Mekanik fortsättningskurs V, 5C1114, 2004 01 09 , kl 09.00-13.00

Lösningar till Problemtentamen

Uppgift 1: På en horisontell axel som kan rotera med försumbar friktion sitter en lätt cylindrisk trumma med radie r. I en tråd som är upprullad på trumman hänger en vikt med massan m. På trumman sitter två vinkelräta lätta stavar av längd $4r$ monterade med mitten på rotationsaxeln vinkelräta mot denna. I vardera av stavarnas fyra ändar sitter en partikel med massan m. Beräkna trummans vinkelacceleration.

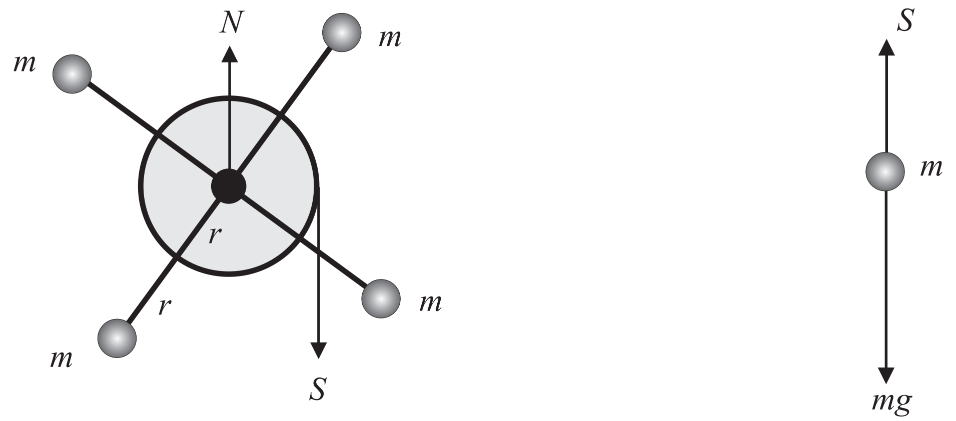


Figure 1: Bild till Lösning 1. Visar friläggning av systemet och trådspänningen S.

Lösning 1: De grundläggande rörelseekvationerna blir en kraftekvation för tyngden och en momentekvation med avseende på rotationsaxeln för trumma med partiklar.

$$
\begin{aligned}
ma &= mg - S, & (1)\\
I\alpha &= rS, & (2)\\
a &= r\alpha, & (3)\\
I = 4m(2r)^2 &= 16mr^2. & (4)
\end{aligned}
$$

De två sista ekvationerna är rullningsvillkoret (tråden rullas upp från trumman) respektive tröghetsmomentet. För S fås

$$S = mg - mr\alpha$$

med hjälp av rullningsvillkoret. Om detta och tröghetsmomentet sätts in i den första ekvationen fås,

$$16mr^2\alpha = r(mg - mr\alpha),$$

vilket ger
Svar: vinkelaccelerationen är

$$\alpha = \frac{g}{17r}.$$

Uppgift 2: En kvadratisk platta $OABC$ ligger på glatt horisontellt plan (xy-planet). Plattan har sidolängden a och massan m. I ett visst ögonblick verkar på plattan två krafter, vardera av beloppet F. Den ena angriper i hörnet O och är riktad längs y-axeln, den andra i hörnet C och är riktad längs x-axeln. Beräkna beloppet av masscentrums acceleration och vinkelaccelerationen.

