Mekanik II, 5C1140, 2005 01 13, kl 14.00-18.00

Lösningar till Problemtentamen

Uppgift 1: En planka med massan M ligger på två cylindriska stockar, vardera med massan m och radien r. Plankan rullar på stockarna som i sin tur rullar på ett plant underlag. Vid en viss tidpunkt har plankan farten v. Beräkna systemets (planka och stockar) kinetiska energi.

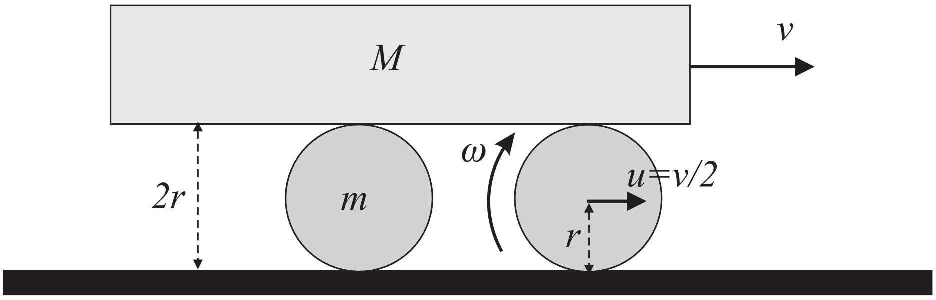

Figure 1: Bild till Lösning 1. Visar några storheter som används i beräkningarna.

Lösning 1: Rullning gör att translationshastigheten u och vinkelhastigheten ω för stockarna måste uppfylla

$$u = r\omega.$$

Översidan av stockarna måste ha farten v så sambandsformeln ger att

$$2r\omega = v.$$

Alltså är

$$\omega = \frac{v}{2r}$$

och $u = v/2$.

Kinetiska energin T kan skrivas

$$T = T_{\text{planka}} + 2T_{\text{stock}}.$$

Man har direkt att $T_{\text{planka}} = \frac{1}{2}Mv^2$. Lagen om kinetiska energins två delar (Königs sats) ger att

$$T_{\text{stock}} = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{1}{2}m\frac{v^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{v^2}{4r^2} = \frac{3}{16}mv^2.$$

Den totala kinetiska energin blir då $T = \frac{1}{2}Mv^2 + 2\frac{3}{16}mv^2$ vilket ger

Svar:

$$T = \frac{1}{2}\left(M + \frac{3}{4}m\right)v^2.$$

Uppgift 2: En cylindrisk trästock ligger på ett horisontellt underlag. Cylinderns radie är R. En gevärskula avfyras mot stocken i en riktning som är horisontell och vinkelrät mot cylinderaxeln. Den går tvärs igenom stocken, rakt över masscentrum, på försumbar tid. På vilken höjd h över underlaget skall kulan avfyras för att stocken skall rulla, utan att glida, omedelbart efter att den träffats?

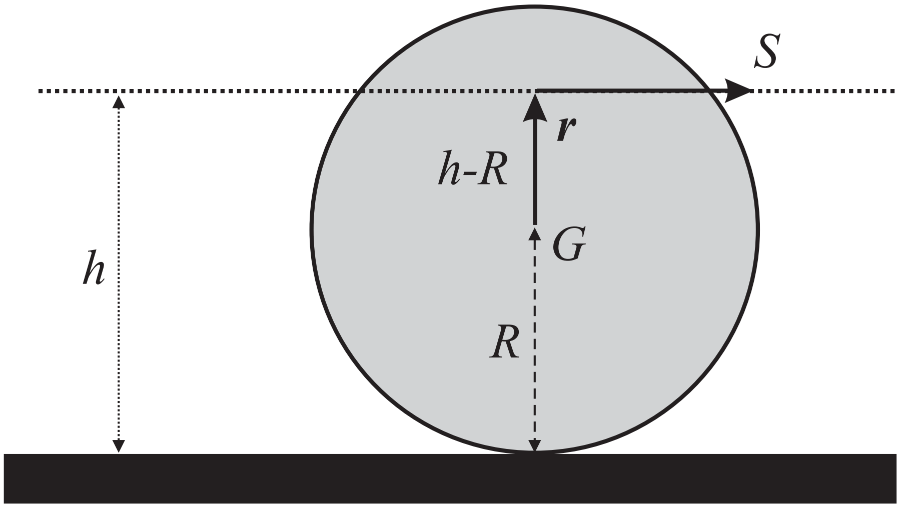

Figure 2: Bild till Lösning 2. Stötimpulsen $\boldsymbol{S}$ och dess lägesvektor $\boldsymbol{r}$ med avseende på masscentrum G är markerade.

