår att partikeln har en vinkelhastighet Ω även när den är i vila, vilket alltså beror på att den betraktas från ett roterande koordinatsystem.

Uppgift 5: Antag att krafterna på ett system är stora under mycket kort tid, det vill säga, man har att göra med en stöt. En sådan karakteriseras av att läget ändras försumbart under denna korta tid, men inte hastigheterna. Hur kan man anpassa Lagranges ekvationer för systemet så att de ger svar på hur systemets hastighetstillstånd ändras vid stöten.

Lösning 5: Se Theory of Lagranges equations, Avsnitt 9.2.

vänd

Uppgift 6: En homogen kub med massa m och sida a delas i åtta lika kuber. En ny kropp bildas genom att sju av dessa limmas ihop igen i de ursprungliga snitten. Beräkna den nya kroppens tröghetstensor med avseende på ett koordinatsystem med origo i den ursprungliga kubens mittpunkt (masscentrum) och med koordinataxlarna parallella med kubens sidor.

Lösning 6: För den ursprungliga kuben har vi tröghetstensorn

$$\mathbf{I}^{\text{kub}} = \frac{1}{6}ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

På grund av additivitet gäller även

$$\mathbf{I}^{\text{kub}} = \mathbf{I}^{\text{kropp}} + \mathbf{I}^{\text{oktant}}$$

där $\mathbf{I}^{\text{kropp}}$ är den sökta tröghetstensorn för den nya kroppen, och $\mathbf{I}^{\text{oktant}}$ är tröghetstensorn för den saknade biten (i en oktant). Vi har även att

$$\mathbf{I}^{\text{oktant}} = \mathbf{I}^{\text{litenkub}} + \text{Steiner bidrag.}$$

För en liten (åttondels) kub har vi

$$\mathbf{I}^{\text{litenkub}} = \frac{1}{6}\frac{m}{8}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Steiner bidraget är samma som för en partikel med massan $m/8$ och läget $\boldsymbol{r} = (a/4)\boldsymbol{e}_x + (a/4)\boldsymbol{e}_y + (a/4)\boldsymbol{e}_z$, och blir således:

$$\text{Steiner bidrag} = \frac{m}{8}a^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/16 & -1/16 \\ -1/16 & 1/8 & -1/16 \\ -1/16 & -1/16 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså att

$$\mathbf{I}^{\text{kropp}} = \mathbf{I}^{\text{kub}} - (\mathbf{I}^{\text{litenkub}} + \text{Steiner bidrag})$$

Detta ger **Svar:**

$$\mathbf{I}^{\text{kropp}} = \frac{1}{6}ma^2 \begin{pmatrix} 7/8 & 3/64 & 3/64 \\ 3/64 & 7/8 & 3/64 \\ 3/64 & 3/64 & 7/8 \end{pmatrix}.$$

Hanno Essén 05 03 11