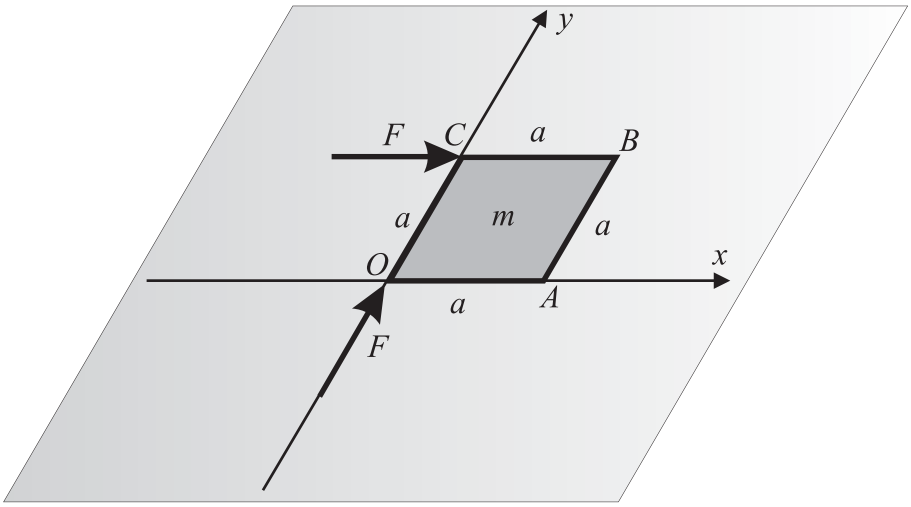


Figure 2: Bild till Lösning 2

Lösning 2: Lagen om masscentrums rörelse ger

$$m\boldsymbol{a}_G = F\boldsymbol{e}_x + F\boldsymbol{e}_y$$

och ur detta får man att masscentrums acceleration är

$$\boldsymbol{a}_G = \frac{F}{m}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y).$$

Beloppet blir alltså

$$a_G = \sqrt{\left(\frac{F}{m}\right)^2 (1^2 + 1^2)} = \frac{F}{m}\sqrt{2}.$$

Momentekvationen med avseende på masscentrum är

$$I_G\alpha = M_G,$$

där $I_G = ma^2/6$ och

$$M_G = -(a/2)F - (a/2)F = -aF$$

(alltså i negativ z-led). Alltså är vinkelaccelerationen

$$\alpha = -\frac{6F}{am}.$$

Detta ger
Svar: Masscentrums acceleration har beloppet

$$a_G = \sqrt{2}\,\frac{F}{m}.$$

och vinkelaccelerationen är

$$\alpha = -\frac{6F}{am}.$$

Uppgift 3: En smal rak homogen stång med längden ℓ används som slagträ. Stångens ena ände används som handtag. Beräkna hur långt från denna ände en boll ska träffa för att stötimpulsen i handtaget skall bli så liten som möjligt?

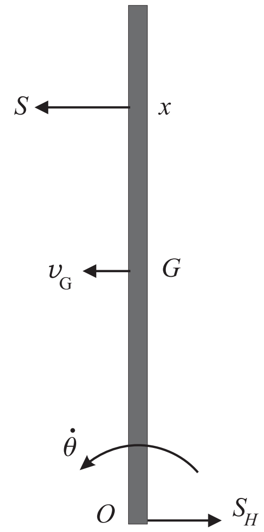


Figure 3: Bild till Uppgift 3

Lösning 3: Stötimpulsen $\boldsymbol{S}$ är ändringen i rörelsemängd så att vi får

$$\boldsymbol{p}_{\text{efter}} - \boldsymbol{p}_{\text{före}} = m\boldsymbol{v}_G - \boldsymbol{0} = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}_H$$

Endast den horisontella komponeneten är skild från noll och den blir

$$mv_G = S - S_H$$

För rotationen kan vi använda att impulsmomentet med avseende på handtaget O är

$$\boldsymbol{H}_{\text{efter}} - \boldsymbol{H}_{\text{före}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{S}$$