Lösning 2: Man får en stötimpuls $\boldsymbol{S}$ med verkningslinje längs kulbanan. Denna ger ändringen i rörelsemängd så att vi får

$$\boldsymbol{p}_{\text{efter}} - \boldsymbol{p}_{\text{före}} = m\boldsymbol{v}_G - \boldsymbol{0} = \boldsymbol{S}.$$

Endast de horisontella komponeneten av vektorerna är skilda från noll och denna komponenet ger

$$mv_G = S.$$

För rotationen kan vi använda att impulsmomentet med avseende på masscentrum G som är

$$\boldsymbol{H}_{\text{efter}} - \boldsymbol{H}_{\text{före}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{S}.$$

Då problemet är plant är endast komponeneten vinkelrät mot planet skild från noll i denna vektorekvation. Denna ger

$$H_{Gz\,\text{efter}} - H_{Gz\,\text{före}} = I_G\omega - 0 = (h-R)S.$$

Här är $I_G = mR^2/2$. De två impulslagarna ger alltså,

$$v_G = \frac{S}{m},$$

och,

$$R\omega = \frac{2(h-R)}{R}\frac{S}{m}.$$

Rullning kräver att $R\omega = v_G$ och detta ger, $2(h-R) = R$, så att,

Svar: höjden måste vara

$$h = \frac{3}{2}R.$$

Uppgift 3: En fysisk pendel består av en kropp som är lagrad i en horisontell axel O på avståndet h från (en parallell axel genom) masscentrum G. Kroppen har massan m. Tröghetsmomentet med avseende på den parallella axeln genom masscentrum är I. Den släpps från ett läge där linjen OG mellan axeln och masscentrum är horisontell ($\theta = 0$). Beräkna kraften på kroppen från rotationsaxeln när linjen bildar 60 graders vinkel med den horisontella riktningen ($\theta = \pi/3$).

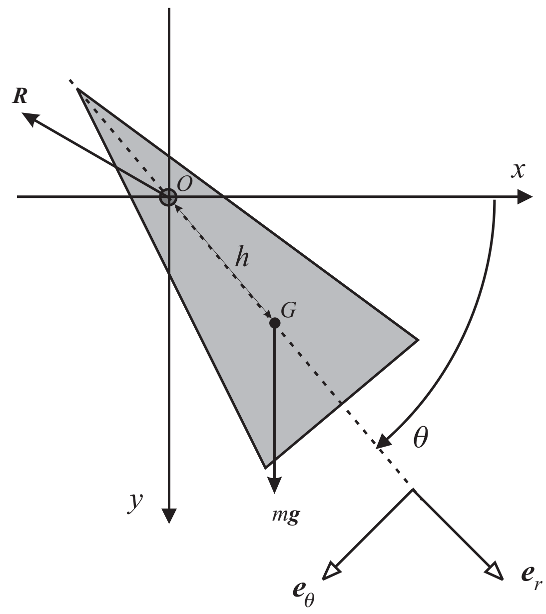

Figure 3: Bild till Uppgift 3. Den sökta kraften på kroppen från axeln O betecknas här $\boldsymbol{R}$.