vilket ger

$$H_{Oz\,\text{efter}} - H_{Oz\,\text{före}} = I_O\dot{\theta} - 0 = xS$$

Impulsmomentets z-komponent är alltså

$$xS = I_O\dot{\theta}$$

Tröghetsmomentet är $I_O = \frac{1}{3}mb^2$ och sambandsformeln ger

$$v_G = \frac{b}{2}\dot{\theta}.$$

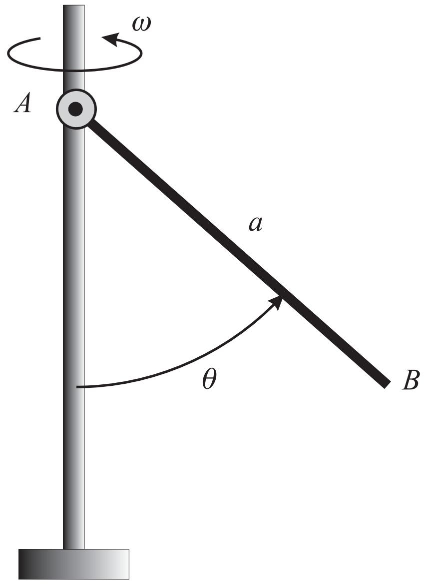
Vi får nu

$$S_H = S - mv_G = S - m\frac{b}{2}\dot{\theta} = S - \frac{mb}{2}\frac{xS}{I_O} = \left(1 - \frac{mbx}{I_O}\right)S = \left(1 - \frac{3x}{2b}\right)S$$

Alltså blir $S_H = 0$ när
Svar: avståndet är

$$x = \frac{2b}{3}.$$

Uppgift 4: En smal rak homogen stång AB med längden a är i A fäst i en led så att den kan rotera fritt kring en horisontell axel vinkelrät mot AB. Leden i A är fast monterad på en vertikal axel som roterar med konstant vinkelhastighet ω. Beräkna jämviktsvinkeln för stången. Notera att (enkrafts) resultanten av centrifugalkrafterna ej angriper i stångens masscentrum.



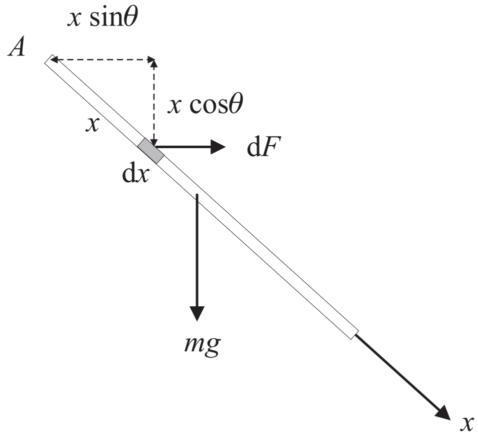


Figure 4: Bild till Uppgift 4

Lösning 4: Jämvikt råder när kraftmomentet med avseende på A är noll. I det roterande systemet blir det kraftmoment fårn tyngdkraften och från centrifugalkraften. Tyngdkrafterna har en enkraftsresultant i masscentrum mitt på stången men för att få centrifugalkrafternas moment måste man summera (integrera) bidragen från masselementen längs staven.

$$M_A = -\frac{a}{2}\sin\theta\, mg + \int_0^a x\cos\theta\,\mathrm{d}F.$$

Under integraltecknet står momentet av centrifugalkraften på masselementet

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{a}\mathrm{d}x$$

som är

$$\mathrm{d}M_{A\,\mathrm{cf}} = x\cos\theta\,\mathrm{d}F = x\cos\theta\,[\mathrm{d}m\,(x\sin\theta)\,\omega^2]$$

Man får nu att

$$M_A = -\frac{a}{2}\sin\theta\, mg + \frac{m}{a}\omega^2\cos\theta\,\sin\theta\int_0^a x^2\mathrm{d}x = ma\sin\theta(-g/2 + \omega^2 a\cos\theta/3)$$

Jämvikt kräver att momentet $M_A = 0$ vilket alltså ger (för $\theta \neq 0$)

$$\cos\theta = \frac{3}{2}\frac{g}{a\omega^2}$$

Alltså **Svar:** jämviktsvinkeln är

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{2}\frac{g}{a\omega^2}\right).$$

HE 04 01 09 (Mek fk V)