Lösning 3: Inför cylinderkoordinater och använd lagen om masscentrums rörelse $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R} + m\boldsymbol{g}$. För komponenterna av den sökta kraften $\boldsymbol{R}$ fås då,

$$-mh\dot{\theta}^2 = R_r + mg\sin\theta, \tag{1}$$
$$mh\ddot{\theta} = R_\theta + mg\cos\theta. \tag{2}$$

Rotation kring O beskrivs av rörelseekvationen,

$$I_O\ddot{\theta} = mgh\cos\theta. \tag{3}$$

Här är $I_O = I + mh^2$ enligt Steiners sats. Energins bevarande ger

$$\frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 - mgh\sin\theta = 0. \tag{4}$$

Ekvationerna (4) och (3) löses nu med avseende på $\dot{\theta}^2$ respektive $\ddot{\theta}$:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mgh}{I + mh^2}\sin\theta, \tag{5}$$
$$\ddot{\theta} = \frac{mgh}{I + mh^2}\cos\theta. \tag{6}$$

Dessa sätts in i ekvationerna (1) respektive (2). Ur dessa löses sedan de två komponeneterna, R_r och R_θ, av den sökta kraften. Då $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ och $\cos(\pi/3) = 1/2$ fås **Svar:**

$$R_r = -mg\sin\theta - mh\tfrac{2mgh}{I+mh^2}\sin\theta = -mg\sin\theta\left(1 + \tfrac{2mh^2}{I+mh^2}\right) = -mg\tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \tfrac{2mh^2}{I+mh^2}\right) \tag{7}$$
$$R_\theta = -mg\cos\theta + mh\tfrac{mgh}{I+mh^2}\cos\theta = -mg\cos\theta\left(1 - \tfrac{mh^2}{I+mh^2}\right) = -mg\tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{mh^2}{I+mh^2}\right) \tag{8}$$

Uppgift 4: En person P går på en horisontell roterande platta. I ett givet ögonblick har personen avståndet r från rotationsaxeln O och farten v i tangentiell riktning relativt plattan. Plattan har den konstanta vinkelhastigheten ω. Beräkna vilken relativ fart v personen måste ha för att Corioliskraften och centrifugalkraften (systempunktskraften), i det roterande system där plattan är i vila, skall vara lika stora och motriktade?

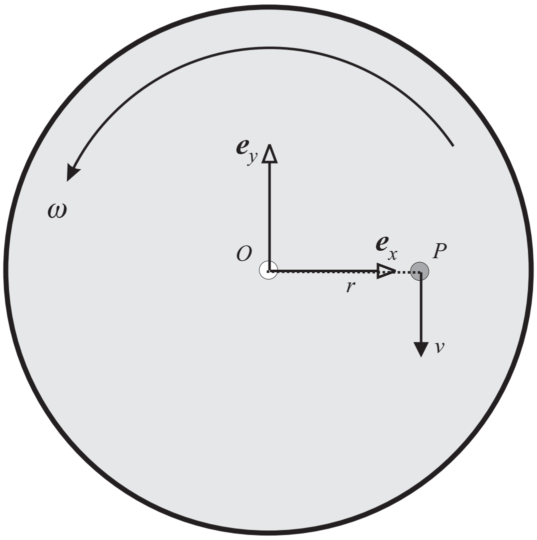

Figure 4: Bild till Lösning 4 med lämpliga basvektorer.

Lösning 4: Med enhetsvektorer enligt figuren fås för systempunktskraften

$$\boldsymbol{F}_{\text{sp}} = m\omega^2 r\boldsymbol{e}_x.$$

För Corioliskraften fås, då $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z$ och $\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = -v\boldsymbol{e}_y$, att

$$\boldsymbol{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\text{rel}} = -2m\omega\boldsymbol{e}_z \times (-v\boldsymbol{e}_y) = 2m\omega v(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y) = -2m\omega v\boldsymbol{e}_x.$$

Vi kräver nu att dessa är lika stora och motriktade. Det vill säga, att vektorsumman är noll

$$\boldsymbol{F}_{\text{sp}} + \boldsymbol{F}_{\text{Cor}} = \boldsymbol{0}.$$

Men den enda komponeneten av denna vektorekvation blir

$$m\omega^2 r - 2m\omega v = 0,$$

och lösningen är $v = r\omega/2$. Alltså

Svar: farten måste vara

$$v = \frac{r\omega}{2}.$$

HE 05 01 13 (Mek II)